This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

FROM THE LIBRARY OF

J. V. Uspensky

PROFESSOR OF MATHEMATICS
AT STANFORD, 1929–1947

*

Therefore the mind which is free from passions is a citadel,

for man has nothing more secure to which he can fly for refuge

and for the future be inexpugnable.

—Marcus Aurelius

*

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES

VORLESUNGEN

ÜBER

GEMEINE ARITH

CH DEN NEUEREN ANSIC

BEARBEITET VON

Dr. OTTO STOLZ,

OFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU INNSB

ERSTER THEIL:

ARITHMETIK DER REEL

VORLESUNGEN

ÜBER

ALLGEMEINE ARITHMETIK.

NACH DEN NEUEREN ANSICHTEN

BEARBEITET VON

Dr. OTTO STOLZ,
ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU INNSBRUCK.

ERSTER THEIL:

ALLGEMEINES UND ARITHMETIK DER REELLEN ZAHLEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1885.

Vorwort.

Diejenigen Lehren der Analysis, welche gewöhnlich als der elementare Theil derselben betrachtet werden, sind in der letzten Zeit neu bearbeitet und wesentlich gefördert worden. So bedeutend weichen gegenwärtig die populär-pädagogischen und die wissenschaftlichen Darstellungen der Elemente der Mathematik von einander ab, dafs beinahe jedes Lehrbuch und jedes Colleg über höhere Analysis mit einem Abrisse der Elemente eingeleitet wird. Da jedoch auf diese Weise eine gleichmäfsige, ins Einzelne gehende Behandlung der elementaren Partieen nicht zu erreichen ist, so habe ich es vorgezogen, denjenigen Lehren, deren Gesammtheit als allgemeine Arithmetik und algebraische Analysis bezeichnet wird, systematisch fortschreitende, den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft überall berücksichtigende Vorlesungen zu widmen, welche ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe.

Die Darstellung in diesem ersten, den reellen Zahlen gewidmeten Theile der Vorlesungen möge durch die folgenden Bemerkungen näher characterisirt werden. — Der Gröfsenbegriff wird nach H. Grafsmann festgestellt, in der Theorie der natürlichen Zahlen ist E. Schröder's mustergiltige Darstellung derselben zu Grunde gelegt. Der 3. Abschnitt, die analytische Theorie der rationalen Zahlen, beruht auf Hankel's Betrachtungen über die Gröfsenverknüpfungen im Allgemeinen, weicht jedoch darin davon ab, dafs auch die Bezeichnungen „gröfser, kleiner" im formalen Sinne gebraucht sind, was Hankel ausdrücklich zurückweist, wiewohl es schon bei Euclid vorkommt. — Als ein wesentliches Merkmal der Gröfsen im Sinne der Alten ist bezeichnet ein von Archimedes hervorgehobenes Axiom, dessen Bedeutung durch die von

P. du Bois-Reymond aufgestellten „Unendlich der Functionen“ erkannt worden ist. Das stetige Gröfsensystem wird nach G. Cantor erklärt, mit dessen Angaben meine eigene, auf R. Dedekind's Schrift: „Stetigkeit und irrationale Zahlen (1872)“ fufsende Untersuchung zusammentrifft. Die Euclidschen Verhältnisse, das Vorbild der abstracten Gröfsensysteme, finden eingehende Würdigung.

Die Lehre von den irrationalen Zahlen ist nach E. Heine und G. Cantor entwickelt und auf sie die von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen gegründet. Der 9. Abschnitt führt diejenigen Begriffe und Sätze aus der Theorie der Functionen von reellen Veränderlichen, zumeist nach Cauchy und Weierstrafs, vor, welche zur strengen Darstellung der Lehre von den Kreisfunctionen unentbehrlich sind und schliefst mit einer Theorie von unendlich kleinen Gröfsen, welche wirklich nach dem schon dem Alterthume bekannten Verfahren der Gröfsenbildung entworfen ist und zugleich eine treffende Erläuterung der allgemeinen Sätze des 3. Abschnittes bildet. Der 10. Abschnitt beschäftigt sich mit den unendlichen Reihen und legt die wichtigsten von Cauchy, Abel, Dirichlet, Seidel, Weierstrafs, P. du Bois-Reymond u. A. hinsichtlich ihrer Convergenz und des Rechnens mit ihnen gewonnenen Resultate dar, welche dann bei Entwickelung der Exponential- und anderer Functionen in Potenzreihen benutzt werden.

Innsbruck, im Mai 1885.

O. Stolz.

Inhalt.

Erster Theil. Allgemeines. Arithmetik der reellen Zahlen.

I. Abschnitt. Einleitung 1

1. Begriff der Gröfse. 2. Gleiche Gröfsen. 3. Die gröfsere und die kleinere Gröfse. 4. Formaler Gebrauch der Begriffe gleich, gröfser, kleiner. 5. Die Zahlen. 6. Umfang der allgemeinen Arithmetik. 7. Das Hauber'sche Theorem von der Umkehrbarkeit der Sätze.

II. Abschnitt. Die natürlichen Zahlen 9

1. Vergleichung der Vielheiten. 2. Die natürliche Zahl. 3. Addition, 4. 5. Subtraction, 6. 7. Multiplication, 8. Division der natürlichen Zahlen. 9. Die Potenz. 10. Zahlensysteme. 11. Hilfssätze aus der Zahlentheorie.

III. Abschnitt. Analytische Theorie der rationalen Zahlen . . 25

1. Die thetische Verknüpfung. 2. Associatives und commutatives Gesetz. 3. 4. Die Lysis. 5. Ungleichungen. 6. Distributive Formeln. 7. 8. Erweiterung des Gröfsensystemes. 9. Der Modulus der Thesis und die reciproke Gröfse. 10. Ungleichungen. — 11—16. Analytische Entwickelung des Systemes der rationalen Zahlen. 17. Die bisher befolgte Methode der Zahlenbildung wird aufgegeben.

IV. Abschnitt. Synthetische Theorie der rationalen Zahlen . . 58

1. Die absoluten gebrochenen Zahlen. 2. Ihre Addition. 3. Ihre Multiplication. 4. Die relativen rationalen Zahlen. 5. Die vier Species mit denselben. 6. 7. Die systematischen Brüche.

V. Abschnitt. Absolute, relative, stetige Gröfsen 69

1. 2. Absolute Gröfsen. 3. Commensurabele und incommensurabele Gröfsen. 4. System der Geometrie der Alten. 5. Absolute Flächen. 6. Die Exhaustionsmethode. 7. Relative Gröfsen. 8. 9. Stetige Systeme von absoluten Gröfsen. 10. Das System der rationalen Zahlen ist nicht stetig.

VI. Abschnitt. Theorie der Verhältnisse nach Euclid 85

1. Arithmetische Verhältnisse. 2. Gleichheit geometrischer Verhältnisse. 3. Das gröfsere Verhältnifs. 4. Sätze über Proportionen und Ungleichungen. Erste Gruppe. 5. Zweite Gruppe. 6. Die vierte geometrische Proportionale. 7. Zusammensetzung der Verhältnisse. 8. Irrationale Zahlen. 9. Das Rechnen mit den Verhältnissen. 10. Schlufs.

VII. Abschnitt. Arithmetische Theorie der irrationalen Zahlen . 97

1. Neue Theorien derselben. 2. Rationale Grenzwerthe. 3. 4. Charakteristische Relation der Glieder gewisser Zahlenreihen. 5. Definition der irrationalen Zahlen. 6. Addition, 7. Subtraction, 8. Multiplication, 9. Division derselben. 10. Stetigkeit des Systemes der reellen Zahlen. 11. Irrationale Grenzwerthe in systematischer Form. 12. Unvollständige Decimalzahlen. 13. Verhältnisse stetiger relativer Gröfsen.

VIII. Abschnitt. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen 125
1. 2. Ganze positive Potenzen. 3. Potenzen der Binome und Polynome. 4. 5. Die Wurzeln. 6. 7. Potenzen mit rationalen Exponenten. 8. Potenzen mit irrationalen Exponenten. 9. 10. Die Logarithmen.

IX. Abschnitt. Die reellen Veränderlichen und ihre Functionen 149
1. Die reelle Veränderliche und ihre Grenzen. 2. Stetige Veränderliche. 3. Ein- und mehrdeutige Functionen einer Veränderlichen. 4. Unendlicher Werth der Veränderlichen. 5. Grenzwerthe der Functionen einer Veränderlichen. 6. Ein Fundamentalsatz. 7. Die Unbestimmtheitsgrenzen. 8. Allgemeiner Satz über die Existenz eines Grenzwerthes. 9—11. Besondere Sätze darüber. — 12. Stetige Functionen. 13. Erste Eigenschaft derselben. 14. Die umgekehrte Function. 15. Zweite Eigenschaft der stetigen Functionen. 16. Dritte Eigenschaft. 17. Geometrische Darstellung der Functionen einer Veränderlichen. 18. Functionen von zwei und mehreren Veränderlichen. 19. Gleichmäfsige Convergenz von Functionen zweier Veränderlichen. 20. Grenzwerthe von Functionen von zwei und mehreren Veränderlichen. 21. Stetigkeit derselben.

Anhang. Die unendlich kleinen Gröfsen 205
22. Erste Theorie. Die Momente der Functionen. 23. Erweiterung des Systemes der Momente. 24. Zweite Theorie. 25. Die Unendlich der Functionen.

X. Abschnitt. Die unendlichen Reihen mit reellen Gliedern . 216
1. Convergente Reihen. 2. Divergente Reihen. 3. Allgemeine Sätze über die Reihen. 4—7. Reihen mit positiven Gliedern. 8. Alternirende Reihen. 9. Reihen mit positiven und negativen Gliedern in unbegrenzter Anzahl. 10. Sätze über absolut convergente Reihen. 11. Hilfssatz. 12. Einige unendliche Producte. — Criterien der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern. 13. Allgemeiner Satz. 14—16. Criterien 1. Art. 17. 18. Criterien 2. Art. 19. Anwendungen 20. Criterien für alternirende Reihen. — 21. Reihen, deren Glieder Functionen einer Veränderlichen sind. 22. 23. Reihen nach ganzen positiven Potenzen einer Veränderlichen. 24. Identitätssatz. 25. Entwickelung der zusammengesetzten Function $\varphi\,|f(x)|$ in eine Reihe, 26. insbesondere des Quotienten zweier endlichen oder unendlichen Potenzreihen. 27. Reihen nach ganzen postiven Potenzen von zwei Veränderlichen. 28. Identitätssatz. 29. Entwickelung der zusammengesetzten Function $\varphi\,|f(x), g(x)|$ in eine Reihe. 30. Auflösung der Gleichungen durch Reihen. — 31. Numerische Berechnung des Grenzwerthes einer convergenten Reihe. 32. Fall der Potenzreihen.

XI. Abschnitt. Die Potenzreihen für die Exponentialfunction, die Potenz und den Logarithmus 303
1. Die Reihen für e^x, a^x. 2. Die Binomialreihe. 3. Näherungswerthe für die absoluten Wurzeln. 4. Die Lambertsche Formel. 5. Die Reihe für den Logarithmus. 6. 7. Numerische Berechnung der Logarithmen. 8. Reihen für einige zusammengesetzte Functionen. Allgemeiner polynomischer Satz.

Anmerkungen und Zusätze 330

I. Abschnitt.

Einleitung.

1. Die Grundlage der reinen Mathematik bildet das Rechnen, d. i. die Verknüpfung der Gröfsen.

Die Bezeichnung „Gröfse ($\mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\theta o\varsigma$)“ kommt in Euclid's Elementen vor, doch ihren Begriff erklärt er nirgends. Nach ihm sind als Gröfsen zu betrachten die begrenzten geometrischen Gebilde: Linien, Winkel, Flächen, Körper; jedoch wol auch die natürlichen Zahlen.[1]) Allen gemeinsam sind die folgenden Merkmale, auf denen das Rechnen mit ihnen beruht: man kann die gleichartigen unter ihnen vergleichen, addiren, subtrahiren und im Allgemeinen jede Gröfse in mit ihr gleichartige Theile zerlegen. Den Gröfsen stellt die Geometrie der Alten die geometrischen Verhältnisse gegenüber, obwol sie selbst auch ihnen das erste der obigen Merkmale beilegt, wozu, wie wir sehen werden, die übrigen treten können. Indem wir von den geometrischen Gröfsen, der natürlichen Zahl und dem Euclid'schen Verhältnisse zur nächst höheren Gattung aufsteigen, gelangen wir zur absoluten Gröfse im engern Sinne (vgl. V. 1). Nichts hindert, noch allgemeinere Begriffe aufzustellen. Wenn wir nur das erste aus der obigen Gruppe von Merkmalen festhalten, so ergiebt sich der weiteste Begriff, von welchem auch H. Grafsmann ausgeht. Geben wir ihm den Namen „Gröfse“, so wird ein Gröfsenbegriff ein Begriff von der Art sein, dafs je zwei der darunter enthaltenen Dinge entweder als gleich oder als ungleich erklärt sind. Mit andern Worten: „Gröfse heifst ein jedes Ding, welches einem anderen gleich oder ungleich gesetzt werden soll.“[2]) Alle Dinge, die mit einem Dinge verglichen sind, heifsen gleichartige (homogene) Gröfsen und

bilden ein Gröfsensystem. — Die Gröfsen werden mit Buchstaben bezeichnet, insbesondere sollen $a\,b\,c\ldots$ im Folgenden Gröfsen eines Systemes bedeuten.

2. Man sagt: „Gleich heifsen zwei Dinge, wenn man in jeder Aussage statt des einen das andere setzen kann.“ Darüber ist Folgendes zu bemerken. Nachdem die Erklärung abgegeben ist, dafs zwei gegebene Dinge als gleich zu betrachten seien, hat man nachzuweisen, dafs sie einander vertreten können. Dafs das gelten soll für jedes Urtheil, ist offenbar zu viel verlangt, indem zwei Dinge nicht in jedem Merkmale übereinstimmen können. In der That kommt es hier nur darauf an, dafs das eine Ding das andere in den Formeln und Ausdrücken ersetzen könne.

Dafs a gleich b ist, wird kurz durch die Gleichung $a = b$ bezeichnet. $=$ ist das Zeichen der Gleichheit, $a\,b$ die Seiten der Gleichung. Dafs unter zwei ungleichen Gröfsen $a\,b$ die erstere die gröfsere (kleinere) heifst, bezeichnet man durch die Ungleichung $a > b$ ($a < b$), deren Seiten die verglichenen Gröfsen genannt werden. Formel und Relation sind gemeinsame Namen für die Gleichungen und Ungleichungen. Unter entsprechenden oder simultanen Relationen z. B. $a \gtrless b$ $a' \gtrless b'$ wird verstanden, dafs neben $a > b$ $a' > b'$ und neben $a < b$ $a' < b'$ sein mufs.

Unter einer eindeutigen Verknüpfung der Gröfsen $a\,b\,c\ldots$ versteht man eine Regel, nach welcher entweder jeder oder doch einigen Zusammenstellungen $a\,b$ je eine Gröfse c dieses oder eines anderen Systemes zugeordnet wird. Allgemeine Zeichen, die jede beliebige Verknüpfung bedeuten können, sind $\circ$ $\odot$ u. dgl.[3]) Man schreibt $a \circ b = c$ und liest: „a mit b ist c“. — Man kann jede Gröfse beliebig oft setzen, wie die Begriffe der Logik. So geht es an, nachdem a mit b verknüpft ist, a dennoch mit einer dritten Gröfse b' zu verknüpfen; auch läfst sich a mit sich selbst verknüpfen. Zur Vermeidung von Unterscheidungen betrachtet man das erstere als einen besonderen Fall der Verknüpfung von b, b' mit zwei gleichen Gröfsen $a = a'$. In diesem Sinne sagt man wol: „Jede Gröfse ist sich selbst gleich.“ — Im Falle, dafs die Verknüpfung $\circ$ auf Gröfsen des gegebenen Systemes

führt, kann man eine Gröfse a fortschreitend mit mehreren Gröfsen des Systemes $b c \ldots z$ verknüpfen, d. h. man verknüpfe zuerst a mit b, das Ergebnis $a \circ b$ mit c u. s. f. — Wenn die als Resultat der Verknüpfung zweier Gröfsen $a\ b$ erklärte Gröfse $a \circ b$ bei einer Verknüpfung zu verwenden ist, so hat man $a \circ b$ in Klammern zu setzen. Das Resultat der fortschreitenden Verknüpfung $\circ$ von a mit $b c \ldots z$ wird aber anstatt mit $(.((a \circ b) \circ c).) \circ z$ mit $a \circ b \circ c \circ \ldots z$ bezeichnet. — Die Darstellung einer Gröfse durch andere mittelst der Verknüpfungs- oder Rechenzeichen heifst ein Ausdruck.

Zufolge des Vorstehenden mufs die Erklärung, welche festsetzt, wann je zwei der Gröfsen $a\ b\ c \ldots$ als gleich oder als ungleich anzusehen seien, folgenden Bedingungen Genüge leisten.

1) Wenn gemäfs der Erklärung $a = b$ ist, so mufs eben deswegen $b = a$ sein. Desgleichen wenn a und b ungleich sind, so auch b und a.

2) Je zwei Gröfsen des Systemes müssen entweder gleich oder ungleich sein.

3) Wenn der Erklärung zufolge $a = b$ $b = c$, so mufs eben deswegen $a = c$ sein. — Corollare. 1) Wenn von einer Reihe von Gröfsen bekannt ist, dafs jede der folgenden gleich ist, so sind irgend zwei derselben einander gleich. — 2) Ist $a = b$, b und c ungleich (oder: sind a und b ungleich, $b = c$), so sind a und c ungleich. (Beweis indirect.)

4) Stets wird angenommen, dafs wenn $a \circ b = c$ und $c = c'$, auch c' als Ergebnifs der Verknüpfung $\circ$ von a mit b angesehen werden darf: $a \circ b = c'$. Zu zeigen aber ist: das Ergebnifs einer jeden eindeutigen Verknüpfung von zwei Gröfsen bleibt ungeändert oder geht nur in eine ihm gleiche Gröfse über, wenn man eine oder beide Gröfsen durch ihnen gleiche ersetzt. D. i. Neben $a = a'$ $b = b'$ mufs $a \circ b = a' \circ b'$ sein. — Corollar. Wenn $a = a'$ $b = b'$ $c = c' \ldots$, so ist

$$a \circ b \circ c \circ \ldots = a' \circ b' \circ c' \circ \ldots$$

Ob die letzte Forderung erfüllt ist, wird sich erst nach und nach erweisen lassen in dem Maafse, als eindeutige Ver-

knüpfungen der betrachteten Gröfsen in Betracht gezogen werden. Die Arithmetik bedarf deren nur vier: Addition, Subtraction, Multiplication, Division. Das Zeichen der Addition ist $+$, das der Subtraction $-$, das der Multiplication $\times$ oder $\cdot$ oder bloſse Nebeneinanderstellung der beiden zu verknüpfenden Gröfsen, das der Division : oder der Bruchstrich. Es giebt keine allgemeine Definition für diejenigen Verknüpfungen, welche mit den Namen Addition oder Multiplication belegt werden; diese Bezeichnungen werden vielmehr nur nach gewissen formalen Gesichtspunkten angewendet (vgl. III. 16). — Wenn nun für jede der vier Rechnungsarten die Forderung 4) als erfüllt erwiesen ist, so wird fernerhin nur eine solche Verknüpfung der Gröfsen $a\,b\,c\ldots$ als eindeutig bezeichnet, deren Ergebnisse sich nicht ändern, wenn die beiden zusammentretenden Gröfsen durch ihnen gleiche ersetzt werden.

So lange als der vierten Forderung nicht in dem etwa beabsichtigten Umfange Genüge geleistet ist, hat man die Unterscheidung von gleichen Gröfsen, wenn sie überhaupt möglich ist, zu beachten. Wenn das aber geschehen ist, so kann man in allen mittelst der bezüglichen Rechenzeichen gebildeten Ausdrücken und Formeln für eine Gröfse jede ihr gleiche setzen, was demnach als eine selbstverständliche Erweiterung der vorzutragenden Sätze angesehen werden darf.

3. Wenn von je zwei ungleichen Gröfsen a b die eine als die gröfsere von der andern als der kleineren unterschieden werden soll, so müssen auch dafür eigene Definitionen aufgestellt werden. Die Prädicate „gröfser, kleiner“ dürfen nur so ertheilt werden, dafs kein Verstofs eintritt gegen solche Sätze, welche bei anschaulich ausführbarer Vergleichung beobachtet werden. Es können aber diese Sätze formal zurückgeführt werden auf die folgenden, welche somit notwendige Bedingungen darstellen, denen die Definitionen der gröfseren und kleineren Gröfse zu entsprechen haben.

1) Wenn nach der einen Definition $a > b$, so mufs nach der anderen $a < b$ sein und umgekehrt.

2) Von je zwei ungleichen Gröfsen mufs die eine als die gröfsere, die andere als die kleinere erklärt sein. D. h.

die unter den Gröfsen $a\,b\,c\ldots$ aufgestellte Disjunction: gleich, gröfser, kleiner mufs sich auf alle Paare $a\ b$ erstrecken, d. i. vollständig sein.

3) Wenn $a = b\ \ b > c$, so mufs $a > c$ sein.

4) Wenn $a > b\ \ b > c$, so mufs $a > c$ sein.

Daraus ergeben sich in der That die übrigen vier Sätze über die Vergleichung von zwei Gröfsen $a\ c$, deren Beziehungen zu einer dritten b bekannt sind. — a) „Neben $a < b$ $b = c$ ist $a < c$". — Denn aus $c = b\ \ b > a$ folgt nach 3) $c > a$ also nach 1) $a < c$. Auf dieselbe Art findet man aus 4): b) „Neben $a < b\ \ b < c$ ist $a < c$". c) Dafs „wenn $a = b$ $b < c\ \ a < c$ ist", wird indirect bewiesen. Wäre nämlich $a \geqq c$, so hätte man simultan $a > b$, was der Voraussetzung widerspricht. Daraus folgt wie a) aus 3) d) „Wenn $a > b$ $b = c$, so ist $a > c$".

Wenn zwischen zwei Gröfsen mehr als eine eingeschaltet ist, so schafft man zunächst die Gleichungen weg. Fehlen aber solche, so ist die mittelbare Vergleichung nur in der folgenden Form möglich: „Wenn die entsprechenden Ungleichungen $a \gtrless b$, $b \gtrless c \ldots\ldots y \gtrless z$ bestehen, so hat man auch $a \gtrless z$."

Die Erfüllung der vorstehenden Forderungen berechtigt jedoch noch nicht dazu, die in Rede stehenden Definitionen zuzulassen. Vgl. III. 15. Es tritt jedenfalls noch die folgende hinzu:

5) „Wenn $a > a'\ \ b > b'$, so darf die Summe $a + b$ weder kleiner als $a' + b$, noch kleiner als $a + b'$ sein."

Es springt in die Augen, dafs wenn die Forderungen 1)—5) erfüllt sind, sie es auch noch bleiben, wenn man die Prädicate „gröfser, kleiner" vertauscht. Eine allgemeine hier entscheidende Bedingung läfst sich jedoch nicht formuliren.

4. Es wurde bereits angedeutet, dafs die Begriffe „gleich, gröfser, kleiner" aus der sinnlichen Wahrnehmung stammen. Wird die Vergleichung und Verknüpfung von Gröfsen anschaulich vollzogen, so erscheinen die Forderungen von Nr. 3 und 4 unmittelbar erfüllt. In der That führt Euclid einen Theil dieser Sätze als *κοιναὶ ἔννοιαι* auf, die eines Beweises nicht bedürfen (s. V. 1). Die Vergleichungen, die in der

Mathematik vorzunehmen sind, lassen jedoch häufig nur die formale Auffassung zu. Willkürlich ersonnene Dinge einer Art werden verglichen nach einem von Fall zu Fall festzusetzenden Verfahren, wobei nur auf die obigen Forderungen Rücksicht zu nehmen ist. Dafs gerade sie aufgestellt sind, hat offenbar darin seinen Grund, dafs aus ihnen die als Corollare bezeichneten Sätze mit Notwendigkeit hervorgehen.

Es ist gewifs merkwürdig, dafs schon im 5. Buche der Euclid'schen Elemente das soeben erwähnte Verfahren benutzt ist, um eine neue Art abstracter Gröfsen, die Verhältnisse, einzuführen. Unter dem überwältigenden Eindrucke des algebraischen Formalismus wurde in den letzten Jahrhunderten diese Euclid'sche Methode nicht gehörig gewürdigt; sie hätte vor den bei Aufstellung der unendlich kleinen Gröfsen begangenen Irrthümern bewahren können.

Die Unterordnung mehrerer Begriffe unter einen allgemeineren gilt in jeder Wissenschaft als ein Fortschritt. Mit Recht betrachten wir daher gegenwärtig als specielle Fälle der Gleichheit (ἰσότης): die ταυτότης oder ὁμοίοτης der Euclid'schen Verhältnisse, die Aequivalenz der Flächen nach Legendre, die Aequipollenz der Strecken nach Bellavitis. Es wird in jedem dieser Fälle nur die Vergleichung an einer andern Art von Objecten vollzogen.

5. Unter den Begriff der Gröfse fallen die verschiedenen Arten von Zahlen. Der Zahlbegriff ist im Laufe der Zeiten schrittweise erweitert worden. Bei den Alten auf die natürliche Zahl beschränkt, wurde das Wort Zahl in der neueren Zeit (z. B. von Newton und noch von Cauchy) nur im Sinne von absoluter Zahl gebraucht. Gegenwärtig sind die Bezeichnungen „negative, reelle, complexe Zahl" schon in weiten Kreisen verbreitet.

Ein Zahlensystem ist ein System von Gröfsen, welche sich mit Hilfe einer endlichen Anzahl von Zeichen, deren jedes beliebig oft verwendet werden darf, darstellen lassen. Dasselbe heifst geschlossen, wenn die Verknüpfungen unter den ihm angehörigen Zahlen wieder auf solche Zahlen führen.

Ein Gröfsensystem wird durch ein Zahlensystem dargestellt, wenn es möglich ist, jeder Gröfse eine Zahl des Systemes zuzuordnen und umgekehrt. Die hierzu erforderliche Regel mufs jedenfalls so beschaffen sein, dafs gleichen Gröfsen gleiche Zahlen entsprechen und umgekehrt. — Solche Gröfsen kann man Zahlgröfsen nennen. Wir wollen dafür

die Bezeichnung „Gröfse“ so lange beibehalten, als von der soeben erwähnten Darstellung derselben abgesehen wird.

6. Ausgehend von den natürlichen Zahlen gelangt man zunächst zu dem geschlossenen Systeme der rationalen Zahlen, welches noch einer zweimaligen, dann aber keiner ferneren Erweiterung in dem Sinne fähig ist, dafs das System geschlossen und die Gesammtheit der Rechnungsregeln erhalten bleibt. So werden wir zuerst zum System der reellen, hernach zu dem der gemeinen complexen Zahlen geführt, dessen Entwickelung die eigentliche Aufgabe der allgemeinen Arithmetik bildet. Hierbei kann man sowol analytisch als synthetisch vorgehen. Wie man es auch machen mag, stets lassen sich in dieser Entwickelung zwei scharf getrennte Stufen unterscheiden. Die synthetische Darstellung schreitet von den discreten zu den stetigen Gröfsen fort. Bei der analytischen gehen wir, nachdem jede rationale Zahl durch eine endliche Anzahl von Zeichen erklärt ist, dazu über, eine unbegrenzte, aber gesetzmäfsig fortschreitende Folge solcher Zahlen in gewissen Fällen durch ein Zeichen auszudrücken. Man hat diesen Vorgang als die Einführung des Unendlichen in die reine Mathematik bezeichnet und ihn als den eigentlichen Wendepunkt in der systematischen Entwickelung derselben erklärt. In der That bieten, nachdem die Lehre von den irrationalen Zahlen begründet ist, alle anderen Grenzprocesse keine theoretische Schwierigkeit mehr dar. Besonders enge schliefst sich daran die Lehre von den unendlichen Reihen, so dafs ihre Aufnahme in diese Vorlesungen passend erschienen ist. Zugleich sind wir dadurch in Stand gesetzt, die Behandlung jener elementaren Functionen, welche in der allgemeinen Arithmetik von jeher betrachtet worden sind, strenge d. h. weder populär, noch aphoristisch durchzuführen.

7. Das Hauber'sche Theorem über die Umkehrbarkeit der Sätze.[4]) Da bei mathematischen Untersuchungen häufig die Frage nach der Umkehrung von Sätzen auftritt, so ist es zweckmäfsig, ein für alle Male einen Fall hervorzuheben, in welchem sie stets zulässig ist.

Satz. „Bilden die Fälle $A, A' \ldots A^{(n)}$ eine vollständige Disjunction d. h. die Gesammtheit der Möglichkeiten,

bedeuten ferner $B, B' \ldots B^{(n)}$ eben so viele von einander verschiedene Fälle und weifs man, dafs wenn A eintritt, B zutrifft; wenn A', so $B' \ldots$; wenn $A^{(n)}$, so $B^{(n)}$; so kann man schliefsen, dafs aus B umgekehrt A, aus B' $A' \ldots$, aus $B^{(n)}$ $A^{(n)}$ folgt."

Der Satz ist leicht zu beweisen. Dem B mufs einer der Fälle $A, A' \ldots A^{(n)}$ entsprechen wegen ihrer Vollständigkeit. Es kann aber weder $A', \ldots$ noch $A^{(n)}$ sein, indem aus diesen ja beziehentlich $B' \ldots B^{(n)}$ folgen. Also mufs dem B A entsprechen. — Auf ähnliche Weise wird geschlossen, dafs auch die Disjunction $B, B' \ldots B^{(n)}$ vollständig sein mufs.

Offenbar gilt der Satz auch dann noch, wenn die Reihen $A, A' \ldots$ und $B, B' \ldots$ unbegrenzt sind und jedem A ein und nur ein B entspricht. — Ein Beispiel hierzu findet man II. 10.

II. Abschnitt.

Die natürlichen Zahlen.

1. Das Zählen setzt die Vergleichung der Vielheiten voraus. — Unter Vielheit versteht man eine Menge von unter sich gleichen Gegenständen d. h. den Inbegriff von disjuncten Dingen, deren Verschiedenheiten jedoch nicht beachtet werden, ohne Rücksicht auf ihre Anordnung.

„Zwei Vielheiten heifsen einander gleich, wenn sich jedem Dinge der ersteren je eines der letzteren zuordnen läfst und keines von dieser unverbunden bleibt."

„Gröfser von zwei Vielheiten heifst diejenige, von welcher, nachdem jedes Ding der anderen (kleineren) je einem von ihr zugeordnet ist, noch einige Dinge (ein Rest) unverbunden bleiben."

Zunächst erhebt sich die Frage, ob die in den beiden Definitionen vorausgesetzten Beziehungen zweier Vielheiten einander ausschliefsen.[1]) D h. hat man z. B. gefunden, dafs die in einer Menge enthaltenen Dinge sich mit denen einer anderen ohne Rest paaren lassen, wird dann nach Aufhebung der Paarung der zweierlei Dinge und Wiederholung des Versuches das nämliche Resultat sich ergeben oder werden vielleicht jetzt von der einen von beiden Mengen einige Dinge unverbunden bleiben? Dafs notwendig ersteres eintreten mufs, kann so geschlossen werden Die Dinge der ersten Vielheit mögen in der Anordnung, welche sie am Ende des ersten Versuches einnehmen, mit A, die der zweiten mit B bezeichnet werden. Wir wollen diese Anordnungen dadurch fixiren, dafs wir an die in jedem Paare befindlichen Gegenstände ein und dasselbe, übrigens willkürliche Zeichen z. B. α, β, γ . . . anbringen. A', B' seien die Dinge der ersten und zweiten Vielheit in den Anordnungen nach Schlufs des zweiten Versuches, deren jede mit Hilfe der soeben eingeführten Zeichen beschrieben werden kann. Bringen wir nun die erste Menge in die Anordnung A', während die zweite in der ursprünglichen B belassen wird, so müssen die beiderlei Dinge wieder ohne Rest gepaart sein. Das ist sicher

richtig, wenn die Anordnung A' aus A dadurch hervorgeht, dafs ein und nur ein Paar von Dingen, z. B. die mit α β bezeichneten, ihre Plätze wechseln. Denkt man sich nämlich die übrigen dasselbe Zeichen tragenden Dinge fest mit einander verbunden und verknüpft β in A mit α in B, so bleibt in A noch α, in B noch β frei, welche man schliefslich noch zu verbinden hat. Man kann aber jede beliebige Anordnung A' aus A dadurch ableiten, dafs nacheinander je zwei Dinge vertauscht werden. — Die nochmalige Anwendung desselben Schlusses zeigt, dafs auch in den Anordnungen A' B' die Dinge der ersten mit denen der zweiten Art ohne Rest gepaart seien.

Ebenso sind auch die übrigen Bedingungen in I. 2, 3 erfüllt.

2. Die natürliche (ganze absolute) Zahl. Das gemeinsame Merkmal aller Vielheiten, welche einer bestimmten gleich sind, wird durch ein Grundzahlwort ausgedrückt. Man vergleicht die Vielheiten mit den durch beständige Wiederholung eines Striches: 1 (eine Eins, ein Einer) entstandenen: 11, 111 ... (diese Zeichen sind für die Zahlen eilf, einhunderteilf ... erst später einzuführen). Jedes der wiederholten Setzung fähige Ding heifst eine benannte Einheit, nur 1 die Einheit schlechtweg. Die natürliche Zahl ist eine Vielheit von Einheiten d. i. Einern. Jede andere Vielheit heifst eine benannte Zahl. Jeder solchen Vielheit entspricht nämlich eine ihr gleiche natürliche Zahl, welche gefunden wird, indem man von den der Vielheit angehörigen Einheiten eine nach der andern herausgreift, sie mit dem Striche 1 abbildet und hierauf bei Seite legt. Unter sich gleichen Vielheiten entsprechen gleiche Zahlen, der gröfseren Vielheit die gröfsere Zahl.

Von gleichen natürlichen Zahlen kann man nur insofern sprechen, als man sich irgend eine solche Zahl, wie jeden Begriff, beliebig oft gesetzt denken kann. Arithmetisch besteht zwischen ihnen kein Unterschied, so dafs die Sätze 4) in Nr. 4 und 6, 1) in Nr. 5 und 8 trivial sind, während sie für andere Zahlenarten sich nicht von selbst verstehen, da gleiche Zahlen vermöge ihrer Definition verschiedenen arithmetischen Ausdruck haben können (z. B. $^2/_3$ und $^4/_6$).

In diesem Abschnitte bedeutet „Zahl" stets soviel als „natürliche Zahl." Solche Zahlen werden wir im Folgenden mit $a, b, c \ldots$ bezeichnen.

3. Addition der natürlichen Zahlen. Es seien $A, B, C \ldots$ Vielheiten einer Benennung, $A', B', C' \ldots$ des-

gleichen. Fügt man B zu A, so entsteht eine neue Vielheit, welche neben den Einheiten von A die von B enthält und daher gröfser als A ist. Man bezeichnet sie als die Summe der Glieder A und B: $A + B$. Sie ist gleich der Summe $B + A$, sowie $A' + B'$, wenn $A = A'$ $B = B'$. Ist $A > A'$ $B = B'$, so hat man $A + B > A' + B'$. — Man findet ferner $A + (B + C) = (A + B) + C$; denn es befinden sich beiderseits die Einheiten von A B C und nur diese. Auf dieselbe Art ergiebt sich allgemein das erste, associative Gesetz der Verknüpfung $+$ der Vielheiten: „Man erhält eine der Summe $A + B + C + \ldots$ d. i. dem Resultate der fortschreitenden Addition der Vielheiten $A\,B\,C\ldots$ (vgl. I. 2) gleiche Vielheit, in welcher Weise auch die Glieder $A\,B\,C\ldots$ vorher, ohne diese Anordnung abzuändern, in Gruppen (Partialsummen) vereinigt worden sind" z. B.

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= A + (B + C) + D \\ = A + B + (C + D) &= (A + B) + (C + D) \\ = A + (B + C + D) &= (A + B + C) + D \end{aligned}$$

und weiter das zweite, commutative Gesetz derselben: „Wie man auch in der Summe $A + B + C + \ldots$ die Glieder anordnen mag, stets erhält man gleiche Vielheiten." Z. B.

$$\begin{aligned} A + B + C = A + C + B = B + A + C = B + C + A \\ = C + A + B = C + B + A. \end{aligned}$$

Endlich ergiebt sich noch, dafs $A + B + C + \ldots$ gröfser ist als jedes Glied oder jede aus einigen derselben gebildete Summe; dafs wenn $A = A'$, $B = B'$, $C = C' \ldots$

$$A + B + C + \ldots = A' + B' + C' + \ldots;$$

dafs aber die erstere Summe die gröfsere Vielheit darstellt, wenn mindestens eines ihrer Glieder gröfser ist als das gleichlautende der zweiten.

Entspricht den gleichen Vielheiten $A' = A$ die Zahl a, den gleichen Vielheiten $B' = B$ die Zahl b, so heifst die den gleichen Vielheiten $A' + B' = A + B$ entsprechende Zahl die Summe dieser Zahlen: $a + b$ [Eucl. El. V. prop. 2]. Oder einfacher: „Unter der Summe $a + b$ versteht man eine Zahl, welche neben den Einheiten von a die von b enthält."

Demnach ergeben sich die Regeln über die Addition der natürlichen Zahlen, wenn man im Vorstehenden statt der grofsen Buchstaben die kleinen setzt. Wir heben noch diejenigen heraus, aus welchen sich nach den Untersuchungen des nächsten Abschnittes die übrigen auf formalem Wege ableiten lassen. Es sind die folgenden sechs:

1) Die Addition der natürlichen Zahlen ist eine eindeutige Verknüpfung von je zweien derselben.

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3) $a + b = b + a$.

4) Aus $a = a'$ folgt $a + b = a' + b$.

5) $a + b > a$.

6) Aus $a > a'$ folgt $a + b > a' + b$.

Nunmehr können die Zahlen selbst als Summen dargestellt werden:

$$2 = 1 + 1 \qquad 3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1$$

u. s. w. Die Gleichung 2) des associativen Gesetzes liefert ein recurrirendes Verfahren zur Bestimmung einer jeden Summe. Um z. B. $5 + 4$ zu ermitteln, hat man

$$5 + 4 = 5 + (3 + 1) = (5 + 3) + 1$$
$$5 + 3 = 5 + (2 + 1) = (5 + 2) + 1$$
$$5 + 2 = 5 + (1 + 1) = (5 + 1) + 1.$$

Es ist aber $5 + 1 = 6$, also

$$5 + 2 = 6 + 1 = 7$$
$$5 + 3 = 7 + 1 = 8$$
$$5 + 4 = 8 + 1 = 9.$$

4. Subtraction der natürlichen Zahlen. — Wenn die Vielheit A gröfser ist als B, so bleibt bei Vergleichung der beiden ein Rest D von den in A enthaltenen Einheiten unverbunden. Man hat $B + D = A$. Eine D gleiche Vielheit ergiebt sich als Rest bei Vergleichung der Vielheiten $A = A'$ $B = B'$. Somit folgt der Satz:

„Ist die Zahl $a > b$, so giebt es eine und (wegen des 6. Satzes in Nr. 3) nur eine Zahl d, welche für x gesetzt, die Gleichung $b + x = a$ befriedigt." — „Im Falle dafs $a \leqq b$, hat diese Gleichung (zufolge des 5. Satzes in Nr. 3) keine Lösung."

a heifst der Minuend, b der Subtrahend, d die Differenz oder der Unterschied derselben. Sie wird mit $a - b$ bezeichnet, so dafs die Formel besteht:

$$b + (a - b) = (a - b) + b = a.$$

Zunächst bemerken wir die folgenden Sätze. Die darin vorkommenden Differenzen sind als möglich vorauszusetzen oder nachzuweisen.

1) „Gleiche Zahlen von gleichen subtrahirt geben gleiche Unterschiede."

2) „Aus $a + b = a + b'$ folgt $b = b'$."

3) „Aus $a - b = a' - b$ folgt $a = a'$; aus $a - b = a - b'$ folgt $b = b'$."

4) „Je nachdem a gleich, gröfser, kleiner als $b - c$, ist $a + c$ gleich, gröfser, kleiner als b und umgekehrt."

5) Je nachdem $a - b$ gleich, gröfser, kleiner als $a' - b'$, ist $a + b'$ gleich, gröfser, kleiner als $a' + b$ und umgekehrt." — Der erste Theil durch Addition von $b + b'$ auf beiden Seiten der Relationen, der zweite nach I. 7.

6) $(a + b) - b = a$.

7) $a - (a - b) = b \quad (a > b)$.

8) $(a + m) - (b + m) = a - b \quad (a > b)$.

9) $(a - m) - (b - m) = a - b \quad (a > b > m)$.

10) „Wenn $a > a' > b$, so hat man $a - b > a' - b$."

11) „Wenn $a > b' > b$, so hat man $a - b > a - b'$."

12) „Wenn $a > a' > b' > b$, so hat man $a - b > a' - b'$."

Die Beweise von 10) und 11) entweder durch Auflösung der Zahlen in ihre Einheiten oder indirect aus den Sätzen 4) und 6) in Nr. 3. Aus ihnen ergiebt sich dann der letzte Satz.

5. Berechnung der Aggregate. Ein Ausdruck, der aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, worunter wir uns zunächst natürliche Zahlen vorstellen, nur mittelst der Operationszeichen + und − gebildet ist, wird ein Aggregat und nach der Anzahl seiner Glieder ein Binom, Trinom, ... Polynom genannt. Dabei wird angenommen, dafs er von links nach rechts fortschreitend zu berechnen sei d. h. dafs zunächst die erste Zahl gemäfs des ersten Operationszeichens mit der zweiten, dann das Ergebnis ge-

mäfs des zweiten Zeichens mit der dritten zu verknüpfen sei u. s. w., alle einzelnen Schritte als möglich vorausgesetzt. So bedeutet

$$a + b - c = (a + b) - c$$
$$a - b + c = (a - b) + c$$
$$a - b - c = (a - b) - c,$$

wobei bez. vorauszusetzen ist

$$a + b > c, \qquad a > b, \qquad a > b + c.$$

Das Endresultat wird angegeben durch den folgenden Satz: „Ein Aggregat ist gleich dem Unterschiede: Summe des ersten Gliedes und aller, vor denen das Zeichen + steht, weniger der Summe aller Glieder, vor denen das Zeichen — steht." Der Satz ergiebt sich durch wiederholte Anwendung der folgenden besonderen Fälle desselben:

13) $(a - b) + c = (a + c) - b \quad (a > b),$

14) $(a - b) - c = a - (b + c) \quad (a > b + c),$

die leicht zu beweisen sind, entweder durch Auflösung der Zahlen in ihre Einheiten oder durch formale Verification. Handelt es sich z. B. um Formel 14), so weifs man nach Annahme, dafs $a > b \;\; a - b > c$; somit ist $(a - b) - c$ eine Zahl y und man hat

$$c + y = a - b \quad b + c + y = a \quad y = a - (b + c).$$

„Kommen in dem Ausdrucke gleiche Glieder hinter den Zeichen + und — vor, so heben sie sich auf."

Aus dem vorstehenden Satze folgt, dafs das Endresultat eines Aggregates von der Aufeinanderfolge seiner Glieder nicht abhängt, vorausgesetzt nur, dafs auch bei der neuen Anordnung derselben ein möglicher Ausdruck herauskommt, was nicht immer der Fall ist. Es ist z. B. $7 + 2 - 8 = 9 - 8 = 1$, $7 - 8 + 2$ hat jedoch keinen Sinn.

Die Aufgabe einen Ausdruck, dessen Glieder sämmtlich oder theilweise Aggregate sind, in einen fortschreitend zu berechnenden zu verwandeln, wird durch die Regel gelöst: „Steht ein Aggregat am Anfange des Ausdruckes oder hinter

einem +, so läfst man die Klammern weg; steht es hinter einem —, so ist bei Entfernung der Klammern vor das erste Glied desselben das Zeichen — zu setzen und es sind vor allen folgenden + und — zu vertauschen. Dabei ist jedoch im zweiten Falle vorauszusetzen, dafs der so erhaltene Ausdruck möglich sei, was nicht immer zutrifft."

Der Beweis wird geliefert (vgl. III. 8) mittelst der Formeln 13) und 14) der folgenden, 16) und 17). Es ist

$$a - (b - c) = a - b + c \qquad (a > b > c),$$

was sich nach 13) ergiebt aus

15) $$a - (b - c) = (a + c) - b \qquad (a + c > b),$$

falls $a > b$. Wenn $a + c > b$ und $a < b$, so ist $a - (b - c)$ eine Zahl, $a - b + c$ ohne Sinn.

Die Formeln

16) $$(a - b) + (a' - b') = (a + a') - (b + b') \qquad (a > b \quad a' > b')$$

17) $$(a - b) - (a' - b') = (a + b') - (a' + b) \qquad (a > b \quad a' > b' \quad a + b' > a' + b)$$

lassen sich leicht verificiren. Setzt man

$$(a - b) - (a' - b') = y$$

— der Ausdruck hat nach den angegebenen Bedingungen einen Sinn —, so folgt

$$a - b = y + (a' - b'),$$

also wenn man beiderseits $b + b'$ addirt

$$a + b' = y + a' + b \qquad y = (a + b') - (a' + b).$$

6. Multiplication der natürlichen Zahlen. Die Summe von b Gliedern A, wo A eine Einheit oder Vielheit sein kann, wird das b-fache von A genannt und mit bA bezeichnet. A heifst der Multiplicand, b der Multiplicator. Wenn auch die erstere eine natürliche Zahl a ist, so betrachtet man das b-fache von a als Ergebnifs einer Verknüpfung der Zahlen a b, wofür die Zeichen $\times$ und $\cdot$ gebraucht werden:

$$ba = a \times b = a \cdot b$$

und bezeichnet es als das Product aus a in b, jede der Zahlen a b als einen Factor desselben. Man setzt noch fest, dafs $a \cdot 1 = a$. — Vom Producte aus einer benannten Zahl A in eine natürliche b kann hier nicht die Rede sein, da Verknüpfungen nur unter gleichartigen Gröfsen stattfinden. bA ist also nun nicht als ein Product anzusehen.

Bei der Multiplication der natürlichen Zahlen treten zunächst die folgenden Regeln auf.

1) Sie ist eine eindeutige Verknüpfung von je zwei Zahlen.

2) Das Product $abc\ldots$ d. i. das Resultat der fortschreitenden Multiplication der Zahlen $abc\ldots$ ändert sich nicht bei vorhergehender Zusammenfassung der Factoren $abc\ldots$ in Partialproducte, wenn nur die vorgeschriebene Ordnung erhalten bleibt. Die Multiplication der natürlichen Zahlen gehorcht dem associativen Gesetze.

3) Diese Multiplication ist auch dem commutativen Gesetze unterworfen, d. h. das Product $abc\ldots$ ändert sich auch bei Vertauschung der Factoren nicht.

Es wird in III. 2 gezeigt werden, dafs diese beiden Sätze allgemein gelten, wenn die folgenden besondern Fälle derselben

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad a \cdot b = b \cdot a$$

bestehen. Sie sind leicht zu erweisen, der letztere, indem man b Summen $a = 1 + 1 + 1 + \ldots 1$, der erstere, indem man c Summen $ab = a + a + \ldots a$ (b-mal) untereinander schreibt.

4) „Gleiche Zahlen mit gleichen multiplicirt geben gleiche Producte."

5) „Wenn $b > 1$, so ist $a \cdot b > a$." (Nach dem 5. Satze in Nr. 3.)

6) „Aus $a > a'$ folgt $a \cdot b > a' \cdot b$" (Nach dem 6. Satze in Nr. 3.) Daraus ergiebt sich:

7) „Aus $a > a'$ $b > b'$ folgt $a \cdot b > a' \cdot b'$."

7. Aufserdem besteht bei der Multiplication der natürlichen Zahlen das distributive Gesetz. Um die Formeln

desselben so einfach als möglich anschreiben zu können, ist eine Uebereinkunft darüber nöthig, wie man Ausdrücke, welche neben den Gröfsen nur Rechenzeichen enthalten zu verstehen oder wie man die fehlenden Klammern zu ergänzen habe. Bisher ist die Methode der von links nach rechts fortschreitenden Berechnung befolgt worden vgl. I. 2 und II. 5. Wir werden sie immer voraussetzen, sobald der Ausdruck nur Rechenzeichen einer Stufe enthält. Dabei sind die Addition und die Subtraction als Verknüpfungen oder Operationen erster, die Multiplication und die Division als solche zweiter Stufe bezeichnet. Wenn in einem klammerlosen Ausdrucke Rechenzeichen verschiedener Stufe vorkommen, so wird nicht immer nach diesem Grundsatze vorgegangen. So bedeutet zwar $2 \cdot 3 + 1$ dasselbe wie $(2 \cdot 3) + 1$ d. i. 7, $1 + 2 \cdot 3$ dagegen nicht, wie man erwarten sollte, $(1 + 2) \cdot 3 = 9$, sondern das nämliche wie $2 \cdot 3 + 1$. Das diesen und ähnlichen Schreibweisen zu Grunde liegende Princip ist folgendermaafsen zu formuliren: Kommen Operationen verschiedener Stufen ohne Klammer zusammen, so ist stets diejenige Rechnungsart zuerst vorzunehmen, welche zur höheren Stufe gehört.[2]) Demnach ist $a \,.\, c + b \cdot c$ gleichbedeutend mit $(a \cdot c) + (b \cdot c)$ u. s. f.

Nunmehr erhalten die erwähnten distributiven Formeln folgende Gestalt.

8) „$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ und (vermöge des commutativen Gesetzes) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$." — Der erste Teil folgt aus der Umformung

$$(a + b) \cdot c = (a \overset{1}{\dot{+}} b) + (a \overset{2}{\dot{+}} b) + \ldots + (a \overset{c}{\dot{+}} b)$$

$$= (\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots + \overset{c}{a}) + (\overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \ldots + \overset{c}{b}) = a \cdot c + b \cdot c.$$

Man benutzt den Satz (vgl. III. 6), um das Product zweier oder mehrerer Summen zu entwickeln: „Das Product zweier Summen ist gleich der Summe der Producte aus jedem Gliede des einen Factors in jedes des anderen" z. B.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

„Um das Product mehrerer Summen zu erhalten, bildet man alle Producte von je einem Gliede des ersten, je einem des zweiten ... je einem des letzten Factors und addirt sie."

9) „Ist $a > b$, so hat man

$$(a - b) \cdot c = c \cdot (a - b) = a \cdot c - b \cdot c."$$

Der Satz ergiebt sich durch wiederholte Anwendung der Formel 16) in Nr. 5. — Hieraus folgt, dafs wenn $a > b$ $c > d$

$$\begin{aligned}(a - b) \cdot (c - d) &= a \cdot (c - d) - b \cdot (c - d) \\ &= (a \cdot c - a \cdot d) - (b \cdot c - b \cdot d) \\ &= (a \cdot c + b \cdot d) - (a \cdot d + b \cdot c) \\ &= a \cdot c - a \cdot d + b \cdot d - b \cdot c\end{aligned}$$

und somit auch, dafs

$$a \cdot c + b \cdot d > a \cdot d + b \cdot c$$

sein mufs. — Es sind höchstens acht und mindestens sechs verschiedene Anordnungen der vier Glieder des vorstehenden Ausdruckes zulässig; denn die Aggregate

$$a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d \quad a \cdot c - b \cdot c - a \cdot d + b \cdot d$$

haben manchmal keinen Sinn.

8. Division der natürlichen Zahlen. Wir legen uns nun die Aufgabe vor, eine Zahl x zu bestimmen, welche mit einer gegebenen b multiplicirt, ein gegebenes Product a liefern soll: $b \cdot x = x \cdot b = a$.

Zunächst bemerken wir den folgenden Satz: „Wenn $a > b > 1$, so ist a entweder ein Vielfaches von b oder a liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Vielfachen von b. Im ersten Falle hat man $a = qb$, im zweiten $a = qb + r$, wo r eine Zahl kleiner als q ist." — Denn unter den a Zahlen b, $2b$ ... ab, von denen die erste kleiner, die letzte gröfser als a ist, kommt a entweder vor oder nicht. Im letzteren Falle müssen wir die Reihe $1, 2 \ldots a$ durchlaufend, zu einer Zahl $1 \leqq q < a$ gelangen, sodafs $qb < a < (q + 1)\, b$.

Die Gleichung $b \cdot x = a$ hat nur dann eine (und zwar nach dem 6. Satze in Nr. 6 nur eine) Auflösung nach x, wenn a ein Vielfaches von b ist. Man bezeichnet sie mit $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ und nennt sie Quotient, a Dividend, b

Divisor. Ist a kein Vielfaches von b, so hat die Gleichung $b \cdot x = a$ keine Auflösung; die Division geht nicht auf und es bleibt der Rest r.

Wenn wir in den Sätzen 1)—17) in Nr. 4 und 5 die Operationszeichen $+$ $-$ bez. durch $\cdot$: ersetzen und, soweit es nöthig ist, annehmen, dafs die darin erscheinenden Quotienten möglich d. i. natürliche Zahlen seien; so erhalten wir Sätze über die Quotienten. In der That beruhen die formalen Beweise der genannten Sätze lediglich auf solchen Eigenschaften der Summe, welche auch dem Producte zukommen, und auf der Eindeutigkeit der Differenz. Im folgenden Verzeichnisse sind die neuen Sätze mit denselben Nummern versehen, wie die ihnen a. a. O. entsprechenden.

1) Gleiche Zahlen durch gleiche dividirt geben gleiche Quotienten.

2) Aus $a \cdot b = a \cdot b'$ folgt $b = b'$.

3) Aus $a : b = a' : b$ folgt $a = a'$, aus $a : b = a : b'$ folgt $b = b'$.

4) Je nachdem a gleich, gröfser, kleiner als die Zahl $b : c$, ist ac gleich, gröfser, kleiner als b und umgekehrt.

5) Wenn $a : b$ $a' : b'$ Zahlen sind, so ist, je nachdem $a : b$ gleich, gröfser, kleiner als $a' : b'$, $a \cdot b'$ gleich, gröfser, kleiner als $a \cdot b'$ und umgekehrt.

6) $(a \cdot b) : b = a$.

7) $a : (a : b) = b$, wenn $a : b$ eine Zahl ist.

8) $(a \cdot m) : (b \cdot m) = a : b$, wenn $a : b$ eine Zahl ist.

9) $(a : m) : (b : m) = a : b$, unter $a : b$ $a : m$ $b : m$ Zahlen verstanden.

Wenn $a : b$ $a' : b'$ (bez. $a' : b$ $a : b'$) Zahlen bedeuten, so hat man

10) Neben $a > a'$ $a : b > a' : b$.

11) Neben $b < b'$ $a : b > a : b'$.

12) Neben $a > a'$ $b < b'$ $a : b > a' : b'$.

13) $(a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b$.

14) $(a : b) : c = a : (b \cdot c)$.

15) $a : (b : c) = (a \cdot c) : b$.

16) $(a:b)\cdot(a':b') = (a\cdot a'):(b\cdot b')$.

17) $(a:b):(a':b') = (a\cdot b'):(a'\cdot b)$.

Die letzten Formeln sind so zu verstehen: 13) Ist $a:b$ eine Zahl, so auch $(a\cdot c):b$ und sie ist gleich $(a:b)\cdot c$ u. s. w. Ueberhaupt genügt, die linke Seite der Gleichungen als möglich vorauszusetzen.

Endlich sind noch die folgenden distributiven Formeln zu erwähnen

$$a:m + b:m = (a+b):m$$
$$a:m - b:m = (a-b):m.$$

$a:m$ $b:m$ müssen natürliche Zahlen und in der zweiten $a > b$ sein. — Die erste kann auf eine Summe von beliebig vielen Gliedern ausgedehnt werden (vgl. III. 6).

9. Unter der Potenz a^n versteht man das Product aus n gleichen Factoren a, unter a^1 die Basis a selbst. Aus dem Begriffe der Potenz ergeben sich die in VIII. 1, 2 angeführten Sätze, welche hier nur für den Fall, dafs auch die Basis eine natürliche Zahl ist, benöthigt werden. Auch mufs a. a. O. in (III) vorläufig $a > b$ sein. — Von diesen Sätzen werden wir zunächst vornehmlich den folgenden gebrauchen: „Wenn $m > 1$, so ist $(1+d)^m > 1 + md$." Somit kann m so gewählt werden, dafs $(1+d)^m$ irgend eine gegebene Zahl a überschreitet.

Das Potenziren (und seine Umkehrungen: das Radiciren und Logarithmiren) werden häufig als Operationen dritter Stufe bezeichnet. Diese Auffassung ist keineswegs die einzig mögliche (vgl. III. 17), jedoch immer dann anzuwenden, wenn es sich um die Deutung von Ausdrücken handelt, welche aus beliebigen Gröfsen nur mit Hilfe von Operationszeichen gebildet sind. Es gelten nämlich auch, wenn Operationen der dritten Stufe vorkommen, die beiden Conventionen von Nr. 7 — mit der einzigen Ausnahme, dafs unter a^{b^c} nicht $(a^b)^c = a^{bc}$, sondern $a^{(b^c)}$ zu verstehen ist.

Ein Ausdruck, der aus beliebigen Gröfsen in endlicher Anzahl nur mittelst Operationen zweiter und dritter Stufe gebildet ist, heifst Monom.

10. Die Zahlensysteme. Es sei e eine fest gewählte Zahl $\geqq 2$ und a eine beliebige Zahl $\geqq e$. Aus einer Bemerkung in Nr. 9 ergiebt sich, dafs a entweder eine Potenz von e ist — $a = e^m$ — oder zwischen zwei aufeinander folgenden Potenzen von e liegt — $e^m < a < e^{m+1}$. Nach Nr. 8 hat man im zweiten Falle a entweder gleich pe^m oder $pe^m + r$, wo $p < e$ und $r < e^m$ sein mufs. Auf ähnliche Art findet man, dafs wenn $r \geqq e$, r entweder gleich ist $p'e^{m'}$ oder $p'e^{m'} + r'$, wo $m' < m$

$$1 \leqq p' < e \qquad r' < e^{m'};$$

wenn $r' \geqq e$, r' entweder gleich ist $p''e^{m''}$ oder $p''e^{m''} + r''$, wo $m'' < m'$

$$1 \leqq p'' < e \qquad r'' < e^{m''}$$

u. s. f. Im ungünstigsten Falle ist

$$m' = m - 1 \qquad m'' = m - 2 \ldots,$$

so dafs man nach m-maliger Wiederholung des vorstehenden Schlusses bei einem Reste $r^{(m)} < e$ anlangt und nun findet

$$a = pe^m + p'e^{m-1} + p''e^{m-2} + \ldots + r^{(m)}.$$

Mit Hilfe von e Ziffern d. i. der Zeichen für die Zahlen von eins bis $e - 1$ und des Zeichens 0 (Null) dafür, dafs eines der Glieder der vorstehenden Summe vom zweiten an im Ausdrucke von a fehlt, läfst sich jede Zahl $a - e^m \leqq a < e^{m+1}$ — durch $m + 1$ Zeichen $[p\,p' \ldots p^{(m)}]$ anschreiben, da die Anzahl der Zeichen, die hinter einem von ihnen stehen, den Exponenten der Potenz von e angiebt, mit welcher dieses zu multipliciren ist. Die Ziffer 0 ist keine Zahl.

Schon aus I. 7 folgt, dafs umgekehrt jede Summe

$$b = qe^n + q'e^{n'} + q''e^{n''} + \ldots \qquad (n > n' > n'' > \ldots),$$

worin q, q', q'' ... Ziffern bedeuten, zwischen e^n und e^{n+1} liegen mufs. Direct ergiebt sich das durch die Bemerkung, dafs

$$e^n \leqq b \leqq (e-1)\,e^n + (e-1)\,e^{n-1} + (e-1\,e^{n-2} + \ldots + (e-1) = e^{n+1} - 1.$$

Daraus schliefsen wir noch, dafs es für jede Zahl a nur eine systematische Darstellung

$$a = pe^m + p'e^{m'} + p''e^{m''} + \ldots$$

giebt. Setzt man nämlich auch

$$a = qe^n + q'e^{n'} + q''e^{n''} + \ldots,$$

so mufs zunächst $n = m$ sein; denn man hat neben

$$e^m \leq a < e^{m+1} \qquad e^n \leq a < e^{n+1}$$

also sowohl $e^m < e^{n+1}$ als auch $e^n < e^{m+1}$. Hierauf schliefst man dafs $q = p$, da sowohl $pe^m \leq a < (p+1)e^m$ als auch $qe^m \leq a < (q+1)e^m$, also $p < q+1$ und $q < p+1$ ist. Nun ergiebt sich

$$p'e^{m'} + p''e^{m''} + \ldots = q'e^{n'} + q''e^{n''} + \ldots,$$

woraus auf ähnliche Art abgeleitet wird $n' = m'$ $q' = p'$ u. s. f.

Die Regeln über das Rechnen mit systematischen Zahlen sind unmittelbare Folgerungen aus den in Nr. 3—9 angeführten Sätzen.

11. Hilfssätze aus der Zahlentheorie.[3]) Wenn a ein Vielfaches von b ist, so heifst a theilbar durch b. Aus dem Begriffe des Vielfachen fliefsen unmittelbar die folgenden Sätze: „Ist a theilbar durch b, so auch das Product ac (auch nach 13) in Nr. 8). Ist a theilbar durch b, b durch c, so auch a durch c. Sind a und b durch eine Zahl c theilbar, so auch jede Zahl $ax \pm by$." — Nun kann man den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen a b ermitteln. Es sei $a > b$. Ist a durch b theilbar, so ist er b. Andernfalls hat man

$$a = qb + b' \qquad (b' < b),$$

wo b' theilbar ist durch jeden gemeinsamen Theiler von a b. Ist b ein Vielfaches von b', so auch a und es ist b' die gesuchte Zahl. Sonst hat man

$$b = qb' + b'' \qquad (b'' < b'),$$

worin b'' durch jeden gemeinsamen Theiler von a b theilbar

ist. Ist b' ein Vielfaches von b'', so auch b und a und es ist b'' die gesuchte Zahl; sonst hat man

$$b' = q''b'' + b''' \qquad (b''' < b'').$$

U. s. f. Da die Reste b', b'', b''' ... beständig abnehmen, so mufs die Reihe einmal abbrechen. Wenn der letzte Rest $b^{(n)} = 1$, so nennt man a b relative Primzahlen oder Zahlen ohne gemeinsamen Theiler. Wenn er gröfser als 1 ist, so ist er der gröfste gemeinsame Theiler von a b d. h. man hat

$$a = b^{(n)}a_1 \qquad b = b^{(n)}b_1,$$

wo a_1 b_1 relativ prim zu einander sein müssen.

Hauptsatz. Sind a b relative Primzahlen, so ist jeder gemeinschaftliche Theiler m der Zahlen ak b ein Theiler von k.

Denn aus den soeben erwähnten Gleichungen

$$a = qb + b' \qquad b = q'b' + b'' \qquad b' = q''b'' + b''' \ldots$$
$$b^{(n-2)} = q^{(n-1)}b^{(n-1)} + 1,$$

folgt

$$ak = qbk + b'k \qquad bk = q'b'k + b''k \qquad b'k = q''b''k + b'''k \ldots$$
$$b^{(n-2)}k = q^{(n-1)}b^{(n-1)}k + k,$$

woraus ersichtlich ist, dafs neben ak b auch

$$b'k, \quad b''k, \quad b'''k \ldots b^{(n-2)}k, \quad b^{(n-1)}k, \quad k$$

durch m theilbar sind.

Aus diesem Satze folgt: 1) Das Product zweier oder mehrerer Zahlen, deren jede relative Primzahl gegen eine Zahl b ist, ist gleichfalls relative Primzahl zu b.

2) Sind a b relative Primzahlen, so auch a^n b^n.

Jede Zahl, aufser 1, die nur durch 1 und durch sich selbst theilbar ist, heifst Primzahl; jede, die aufser diesen noch andere Theiler hat, zusammengesetzt — eine Bezeichnung, welche durch den Satz gerechtfertigt wird: „Jede zusammengesetzte Zahl läfst sich stets und nur auf eine Weise als Product einer endlichen Anzahl von Primzahlen darstellen.“ — Dividirt man nämlich eine vorgelegte Zahl $a > 1$ nach einander durch die Zahlen $2, 3 \ldots a - 1$, so

kann nur Folgendes eintreten. Entweder ist a durch keine derselben theilbar, also eine Primzahl oder es giebt darunter Theiler von a, deren kleinster p eine Primzahl sein muſs. Im zweiten Falle ermittelt man die Zahl $a' = a : p$ und schlieſst wie soeben: entweder ist a' eine Primzahl oder durch eine Primzahl $p' \geq 2$ theilbar. Im zweiten dieser Fälle sucht man die Zahl $a'' = a' : p'$, worüber Aehnliches gilt u. s. f. Da die Zahlen a, a', a'' ... beständig abnehmen, so muſs die Reihe einmal abbrechen. Somit erscheint a, wenn es nicht selbst Primzahl ist, als Product von Primzahlen $a = pp' \ldots$ — Und zwar ist das die einzig mögliche Zerlegung von a in Primfactoren. Denn angenommen, es sei überhaupt $a = qq' \ldots$, wo q, $q' \ldots$ Primzahlen bedeuten, so muſs $pp' \ldots$ durch q theilbar, also vermöge des Hauptsatzes q einer der Zahlen p, $p' \ldots$ gleich sein. Setzt man $q = p$, so folgt $p' \ldots = q' \ldots$, woraus man auf dieselbe Weise schlieſsen kann, daſs $q' = p'$ u. s. f.

Gemeinschaftliche Vielfache von zwei und mehreren Zahlen $a, b, c \ldots$ Um alle Zahlen zu finden, welche durch $a, b, c \ldots$ theilbar sind, ermittelt man, durch Zerlegung einer jeden in ihre Primfactoren, zunächst alle Primzahlen $p, p' \ldots$, durch die irgend eine der gegebenen Zahlen theilbar ist. Hat man dann noch festgestellt, daſs der Factor p ($p' \ldots$) in derjenigen der Zahlen $a, b, c \ldots$ wo er am häufigsten vorkommt, r ($r' \ldots$) Male enthalten ist, so erhält man die gesuchten Zahlen, wenn man in

$$kp^r p'^{r'} \ldots$$

für k alle Zahlen $1, 2 \ldots$ setzt. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $a, b, c \ldots$ ist demnach $p^r p'^{r'} \ldots$

III. Abschnitt.

Analytische Theorie der rationalen Zahlen.

1. Wir haben an den natürlichen Zahlen Verknüpfungen (Operationen, Rechnungsarten) zunächst von zwei Stufen kennen gelernt: Addition und Subtraction einer-, Multiplication und Division andererseits. Die Addition und Multiplication nennt man directe oder thetische Operationen, da die Summe und das Product von je zwei Gröfsen einer Art eben zu erklären sind. Aus ihnen gehen die beiden anderen Rechnungsarten durch Umkehrung hervor und heifsen darum inverse oder lytische Operationen.

Formal betrachtet, befindet sich in jeder Stufe eine Thesis und ihre Lysis. Die erstere gehorcht sowol dem associativen, als auch dem commutativen Gesetze, die letztere ist, wenn überhaupt möglich, eindeutig. Schon diese Analogie läfst es als wünschenswerth erscheinen, ein für alle Male festzustellen, was aus gewissen formalen Voraussetzungen über eine Verknüpfung gefolgert werden könne. Dazu kommt, dafs es aufser den natürlichen Zahlen noch andere Gröfsen giebt, mit denen gerechnet werden kann, theils nach den Regeln, die im vorigen Abschnitte aufgeführt sind, theils nach anderen, mehr oder weniger davon abweichenden. Daher werden uns Untersuchungen ähnlich den soeben erledigten, noch öfters begegnen. Man darf geradezu behaupten, dafs wenn man die Rechnungsregeln nicht von einem Falle, wo sie erwiesen sind, versuchsweise auf einen anderen übertragen, sondern durchaus sicher begründen will, die folgende Untersuchung unentbehrlich ist. Denn ohne sie würde die Darstellung in eine ermüdende Breite verfallen.

Voraussetzung A.) „Es sei gegeben ein System von Gröfsen $a, b, c \ldots$ (I). Demnach besteht eine Definition, nach welcher zu entscheiden ist, ob irgend zwei unter ihnen als gleich oder ungleich anzusehen sind. Je zwei der Gröfsen $(a\ b)$ lassen sich eindeutig verknüpfen und zwar ist das Resultat eine Gröfse (c) des Systemes, wofür wir nach I. 2 die Bezeichnung

$$a \circ b = c$$

anwenden. Die Verknüpfung $\circ$ wird als Thesis bezeichnet. Wir haben noch anzunehmen, dafs in dieser Gleichung c durch jede ihr gleiche Gröfse c' ersetzt werden dürfe — und dafs neben

$$a = a' \qquad b = b' \qquad a \circ b = a' \circ b'$$

sei.“[1])

Wir werden nunmehr die Thesis $\circ$ nacheinander dem associativen und commutativen Gesetze unterwerfen, wobei hervorzuheben ist, dafs sie von einander völlig unabhängig sind.[2])

2. I. Satz. Ist die dreigliederige Thesis associativ, so ist die Thesis aus beliebig vielen Gliedern associativ.

Ist eine Folge von drei Gröfsen a, b, c gegeben, so lassen sich daraus unter Einhaltung der vorgeschriebenen Anordnung nur die Ausdrücke $(a \circ b) \circ c$, $a \circ (b \circ c)$ bilden. Wir nehmen an

Voraussetzung B.)

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Jede der beiden Seiten dieser Gleichung kann man mit $a \circ b \circ c$ bezeichnen, ohne dadurch eine Unklarheit hervorzurufen. — Um den Satz zu beweisen,[3]) nehmen wir ihn als richtig an für die Verknüpfungen aus $3, 4, 5 \ldots n - 1$ Gröfsen und zeigen, dafs er alsdann auch besteht für solche aus n Gröfsen $a_1, a_2 \ldots a_n$. Wie auch $r \leq n - 1$ Gröfsen unter ihnen z. B. $a_1, a_2 \ldots a_r$, ohne diese Aufeinanderfolge abzuändern, zunächst in Gruppen von höchstens zwei vertheilt und innerhalb derselben verknüpft werden, die so er-

haltenen Resultate unter der nämlichen Beschränkung wieder in Gruppen von höchstens zwei zusammentreten und innerhalb derselben verknüpft werden u. s. f., bis endlich noch zwei Ausdrücke vorhanden sind, die in gehöriger Ordnung verknüpft das Endresultat liefern; diese sollen immer einander gleich sein. Dann aber kann in den Bezeichnungen eine aufserordentliche Vereinfachung eintreten, indem für jede der genannten gleichen Gröfsen $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_r$ geschrieben werden darf. Unter der obigen Annahme geben somit die n Gröfsen $a_1, \ldots a_n$ nur noch Veranlassung zu den folgenden $n - 1$ Ausdrücken

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 \circ (a_2 \circ a_3 \circ \ldots \circ a_n)\\
x_2 &= (a_1 \circ a_2) \circ (a_3 \circ \ldots \circ a_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_r &= (a_1 \circ a_2 \ldots \circ a_r) \circ (a_{r+1} \circ \ldots \circ a_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1} &= (a_1 \circ a_2 \ldots \circ a_{n-1}) \circ a_n.
\end{aligned}$$

Zufolge B.) ergiebt sich aber sofort, dafs $x_r = x_{r+1}$. Denn setzt man

$$1 \leqq r \leqq n-1 \qquad a_1 \circ \ldots \circ a_r = s_r \qquad a_{r+1} \circ \ldots \circ a_n = t_r,$$

so ist

$$s_r \circ (a_{r+1} \circ t_{r+1}) = (s_r \circ a_{r+1}) \circ t_{r+1}$$

d. i.

$$s_r \circ t_r = s_{r+1} \circ t_{r+1}.$$

Demnach hat man

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$$

w. z. b. w.[3*])

II. Satz. Jede associative Thesis ist commutativ, wenn die zweigliederige Thesis es ist.

Voraussetzung C.)

$$a \circ b = b \circ a.$$

Es sei

$$a_1 \circ a_2 \ldots \circ a_n = x.$$

Man kann aus der Anordnung $a_1, a_2 \ldots a_n$ jede beliebige dadurch ableiten, dafs man nur je zwei benachbarte Buchstaben vertauscht. Wie haben somit nur zu zeigen, dafs

$$\begin{aligned} x &= a_2 \circ a_1 \circ a_3 \ldots \circ a_n \\ &= a_1 \circ \ldots \circ a_{r-1} \circ a_{r+1} \circ a_r \circ a_{r+2} \ldots \circ a_n \\ &= a_1 \circ a_2 \ldots \circ a_n \circ a_{n-1}. \end{aligned}$$

Es ist aber nach C.)

$$\begin{aligned} x &= s_{r-1} \circ (a_r \circ a_{r+1}) \circ t_{r+1} \\ &= s_{r-1} \circ (a_{r+1} \circ a_r) \circ t_{r+1} \\ &= s_{r-1} \circ a_{r+1} \circ a_r \circ t_{r+1}. \end{aligned}$$

Aehnlich ergeben sich auch die beiden anderen Umformungen von x.

Anmerkung. Unter Voraussetzung C.) folgt aus dem Satze (A.): „Neben $a = a'$ ist $a \circ b = a' \circ b$" der allgemeinere „Neben $a = a'$ $b = b'$ ist $a \circ b = a' \circ b'$." Denn man hat nacheinander

$$a \circ b = a' \circ b = b \circ a' = b' \circ a' = a' \circ b'.$$

3. Die lytische oder inverse Operation. Unter Festhaltung der Annahmen A.), B.), C.) betrachten wir nun die Gleichung $b \circ x = x \circ b = a$, worin a, b beliebige gegebene Gröfsen des Systemes (I) bedeuten. Es sind drei Fälle denkbar: entweder giebt es eine oder gar keine oder mehr als eine Gröfse in (I), die für x gesetzt die Gleichung befriedigt. Dafs ihr neben einer Gröfse x auch jede $x' = x$ genügt, folgt unmittelbar aus A.)

Voraussetzung D.) „Die Gleichung

$$x \circ b = b \circ x = a$$

werde entweder, was immer auch a, b für Gröfsen des Systemes (I) sein mögen, oder doch bei bestimmten Werthen derselben durch eine und nur eine Gröfse dieses Systemes befriedigt, wofür wir die Bezeichnung

$$x = a \cup b$$

gebrauchen — gesprochen: „von a getrennt b" oder kurz „a ab (weg) b". Demnach ist

$$(a \cup b) \circ b = a." \qquad (\alpha)$$

$a \cup b$ wird wie $a \circ b$ als eindeutiges Symbol angesehen, da es nur unter sich gleiche Gröfsen bedeutet. Das soll

festgehalten werden, so dafs wir in solchen Fällen, wo es ungleiche Gröfsen im Systeme (I) giebt, welche die Gleichung $b \circ x = a$ befriedigen, das Symbol $a \cup b$ als unzulässig betrachten. Um Wiederholungen zu vermeiden, bemerken wir, dafs in den folgenden Sätzen vom zweiten an vorausgesetzt ist, dafs alle in denselben vorkommenden lytischen Symbole $a \cup b$ möglich und eindeutig seien.

III. Satz. Aus den Voraussetzungen A.) — D.) ergeben sich folgende Regeln für das Rechnen nach den Operationen $\circ$ und $\cup$.

1) „Ist $a = a'$, $b = b'$ so existirt neben $a \cup b$ auch $a' \cup b'$ und zwar ist $a \cup b = a' \cup b'$." — Aus $a \cup b = x$ folgt $a = b \circ x$, also nach A.) $a' = b \circ x$. Da $b \circ x = b' \circ x$, so hat man $a' = b' \circ x$. Diese Gleichung kann nur eine Lösung haben, da auch umgekehrt aus ihr wieder $b \circ x = a$ folgt; somit ist $x = a' \cup b'$.

2) „Es ist $(a \circ b) \cup b = a$ unter Voraussetzung, dafs die Gleichung $a \circ b = x \circ b$ nur die eine Lösung $x = a$ hat."

3) $$a \cup b = (a \circ m) \cup (b \circ m) = (a \cup m) \cup (b \cup m).$$

Wir haben wie oben $a = b \circ x$, also

$$a \circ m = (b \circ m) \circ x,$$

somit, wenn wir voraussetzen, dafs diese Gleichung nur eine Lösung hat,

$$x = (a \circ m) \cup (b \circ m).$$

Setzt man

$$a \cup m = p, \qquad b \cup m = q,$$

so hat man $a = m \circ p$ neben

$$a = (m \circ q) \circ x = m \circ (q \circ x),$$

also

$$p = q \circ x, \qquad x = p \cup q,$$

die Eindeutigkeit von x vorausgesetzt.[3**])

4) $(a \cup b) \circ c = (a \circ c) \cup b$.

5) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \circ c)$.

6) $a \cup (b \cup c) = (a \circ c) \cup b$.

Die Beweise dieser Formeln bieten keine Schwierigkeit dar. $a \cup b$ als möglich und eindeutig angenommen, ist auch

$(a \cup b) \circ c$ eine Gröfse y unseres Systemes. Man hat $b \circ y = a \circ c$, kann also, wenn diese Gleichung nicht mehr als eine Lösung y hat, schreiben $y = (a \circ c) \cup b$. U. s. f. — Man hat ferner

7) $(a \cup b) \circ (a' \cup b') = (a \circ a') \cup (b \circ b')$.

8) $(a \cup b) \cup (a' \cup b') = (a \circ b') \cup (a' \circ b)$.

Denn sind $a \cup b$, $a' \cup b'$ Gröfsen des Systemes (I), so auch

$$(a \cup b) \circ (a' \cup b') = z.$$

Demnach findet man

$$z \circ (b \circ b') = a \circ a',$$

sodafs wenn diese Gleichung nur eine Lösung für z zuläfst,

$$z = (a \circ a') \cup (b \circ b')$$

gesetzt werden kann. U. s. f.

9) Der „fortschreitend" zu berechnende Ausdruck

$$a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_{r_1} \cup b_1 \cup b_2 \cup \ldots . b_s \circ a_{r_1+1} \circ \ldots . \qquad (\beta)$$

liefert, wenn bei Ausführung der aufeinander folgenden Verknüpfungen a_1 mit a_2, $a_1 \circ a_2$ mit a_3 u. s. f. kein Widersinn zu Tage tritt, nach 4) und 5) als Endresultat $A \cup B$, unter A das Resultat der thetischen Verknüpfung von a_1 mit allen hinter einem $\circ$ stehenden Gröfsen, unter B das Resultat der thetischen Verknüpfung aller hinter einem $\cup$ stehenden Gröfsen verstanden. Dabei können je zwei gleiche Gröfsen hinter verschiedenen Operationszeichen nebst diesen selbst gestrichen werden. — Daraus erhellt, dafs das Endresultat von der Anordnung der in (β) vorgeschriebenen Operationen unabhängig ist, woferne der Ausdruck nur auch bei der neuen Anordnung derselben einen Sinn hat.

10) Ist ein Ausdruck, welcher eingeklammerte Parthien enthält, in einen fortschreitend zu berechnenden zu verwandeln, so können die Klammern am Anfange oder hinter einem $\circ$ wegbleiben; bei Entfernung derselben hinter einem $\cup$ ist vor das erste Glied hinter der Klammer das Operationszeichen $\cup$ zu setzen und es sind vor allen folgenden Gliedern die Zeichen $\circ$ und $\cup$ zu vertauschen (vgl. Nr. 8). Dabei ist jedoch voraus-

zusetzen, dafs die nun vorzunehmende fortschreitende Berechnung auch möglich sei.

4. Es ist zweckmäfsig anstatt D.) eine einfachere Voraussetzung noch besonders in Betracht zu ziehen.

Voraussetzung D_1.) „Es giebt entweder eine und dann nur eine oder gar keine Gröfse des Systemes (I), welche für x gesetzt, die Gleichung $b \circ x = a$ erfüllt."

Dann ergeben sich nach dem 1. Satze in Nr. 3 zunächst die folgenden:

2) „Aus $a \circ b = a \circ b'$ folgt $b = b'$."

3) „Aus $a \cup b = a' \cup b$ folgt $a = a'$, aus $a \cup b = a \cup b'$ folgt $b = b'$."

4) „Ist $a \cup b = a' \cup b'$, so hat man $a \circ b' = a' \circ b$ und umgekehrt: besteht die letztere Gleichung und ist $a \cup b$ möglich, so existirt auch $a' \cup b'$ und es ist $a \cup b = a' \cup b'$." — Um den ersten Theil zu zeigen, verknüpft man beide Seiten der Gleichung $a \cup b = a' \cup b'$ mit $b \circ b'$. Besteht aber $a \circ b' = a' \circ b$ und ist $a = b \circ x$, so folgt

$$b \circ (x \circ b') = a' \circ b$$

also nach 2)

$$x \circ b' = a', \qquad x = a' \cup b'.$$

Daran schliefsen sich der 2.—8. Satz der vorigen Nr., wobei die Zulässigkeit des Ausdruckes $(a \circ b) \cup b$ im 2., sowie der die rechten Seiten der Gl. 3)—8) bildenden lytischen Symbole sich nun von selbst versteht.

5. Verbinden wir mit den Annahmen A.) B.) C.) noch die

Voraussetzung E.) „1) Unter je zwei ungleichen Gröfsen des Systemes (I) sei die eine als die gröfsere, die andere als die kleinere erklärt. 2) Es sei neben

$$a > a' \qquad a \circ b > a' \circ b''$$

so ergiebt sich sofort der

Satz IV. „Wenn

$$a_1 \geqq b_1 \qquad a_2 \geqq b_2 \ldots \qquad a_n \geqq b_n \qquad (n \geqq 2)$$

und wenigstens in einer dieser Relationen das Zeichen $>$ steht, so ist

$$a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_n > b_1 \circ b_2 \circ \ldots b_n."$$

„Wenn neben diesen Annahmen noch die Möglichkeit der Lysis, wenigstens bedingungsweise, feststeht, dann kann aus E) geschlossen werden

1) die Eindeutigkeit der Lysis (D_1); ferners die Sätze:

2) Neben $a > a'$ ist $a \cup b > a' \cup b$.

3) Neben $b < b'$ ist $a \cup b > a \cup b'$.

4) Neben $a > a' \quad b < b'$ ist $a \cup b > a' \cup b'$.

Dabei ist die Existenz der Gröfsen $a \cup b$, $a' \cup b$ u. s. f. vorausgesetzt." Der Satz 1) wird indirect gezeigt; 2) und 3) folgen nach dem allgemeinen Satze in I. 7. — 4) geht aus 2) und 3) hervor.

Wir werden später noch die folgenden Sätze gebrauchen:

„5) Neben $a \cup b \gtrless c$ hat man entsprechend $a \gtrless b \circ c$ und umgekehrt, immer $a \cup b$ als im Systeme (I) vorhanden gedacht.

6) Existiren $a \cup b$ $a' \cup b'$, so folgt aus $a \cup b \gtrless a' \cup b'$ entsprechend $a \circ b' \gtrless a' \circ b$ und umgekehrt."

Die ersten Theile folgen aus E.), indem man beide Seiten der Relationen mit b, bez. $b \circ b'$ verknüpft; die Umkehrungen nach I. 7.

Satz IV.*) „Weifs man, dafs neben A.) B.) C.) E.1.) die Regel „$a \circ b > a$" gilt, so ergiebt sich, dafs $a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_n$ gröfser ist als das Resultat der Verknüpfung eines Theiles der Gröfsen $a_1 \ldots a_n$, sowie als jede einzelne."

6. Distributive Formeln. Wir betrachten nun zwei thetische Operationen $\circ$ und $\odot$.

Satz V. „Es sei die Operation $\circ$ associativ. 1.) Besteht die Formel

$$(a \circ b) \odot c = (a \odot c) \circ (b \odot c) \qquad (\gamma),$$

so hat man

$$(a_1 \circ a_2 \circ \cdot a_m) \odot c = (a_1 \odot c) \circ (a_2 \odot c) \circ \ldots \quad (a_m \odot c)." \quad (\delta)$$

Beweis. Man zerlege

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdot a_m = (a_1 \circ a_2 \circ \cdot a_{m-1}) \circ a_m$$

und setze in (γ)

$$a = a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_{m-1}, \qquad b = a_m.$$

Hierauf zerlege man $a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_{m-1}$ u. s. f.

„2) Desgleichen folgt aus

$$a \odot (b \circ c) = (a \odot b) \circ (a \odot c) \qquad (\varepsilon)$$
$$a \odot (b_1 \circ b_2 \circ \ldots b_n) = (a \odot b_1) \circ (a \odot b_2) \circ \ldots (a \odot b_n).$$"

„3) Wenn die Formeln (γ), (ε), welche die beiden Seiten des distributiven Principes heifsen, zugleich Geltung haben, so kann man jeden Ausdruck

$$(a_1 \circ a_2 \circ \ldots\ldots a_m) \odot (b_1 \circ b_2 \circ \ldots\ldots b_n)$$

in doppelter Weise entwickeln." So findet man z. B. für $s = (a \circ b) \odot (c \circ d)$, wenn

$$a \odot c = l \quad b \odot c = m \quad a \odot d = n \quad b \odot d = p$$

gesetzt werden, zuerst (γ) dann (ε) anwendend, $s = l \circ n \circ m \circ p$ und in umgekehrter Ordnung vorgehend, $s = l \circ m \circ n \circ p$.

„4) Haben die Gleichungen

$$x_1 \odot c = a_1 \quad x_2 \odot c = a_2 \ldots . x_m \odot c = a_m$$

die Auflösungen

$$x_1 = a_1 \smile c \quad x_2 = a_2 \smile c \ldots . x_m = a_m \smile c$$

und besteht die Formel γ), so hat man

$$(a_1 \smile c_1) \circ (a_2 \smile c_2) \circ \ldots (a_m \smile c_m) = (a_1 \circ a_2 \ldots \circ a_m) \smile c,$$

auch die letzte Gröfse als eindeutig vorausgesetzt."

Diese Gleichung ergiebt sich aus (δ), indem man $a_1, a_2 \ldots a_m$ bez. durch $x_1, x_2 \ldots x_m$ ersetzt.

Aus 3) ergiebt sich der folgende Satz.[4])

„Wenn die Operation $\circ$ associativ ist und jede Gleichung $b \circ x = a$, sowie $x \circ b = a$ höchstens eine Auflösung nach x hat, wenn ferner im Systeme (I) zu jeder Gröfse m ein Paar von Gröfsen $x\,y$ vorhanden ist, so dafs $m = x \odot y$; dann folgt aus den beiden Seiten des distributiven Gesetzes (γ), (ε), dafs die Operation $\circ$ commutativ ist."

Aus beiden obigen Darstellungen von s folgt nämlich

$$l \circ (n \circ m \circ p) = l \circ (m \circ n \circ p),$$

somit $n \circ m \circ p = m \circ n \circ p$ d. i. $(n \circ m) \circ p = (m \circ n) \circ p$, also endlich $(n \circ m) = (m \circ n)$. Da m, n bei gehöriger Be-

stimmung von a, b, c, d beliebige Gröfsen von (I) sein können, so gilt für die Thesis o das commutative Gesetz allgemein.

7. Bisher ist angenommen worden, dafs die den Annahmen A.) B.) C.) genügende Verknüpfung o der Gröfsen (I) manchmal keine Umkehrung zulasse. Dadurch wird die Giltigkeit der in Nr. 3—5 aufgestellten Formeln in der Art beschränkt, dafs die darin vorkommenden lytischen Symbole möglich und eindeutig sein müssen. Wir wollen nun neue Gröfsen aufstellen, welche das System (I) dergestalt ergänzen sollen, dafs sie die noch unlösbaren Gleichungen $b \circ x = a$ befriedigen und mit welchen dabei nach denselben Regeln gerechnet werden kann, wie mit den ursprünglichen Gröfsen. — Wenn wir uns auf die Annahme D_1.) beschränken, zufolge welcher es entweder nur eine Gröfse oder gar keine Gröfse x unter den (I) giebt, so werden wir durch Einführung der neuen Gröfsen den Formeln in Nr. 3—5 die volle Allgemeinheit verschaffen. Erst dann kann eigentlich vom algebraischen Rechnen mit Buchstaben, die jede Gröfse des Systemes bedeuten können, die Rede sein.

Wir setzen nun fest:[5])

1. Definition. „Wenn im Falle D_1.) der Gleichung $b \circ x = a$ keine Gröfse des Systemes (I) genügt, so soll sie durch ein und nur ein neues, in (I) nicht vorhandenes Ding x befriedigt werden, das mit $a \cup b$ bezeichnet werden kann, weil dieses Symbol noch nicht vergriffen ist. Man hat also

$$b \circ (a \cup b) = (a \cup b) \circ b = a \,..“$$

Da die neuen Objecte keine weiteren Eigenschaften besitzen, so kann man ihnen solche nach Belieben beilegen, wenn sie sich nur untereinander nicht widersprechen. Zunächst machen wir die Dinge zu Gröfsen durch Unterscheidung von gleichen und ungleichen unter ihnen, wozu man durch den 4. Satz in Nr. 4 gelangt.

Die Gleichung $a \circ b' = a' \circ b$ hat auch dann noch einen Sinn, wenn $a \cup b$ $a' \cup b'$ nicht dem Systeme (I) angehören. Da überdies der Satz erhalten bleiben soll, so treffen wir die folgende Bestimmung.

2. Definition. Zwei neue Dinge $a \cup b$ und $a' \cup b'$ seien dann und nur dann einander gleich, wenn

$$a \circ b' = a' \circ b.$$

Die Definition ist zulässig. Denn ist nach ihr

$$a \cup b = a' \cup b', \quad a' \cup b' = a'' \cup b'',$$

so ist nach ihr auch $a \cup b = a'' \cup b''$. Wir haben nämlich

$$a \circ b' = a' \circ b, \quad a' \circ b'' = a'' \circ b',$$

also

$$(a \circ b') \circ (a' \circ b'') = (a' \circ b) \circ (a'' \circ b')$$

d. i.

$$(a' \circ b') \circ (a \circ b'') = (a' \circ b') \circ (a'' \circ b)$$

und nach dem 2. Satze in Nr. 4 $a \circ b'' = a'' \circ b$. — Wir merken an, dafs neben $m = m'$ $a \cup b = (a \circ m) \cup (b \circ m')$ und dafs wenn $b = a$, nur dann $a' \cup b' = a \cup b$ sein kann, falls auch $b' = a'$ ist.

Die neuen $a \cup b$ sind somit Gröfsen geworden, welche im Gegensatze zum ursprünglichen System (I) das System (II) bilden und mit α, β, γ.... bezeichnet werden mögen. Wenn es ohne Unklarheit geschehen kann, werden α, β, γ... auch für die Gröfsen des aus (I) und (II) zusammengesetzten, des erweiterten Systemes gebraucht werden.

Versuchen wir nun die thetische Verknüpfung $\circ$ zwischen den alten und neuen Gröfsen einer- und den letzteren unter sich andererseits in der Art zu definiren, dafs die dafür hinsichtlich der Gröfsen (I) bereits angenommenen Gesetze der Associativität und Commutativität bestehen bleiben. Mit Rücksicht auf die Formeln 4) und 7) in Nr. 3 müssen wir dann festsetzen:

3. Definition. „Sind $a \cup b$, $a' \cup b'$ Gröfsen des Systemes (II), so sei

$$(a \cup b) \circ c = c \circ (a \cup b) = (a \circ c) \cup b \qquad (1)$$

$$(a \cup b) \circ (a' \cup b') = (a \circ a') \cup (b \circ b'), \qquad (2)$$

worin die rechten Seiten auch durch jede ihnen bez. gleiche Gröfse ersetzt werden können.“ — Nunmehr erkennt man, dafs wenn $a \cup b = a' \cup b'$ auch $(a' \cup b') \circ b = a$ und dafs

umgekehrt die letzte Gleichung nur dann besteht, wenn $a \cup b = a' \cup b'$. Somit ist die in der 1. Definition geforderte Eindeutigkeit von $a \cup b$ gewahrt.

Satz VI. „Wird die Operation o im erweiterten Gröfsensysteme durch die Gleichungen (1), (2) definirt, so ist sie ausnahmslos commutativ und associativ."

„Bezeichnen α, α', β Gröfsen dieses Systemes, so besteht der Satz: Ist $\alpha = \alpha'$ so ist $\alpha \circ \beta = \alpha' \circ \beta$." (3)

„Die Gleichung $\xi \circ \beta = \alpha$ hat nach ξ eine und nur eine Lösung, die im Anschlusse an Nr. 3 mit $\xi = \alpha \cup \beta$ bezeichnet wird. Die Lysis ist stets möglich und eindeutig."

Beweis. Dafs $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$, folgt aus den Formeln (1), (2). Beim Nachweise der Gleichung

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma) \tag{4}$$

sind nach der Natur der darin auftretenden Gröfsen acht Fälle zu unterscheiden, welche folgende Zusammenstellung ersichtlich machen soll:

$$\begin{array}{llll} 1)\ abc & 2)\ ab\gamma & 3)\ a\beta c & 4)\ a\beta\gamma \\ 5)\ \alpha bc & 6)\ \alpha b\gamma & 7)\ \alpha\beta c & 8)\ \alpha\beta\gamma. \end{array} \tag{5}$$

Hier bedeuten die lateinischen Buchstaben Gröfsen des Systemes (I), die griechischen ausschliefslich solche von (II) und zwar sei

$$\alpha = m \cup n, \quad \beta = p \cup q, \quad \gamma = r \cup s.$$

Der 1. Fall kommt nicht mehr in Betracht. Im 2. Falle hat man

$$(a \circ b) \circ \gamma = (a \circ b) \circ (r \cup s) = (a \circ b \circ r) \cup s.$$

Andererseits ist

$$b \circ \gamma = (b \circ r) \cup s \qquad a \circ (b \circ \gamma) = (a \circ b \circ r) \cup s,$$

mag nun $b \circ \gamma$ eine Gröfse des ersten oder zweiten Systemes sein. Somit folgt $(a \circ b) \circ \gamma = a \circ (b \circ \gamma)$. Ähnlich der Beweis im 3. und 5. Falle. In den übrigen Fällen hat man den Hilfssatz zu gebrauchen, dafs die Gleichung (2) auch gilt, wenn $a \cup b$ eine Gröfse des ersten, $a' \cup b'$ eine des zweiten Systemes ist. — Es sei $a \cup b = d$, so dafs nach (1)

$$x = (a \cup b) \circ (a' \cup b') = d \circ (a' \cup b') = (d \circ a') \cup b'.$$

Nach Nr. 3 ist $d \circ a' = (a \circ a') \cup b$ und daher, wenn x zu (I) gehört, in der That $x = (a \circ a') \cup (b \circ b')$. Ist aber x eine neue Gröfse, so weifs man zunächst nur, dafs

$$b' \circ x = d \circ a' = (a \circ a') \cup b,$$

also

$$b \circ (b' \circ x) = a \circ a'.$$

Da aber das associative Gesetz im 2. Falle schon erwiesen ist, so folgt

$$(b \circ b') \circ x = b \circ (b' \circ x) = a \circ a'$$

d. i.

$$x = (a \circ a') \cup (b \circ b').$$

Nunmehr bietet der Nachweis von (4) keine Schwierigkeit mehr dar; man braucht nur die rechte und linke Seite der Gleichung zu entwickeln und wird sie als übereinstimmend erkennen. So ist z. B. im 8. Falle

$$\alpha \circ \beta = (m \circ p) \cup (n \circ q) \qquad \beta \circ \gamma = (p \circ r) \cup (q \circ s);$$

somit

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = (m \circ p \circ r) \cup (n \circ q \circ s) = \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Wenn man den unten bewiesenen Satz (3) anwenden will, so reicht diese Entwicklung auch für die Fälle 3)—7) aus; man braucht sich nur a in der Form $m \cup n$ zu denken u. s. w. — Vermöge der Commutativität der zweigliedrigen Thesis lassen sich übrigens der 5. und 3. Fall auf den 2., der 7. und 6. auf den 4. zurückführen. (Vgl. IV. 5.)

Der Beweis des Satzes (3) verlangt nach der Natur der Gröfsen α, β die Unterscheidung von vier Fällen, die in dem ähnlich wie oben entworfenen Schema

$$1)\ a, b \qquad 2)\ a, \beta \qquad 3)\ \alpha, a \qquad 4)\ \alpha, \beta \qquad (6)$$

enthalten sind. Uebrigens bietet sich die Formel (3) in jedem Falle unmittelbar dar. Es sei $\alpha' = m' \cup n'$, so dafs

$$m \circ n' = m' \circ n; \qquad (7)$$

im letzten hat man dann z. B.

$$\alpha \circ \beta = (m \cup n) \circ (p \cup q) = (m \circ p) \cup (n \circ q)$$

$$\alpha' \circ \beta = (m' \circ p) \cup (n' \circ q).$$

Aus (7) folgt aber durch Verknüpfung mit $p \circ q$

$$(m \circ p) \circ (n' \circ q) = (m' \circ p) \circ (n \circ q)$$

d. i.

$$\alpha \circ \beta = \alpha' \circ \beta,$$

mag $\alpha \circ \beta$ dem Systeme (I) oder (II) angehören.

Die nämlichen vier Fälle (6) sind zu unterscheiden hinsichtlich der Gleichung $\xi \circ \beta = \alpha$. Der erste ist bereits erledigt; von den übrigen wollen wir den letzten durchführen. Wenn dieser Gleichung überhaupt eine Gröfse des erweiterten Systemes (I), (II) genügt, so kann sie immer in die Form $\xi = x \cup y$ gebracht werden. Es soll demnach sein

$$(x \cup y) \circ (p \cup q) = m \cup n$$

d. i.

$$(x \circ p) \cup (y \circ q) = m \cup n$$

$$(x \circ p) \circ n = (y \circ q) \circ m \qquad x \circ (p \circ n) = y \circ (q \circ m).$$

Die letzte Gleichung wird erfüllt durch die Annahme

$$x = (q \circ m) \qquad y = (p \circ n),$$

aber auch durch

$$x = (y \circ q \circ m) \cup (p \circ n),$$

wobei wir y willkürlich lassen können, nur so beschränkt, dafs die rechts stehende Lysis eine Gröfse des Systemes (I) liefert. Es ist jedoch nach der 2. Definition auch im letzteren Falle

$$x \cup y = (q \circ m) \cup (p \circ n).$$

Die Gleichung $\xi \circ \beta = \alpha$ kann somit nur eine Lösung haben:

$$\xi = (q \circ m) \cup (p \circ n).$$

Dafs diese auch wirklich genügt, zeigt die Substitution derselben für ξ:

$$[(q \circ m) \cup (p \circ n)] \circ (p \cup q) = (p \circ q \circ m) \cup (p \circ q \circ n) = m \cup n.$$

8. Zufolge des Satzes VI. genügt das aus den Systemen (I), (II) zusammengesetzte $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ vollständig den im Satze III. verlangten Bedingungen. Man kann daher in den darin aufgeführten Sätzen die $a, b, c \ldots$ ohne weiteres durch die $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ersetzen und hat demnach:

1) Ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, so ist $\alpha \cup \beta = \alpha' \cup \beta'$.
2) $(\alpha \circ \beta) \cup \beta = \alpha$.
3) $\alpha \cup \beta = (\alpha \circ \mu) \cup (\beta \circ \mu)$.
4) $(\alpha \cup \beta) \circ \gamma = (\alpha \circ \gamma) \cup \beta$.
5) $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \circ \gamma)$.
6) $\alpha \cup (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cup \gamma) \cup \beta$.
7) $(\alpha \cup \beta) \circ (\alpha' \cup \beta') = (\alpha \circ \alpha') \cup (\beta \circ \beta')$.
8) $(\alpha \cup \beta) \cup (\alpha' \cup \beta') = (\alpha \circ \beta') \cup (\alpha' \circ \beta)$.

Und zwar gelten alle diese Formeln ohne jegliche Beschränkung.

9) Der von links nach rechts fortschreitend zu berechnende Ausdruck

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_{r_1} \cup \beta_1 \cup \beta_2 \ldots \cup \beta_{s_1} \circ \alpha_{r_1+1} \circ \ldots \qquad (8)$$

ist gleich $A \cup B$, worin A durch thetische Verknüpfung aller α, B durch thetische Verknüpfung aller β entstanden ist und somit unabhängig von der Anordnung der in (8) vorgeschriebenen Operationen.

10) „Jeder Ausdruck, der durch ineinander geschachtelte fortschreitend zu berechnende Ausdrücke gebildet ist, wird so auf einen ohne Klammern geschriebenen Ausdruck reducirt, dafs man die Klammern am Anfange oder nach einem $\circ$ wegläfst, nach einem $\cup$ aber bei Entfernung der Klammern vor das erste Glied $\cup$ setzt und vor den übrigen die Zeichen $\circ$ und $\cup$ mit einander vertauscht."

Beweis. Offenbar brauchen wir nur einen fortschreitenden Ausdruck X zu betrachten, dessen Glieder entweder theils einfache Gröfsen theils fortschreitende Ausdrücke oder sämmtlich solche Ausdrücke sind. Wir beseitigen die darin befindlichen Klammern nacheinander und zwar in der Richtung von links nach rechts. Ist schon das erste Glied ein Ausdruck, so fallen seine Klammern einfach fort. Demnach hat man nur zu unterscheiden, ob die vor der ersten Klammer stehenden Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ blofs durch das Zeichen $\circ$ verknüpft sind (bez. nur eine Gröfse vorhanden ist) oder durch $\cup$, bezw. durch $\circ$ und $\cup$. Im ersten Falle beginnt X mit $A \circ \{N\}$ oder $A \cup \{N\}$, wo $A = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \alpha_m$ und N ein Ausdruck von der Form (8). Wir können nun, in der Richtung von rechts nach links fortschreitend ein Glied von N nach dem anderen aufserhalb der Klammern bringen. Bezeichnet β_n das letzte Glied von N, so darf man N entweder gleich $\{N'\} \circ \beta_n$ oder $\{N'\} \cup \beta_n$ setzen. Man hat daher erstens entweder

$$A \circ \{N\} = A \circ [\{N'\} \circ \beta_n] = [A \circ \{N'\}] \circ \beta_n$$

oder

$$A \circ \{N\} = A \circ [\{N'\} \cup \beta_n] = [A \circ \{N'\}] \cup \beta_n$$

und so fortfahrend $A \circ \{N'\}$ entweder gleich $[A \circ \{N''\}] \circ \beta_{n-1}$ oder $[A \circ \{N''\}] \cup \beta_{n-1}$ u. s. w. Wenn endlich die Klammern in dem in Rede stehenden Theile von X verschwunden sind, so finden wir nach $\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \alpha_m \circ \beta_1$ die übrigen Glieder von N hinter denselben Zeichen, wie in N selbst. Aehnlich schliefst man, wenn zweitens $A \cup \{N\}$ vorliegt. Es ist nämlich nach 4) — 6)

$$A \cup [\{N'\} \circ \beta_n] = [A \cup \{N'\}] \cup \beta_n,$$

$$A \cup [\{N'\} \cup \beta_n] = (A \circ \beta_n) \cup \{N'\} = [A \cup \{N'\}] \circ \beta_n.$$

Im zweiten Falle sei das Resultat aus den einfachen Gröfsen, womit X beginnt, wie in 9) $A \cup \{B\}$. Weiter hat man dieselben Unterfälle zu unterscheiden, wie gerade vorhin und gelangt mit Hilfe der Relationen 7) und 8) zu denselben Ergebnissen. So findet man z. B.

$$\begin{aligned}[A \cup \{B\}] \circ [(N') \cup \beta_n] &= [A \circ \{N'\}] \cup [\{B\} \circ \beta_n] \\ &= A \circ \{N'\} \cup \{B\} \cup \beta_n \\ &= A \cup \{B\} \circ \{N'\} \cup \beta_n,\end{aligned}$$

worin man in dem Theile $A \cup \{B\}$ wieder die ursprüngliche Anordnung der Glieder α_r herstellen kann. — Sowie die Klammern um den ersten Ausdruck N in X sich wegschaffen lassen, so auch die um den zweiten, der nunmehr der erste geworden ist. U. s. f.

11)—13) Die den Sätzen 2)—4) in Nr. 4 entsprechenden.

9. Der Modulus der Thesis o und die reciproke (inverse) Gröfse. Die Gröfse $\nu = a \cup a$, welche dem Systeme (I) oder (II) angehört, erfüllt die Gleichung $a \circ \nu = a$. Wenn b irgend eine Gröfse von (I), $\alpha = m \cup n$ eine solche von (II) bedeutet, so hat man $a \cup a = b \cup b$ also $b \circ \nu = b$ und

$$\alpha \circ \nu = (m \cup n) \circ \nu = (m \circ \nu) \cup n = m \cup n = \alpha.$$

Die Gröfse ν, welche die Eigenschaft besitzt, bei Verknüpfung mit irgend einer Gröfse des erweiterten Systemes sie ungeändert zu lassen, bezeichnen wir als Modulus der Thesis o. — Aus $\alpha \circ \nu = \alpha$ folgt ferner $\alpha = \alpha \cup \nu$, mag α zu (I) oder (II) gehören.

Die Gröfse $\nu \cup \alpha$ wird dagegen im Allgemeinen von α

verschieden sein; wir wollen sie die zur Gröfse α des erweiterten Systemes reciproke oder inverse nennen und mit $\bar{\alpha}$ bezeichnen. Die zu gleichen Gröfsen reciproken sind auch gleich. Es ist $\bar{\nu} = \nu$. Die Reciproke zu $\bar{\alpha}$ ist α. Denn man hat dafür

$$\bar{\alpha} = \nu \cup \bar{\alpha} = \nu \cup (\nu \cup \alpha) = (\nu \circ \alpha) \cup \nu = \alpha.$$

Die Reciproke zu $\alpha \circ \beta$ ist $\bar{\alpha} \circ \bar{\beta}$; die zu $\alpha \cup \beta$ ist $\beta \cup \alpha$. In der That ergiebt sich

$$\overline{\alpha \cup \beta} = \nu \cup (\alpha \cup \beta) = (\nu \circ \beta) \cup \alpha = \beta \cup \alpha.$$

Endlich ist die Lysis $\alpha \cup \beta$ identisch mit der thetischen Verknüpfung von α mit der Reciproken zu β.

$$\alpha \circ \bar{\beta} = \alpha \circ (\nu \cup \beta) = (\alpha \circ \nu) \cup \beta = \alpha \cup \beta.$$

Im Innern eines fortschreitend zu berechnenden Ausdruckes, der stets als Resultat von Thesen angesehen werden kann, kann der Modulus nebst dem vor ihm stehenden Operationszeichen weggelassen werden, ohne dafs der Ausdruck eine Aenderung erleidet. Desgleichen am Anfange, wenn auf ihn das Zeichen $\circ$ folgt.

10. Bestehen über das Gröfsensystem (I) die Voraussetzungen A), B), C), D_1), E), so können wir noch folgendes festsetzen.

4. Definition. „Es sei die neue Gröfse $\alpha = m \cup n$ gröfser oder kleiner als a, und umgekehrt a kleiner oder gröfser als α, je nachdem m gröfser oder kleiner als $n \circ a$. α sei gröfser oder kleiner als eine andere Gröfse $\beta = p \cup q$ des Systemes (II), je nachdem $m \circ q$ gröfser oder kleiner als $n \circ p$."

Dafs diese Definition keinen Widerspruch mit den bisher angenommenen Eigenschaften des Gröfsensystemes (I) herbeiführt, zeigen die Sätze 5) und 6) in Nr. 5. — Ferner müssen die formalen Bedingungen in I. 3 erfüllt sein. In der That, mögen α, β Gröfsen 1. oder 2. Art sein, so folgt aus $\alpha \gtrless \beta$ stets $\alpha \lesssim \beta$. Und ist $\alpha \geq \beta$, $\beta > \gamma$, so ist wirklich $\alpha > \gamma$. Denn ist $\gamma = r \cup s$, so hat man nach Voraussetzung

$$m \circ q \gtrless n \circ p, \qquad p \circ s > q \circ r,$$

also nach Satz IV. in Nr. 5

$$m \circ q \circ p \circ s > n \circ p \circ q \circ r$$

und wenn $p \circ q$ beiderseits abgetrennt wird

$$m \circ s > n \circ r \quad \text{d. i.} \quad \alpha > \gamma.$$

Der Beweis gilt allgemein, da man auch Gröfsen des Systemes (I) in der Form $m \cup n$ darstellen kann. Doch mufs noch bemerkt werden, dafs wenn $\alpha \gtrless a = c \cup d$ auch

$$m \circ d \gtrless n \circ c.$$

Das folgt unmittelbar aus $m \gtrless n \circ a$ durch Verknüpfung beider Seiten mit d.

Satz VII. „Unter diesen Umständen hat man:

1) neben $\alpha > \alpha' \qquad \alpha \circ \beta > \alpha' \circ \beta$.

2) $\alpha \circ \beta \gtrless \alpha$ je nachdem, $\beta = p \cup q$ gesetzt, $p \gtrless q$.“ Ist

$$\alpha = m \cup n \qquad \alpha' = m' \cup n',$$

so folgt

$$\alpha \circ \beta = (m \circ p) \cup (n \circ q) \qquad \alpha' \circ \beta = (m' \circ p) \cup (n' \circ q)$$

und wegen

$$m \circ n' > m' \circ n \qquad m \circ n' \circ p \circ q > m' \circ n \circ p \circ q$$

d. i.

$$\alpha \circ \beta > \alpha' \circ \beta.$$

Und es ist $\alpha \circ \beta \gtrless \alpha$, je nachdem

$$(m \circ p) \circ n \gtrless (n \circ q) \circ m$$

oder, bei Abtrennung von $m \circ n$ beiderseits, $p \gtrless q$.

11. Durch Anwendung der in den vorstehenden Nummern entwickelten Theorie kann man das System der natürlichen Zahlen dergestalt erweitern, dafs die vier Species mit einer einzigen Ausnahme stets ausführbar sind. Die Gesammtheit der natürlichen Zahlen und der neu zu schaffenden Gröfsen nennen wir das in Beziehung auf die vier Species geschlossene System der rationalen Zahlen. Die hierzu erforderlichen Definitionen und Beweise lassen sich auf doppelte Weise anordnen, je nachdem das System

der natürlichen Zahlen zuerst in Bezug auf die Subtraction oder die Division erweitert wird. Für uns ist der letztere Weg etwas bequemer.[6])

Die Untersuchung zerfällt in vier Theile.

I. Aufstellung der absoluten gebrochenen Zahlen. Es seien nun die Gröfsen (I) $a, b, c \ldots$ die natürlichen Zahlen. Die Gleichung $x \cdot b = a$ hat nach II, 8 entweder eine einzige oder gar keine Lösung unter den natürlichen Zahlen, wie die Theorie in Nr. 7 verlangt.

1. Definition. „In dem Falle, dafs die natürliche Zahl a durch eine andere b nicht theilbar ist, soll ein und nur ein neues Ding existiren, das mit $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ bezeichnet wird und der Gleichung $b \cdot (a : b) = (a : b) \cdot b = a$ genügt."

2. Definition. „Es seien zwei dieser Dinge $a : b$, $a' : b'$ einander gleich, wenn $a \cdot b' = a' \cdot b$."

3. Definition. „Die neue Gröfse $a : b$ heifst gröfser oder kleiner als c, je nachdem a gröfser oder kleiner als $b \cdot c$ und zugleich die letztere kleiner oder gröfser als die erstere. Von den neuen Gröfsen $a : b$, $a' : b'$ heifst die erste die gröfsere oder kleinere, je nachdem $a \cdot b' \gtrless a' \cdot b$." (Vgl. Nr. 10.)

Die neuen Gröfsen $a : b$, welche im folgenden mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ bezeichnet werden, bilden im Verein mit den natürlichen Zahlen das System der absoluten rationalen Zahlen. Den ersteren gegenüber heifsen sie gebrochene Zahlen oder eigentliche Brüche. Oefters werden übrigens $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ absolute rationale Zahlen im Allgemeinen bedeuten.

Im Bruche $a : b$ heifst a auch Zähler, b auch Nenner. Falls $a > b$, also $a : b > 1$, so heifst der Bruch unecht; falls $a < b$, also $a : b < 1$, so heifst er echt.

Die Zahl $a : b$ ist gleich $ma : mb$. Ist m der gröfste gemeinschaftliche Theiler von a', b' so dafs $a' = ma$ $b' = mb$, worin a, b relativ prim sind, so folgt $a' : b' = a : b$. Jeder Quotient, in welchem Dividend und Divisor einen von der Einheit verschiedenen Theiler gemein haben, ist gleich einem solchen, in welchem Dividend und Divisor relativ prim sind.

Er heifst die reducirte Form desselben und giebt seinen Werth an.

„Sind zwei reducirte Quotienten $a:b$, $a':b'$ einander gleich, so mufs $a'=a$, $b'=b$ sein.“ Denn aus $ab'=a'b$ folgt, da b relativ prim zu a, dafs a' ein Vielfaches von a sein mufs: $a'=ma$. Setzt man diesen Werth für a' in der vorstehenden Gleichung ein, so ergiebt sich unmittelbar $b'=mb$. Allein da a' b' relative Primzahlen sind, so mufs $m=1$ sein. Aus dem soeben Bemerkten folgt noch: „Ist ein nicht reducirter Bruch $a':b'$ gleich dem reducirten $a:b$, so mufs $a'=ma$, $b'=mb$ d. h. b' dasselbe Vielfache von b, wie a' von a sein.“

Zwei oder mehrere gebrochene Zahlen können stets solchen Brüchen gleichgesetzt werden, die denselben Nenner haben. Sind die Brüche in reducirter Form $\frac{p}{q}\frac{p'}{q'}\ldots$, so können sie verwandelt werden in $\frac{mp}{mq}, \frac{m'p'}{m'q'}, \ldots$ Soll

$$mq=m'q'=\ldots=N$$

sein, so mufs N ein gemeinsames Vielfache der Nenner q, q' ... sein, was auch ausreicht.

Von zwei Brüchen mit gleichem Nenner ist derjenige gröfser, welcher den gröfseren Zähler hat; von zwei Brüchen mit gleichem Zähler ist derjenige gröfser, welcher den kleineren Nenner hat.

Nach dem Verfahren in Nr. 7 ergiebt sich als

4. Definition

$$(a:b)\cdot c=c\cdot(a:b)=ac:b$$

$$(a:b)\cdot(a':b')=aa':bb',$$

worin $(a:b)$, $(a':b')$ zunächst eigentliche Brüche sein sollen.

Nachdem dieses festgesetzt ist, ergiebt sich zufolge der Sätze VI. und VII. unmittelbar, dafs die Division in jedem Falle möglich und eindeutig sei und daher alle Regeln, die uns bei der Multiplication und Division der ganzen Zahlen in II. 6, 8 entgegengetreten sind, für die rationalen Zahlen beibehalten werden können und zwar in dem Sinne, dafs sie jetzt allgemeine Giltigkeit besitzen.

Modulus der Multiplication ist 1, also eine Gröfse des ursprünglichen Systemes. a und $1:a$, $a:b$ und $b:a$ sind reciproke (inverse) Zahlen, und ungleich im ersten Falle wenn a nicht 1; im zweiten, wenn a und b ungleich. — Mit einem Bruche wird dividirt, indem man mit der inversen Zahl multiplicirt.

12. II. Addition und Subtraction der absoluten rationalen Zahlen. Wie die Summe zweier Brüche mit demselben Nenner zu definiren ist, legt die vorletzte Formel in II. 8 nahe.

Satz. „Bringt man zwei Brüche α, β auf einen gemeinsamen Nenner: $\alpha = m:n$, $\beta = p:n$, so ist der Werth des Bruches $(m+p):n$ von der Wahl des Nenners n unabhängig."

Denn ist auch

$$\alpha = m' : n' \qquad \beta = p' : n'$$

so hat man

$$mn' = m'n \qquad pn' = p'n,$$

also

$$n(m+p) = n(m'+p')$$

d. h.

$$(m'+p') : n' = (m+p) : n.$$

5. Definition. „Unter der Summe $\alpha+\beta$ verstehen wir den soeben erwähnten Bruch $(m+p):n$."

Die Bezeichnung „Summe" ist völlig gerechtfertigt. Man hat nämlich

1) $\alpha+\beta = \beta+\alpha$.

2) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, wie sofort sich ergiebt, wenn man die drei Brüche auf den gemeinsamen Nenner n bringt.

3) Aus $\alpha = \alpha'$ folgt $\alpha+\beta = \alpha'+\beta$. — Bringt man $\alpha\ \beta'$ auf einen gemeinsamen Nenner n, so ist $\alpha = \alpha' = m:n$.

4) $\alpha+\beta > \alpha$.

5) Aus $\alpha > \alpha'$ folgt $\alpha+\beta > \alpha'+\beta'$. — Ist n ein gemeinsamer Nenner von $\alpha, \alpha', \beta\ \ \alpha' = m':n$, so ist $m > m'$, also $m+p > m'+p$.

Satz. „Die Gleichung $\beta+\xi = \alpha$ hat eine und nur eine Lösung für ξ wenn $\alpha > \beta$, keine wenn $\alpha \leqq \beta$."

Ist $\alpha > \beta$, so genügt es $\xi = \frac{m-p}{n}$ $(m > p)$ zu setzen. Die Eindeutigkeit der Differenz folgt unmittelbar aus Satz 5.

Nunmehr können wir nach Satz III. und IV. schliefsen, dafs die Regeln über Addition und Subtraction der natürlichen Zahlen, die wir in II, 3—5 kennen gelernt haben, unverändert für die absoluten rationalen Zahlen gelten, da die Bedingung, unter welcher die Differenz als möglich erscheint, formell dieselbe geblieben ist.

Noch zu erweisen sind die Regeln über die Multiplication und Division der Summen und Differenzen von rationalen Zahlen (vgl. II. 7).

1) $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$. — Nach dem Vorstehenden hat man

$$\alpha + \beta = (m + p) : n,$$

also wenn $\gamma = q : r$,

$$(\alpha + \beta)\,\gamma = q\,(m + p) : nr = (qm + qp) : nr$$
$$= qm : nr + qp : nr.$$

Aus diesem Satze folgen nach Satz V. die a. a. O. aufgestellten Regeln über die Multiplication der Summen und der Satz

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}.$$

2) Ist $\alpha > \beta$, so ist $(\alpha - \beta)\,\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma$. Beweis wie bei der vorhergehenden Formel. Nun ergiebt sich zunächst wie a. a. O. die Formel

$$\alpha > \beta \quad \gamma > \delta \quad (\alpha - \beta)\,(\gamma - \delta) = \alpha\gamma - \beta\gamma + \beta\delta - \alpha\delta$$

und nach Satz V. 4)

$$\alpha > \beta \quad \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}.$$

Satz. „Wenn $\alpha > \beta$ ist, so ist α entweder gleich dem Producte von β mit einer natürlichen Zahl g oder es läfst sich in einziger Weise auf die Form bringen $\alpha = g\beta + \varrho$, wo g wieder eine natürliche Zahl und der Rest $\varrho < \beta$ ist, so dafs nun $g\beta < \alpha < (g + 1)\,\beta$." — Bringt man nämlich α β auf einen gemeinsamen Nenner n, so dafs $\alpha = m : n$, $\beta = p : n$, so ist $p < m$, somit ist nach II, 8 m entweder ein Vielfaches von p $(m = gp)$ oder $m = gp + r$, wo r eine natürliche Zahl $< p$. Im ersten Falle hat man $\alpha = g\beta$, im zweiten $\alpha = g\beta + r : n$, wo $r : n < \beta$

— Setzt man in diesem Satze $\beta = 1$, so erhält man die Zerlegung des unechten Bruches α in eine ganze Zahl und einen echten Bruch als Rest.

13. III. Einführung der Null und der negativen Zahlen. Die Gleichung $\beta + \xi = \alpha$ hat im Systeme der absoluten rationalen Zahlen entweder eine einzige oder gar keine Lösung; demnach können die Definitionen von Nr. 7 und 10 nochmals benutzt werden.

6. Definition. „Im Falle dafs $\alpha \leqq \beta$, wird ein neues Ding angenommen und mit $\alpha - \beta$ bezeichnet, das die Gleichung $\beta + (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) + \beta = \alpha$ befriedigt."

7. Definition. „Es seien zwei dieser Dinge $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ einander gleich, wenn $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$." — Ist $\alpha = \beta$, so mufs also $\alpha' = \beta'$; wenn $\alpha < \beta$, so $\beta - \alpha = \beta' - \alpha'$ sein.

8. Definition. „Die neue Gröfse $\alpha - \beta$ heifst kleiner als eine jede Zahl γ und letztere gröfser als die erstere (wegen $\beta + \gamma > \alpha$). Von den neuen Gröfsen $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ heifst die erste gröfser oder kleiner als die zweite, je nachdem $\alpha + \beta' \gtrless \alpha' + \beta$."

Der Modulus der Addition d. i. die neue Gröfse $\alpha - \alpha$ heifst Null und erhält das Zeichen 0. Die übrigen neuen Gröfsen heifsen negative rationale Zahlen. Die neuen Gröfsen bilden mit den bereits definirten zusammen das System der rationalen Zahlen. Im Folgenden werden $A, B, \Gamma \ldots$ neue Gröfsen, manchmal aber auch rationale Zahlen im Allgemeinen bedeuten.

9. Definition. „Wenn $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ neue Gröfsen bedeuten, so soll sein

$$(\alpha - \beta) + \gamma = \gamma + (\alpha - \beta) = (\alpha + \gamma) - \beta$$
$$(\alpha - \beta) + (\alpha' - \beta') = (\alpha + \alpha') - (\beta + \beta')."$$

Nach diesen Annahmen ergiebt sich zufolge der Sätze VI. und VII. sofort, dafs die Addition associativ und commutativ und die Subtraction in jedem Falle möglich und eindeutig sei und daher die schon in Nr. 12 erwähnten Additions- und Subtractionssätze uneingeschränkte Giltigkeit erlangt haben. Eine Ausnahme hiervon bildet ausschliefslich der Satz 4). Jetzt haben wir nämlich: „Es ist $A + B \gtrless A$,

je nachdem $B \gtrless 0$ d. i. B positiv oder negativ ist" zufolge des neuen Satzes 5).

Wenn $\alpha - \beta$ eine negative Zahl, also $\alpha < \beta$ ist, so ist die zu ihr reciproke $\beta - \alpha$ eine absolute Zahl γ. Die Differenz $\alpha - \beta = 0 - \gamma$ stellt somit sämmtliche negative Zahlen vor. Das System der rationalen Zahlen besteht aufser der 0 aus zwei Reihen von Zahlen, den absoluten oder positiven und den negativen, von welchen eine jede zu einer der ersteren reciprok ist und ihr entgegengesetzt heifst. Die natürlichen Zahlen und die ihnen entgegengesetzten bilden mit der 0 das System der algebraischen ganzen Zahlen.

Es ist üblich, 0 am Beginne eines jeden Aggregates zu unterdrücken. So bezeichnet man die negative Zahl $0 - \gamma$ mit $-\gamma$. Dann schreibt man, wenn man den Gegensatz zwischen ihr und der positiven γ hervorheben will, statt γ, $+\gamma$. Demgemäfs kommen an einer rationalen Zahl $\pm\gamma$ in Betracht der absolute Betrag γ und das Zeichen: $+$ oder $-$, welche man jedoch nicht mit den Operationszeichen $+$ und $-$ verwechseln darf. Zur Vermeidung von Unterscheidungen legt man auch der Null einen absoluten Betrag bei, nämlich 0 und nennt ihn kleiner als jeden anderen. — Ist $m : n$ die reducirte Form von γ, so giebt $-\frac{m}{n}$ den Werth der negativen Zahl $-\gamma$ an. — Bedeutet A eine beliebige von 0 verschiedene rationale Zahl, so wird auch unter $-A$ die Differenz $0 - A$ verstanden. Man hat $-(-A) = A$.

Die Sätze in Nr. 8 und 9 liefern die praktischen Regeln für die Addition und Subtraction der rationalen Zahlen. „Die Summe gleichbezeichneter rationalen Zahlen wird erhalten, indem man ihre absoluten Beträge addirt und dieser Summe das gemeinschaftliche Zeichen der Addenden vorsetzt." — „Die Differenz zweier rationalen Zahlen wird gebildet, indem man zum Minuend die dem Subtrahend entgegengesetzte Zahl addirt." Daraus folgt, dafs $A - B >$ oder < 0, je nachdem $A >$ oder $< B$. — „Die Summe mehrerer rationalen Zahlen $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ wird berechnet, indem man zunächst die gleichbezeichneten Glieder addirt und wenn die absoluten Beträge dieser Summen vom einander verschieden sind, den kleineren von gröfseren abzieht und dem Reste das Zeichen des gröfseren vorsetzt. Sind die genannten Summen aber einander gleich, so ist der Ausdruck gleich 0."

$|A|$ bedeutet den absoluten Betrag der rationalen Zahl A.

1. Satz. Der absolute Betrag der Summe von rationalen Zahlen kann nicht gröfser sein als die Summe der absoluten Beträge derselben.

Der Satz gilt allgemein, wenn er für ein Binom richtig ist. Dafs aber $|A+B| \leq |A| + |B|$, folgt aus dem Vorstehenden unmittelbar.

2. Satz. Ist $|A| > |B|$, so ist der absolute Betrag von $A+B$ nicht kleiner als $|A| - |B|$.

14. IV. Multiplication und Division der rationalen Zahlen. Um an den bisherigen Formeln nach Möglichkeit festzuhalten, müssen wir die Regeln in Nr. 12 über die Multiplication von Differenzen zur Definition der neuen Producte verwenden.

10. Definition. „Bedeuten $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ Null oder negative Zahlen, so sei

$$(\alpha - \beta) \cdot \gamma = \gamma \cdot (\alpha - \beta) = \alpha\gamma - \beta\gamma \qquad (1)$$

$$(\alpha - \beta) \cdot (\alpha' - \beta') = (\alpha\alpha' + \beta\beta') - (\alpha\beta' + \beta\alpha'), \qquad (2)$$

worin die rechten Seiten durch jede ihnen bez. gleiche Zahl ersetzt werden können."

Satz. „Unter Voraussetzung der vorstehenden Formeln erweist sich das Product $A \cdot B$ als eine ausnahmslos commutative und associative Verknüpfung. — Es besteht ferner der Satz: „Neben $A = A'$ ist $A \cdot B = A' \cdot B$." (3) — Endlich sind erfüllt beide Seiten des distributiven Principes

$$(A \pm B) \cdot \Gamma = \Gamma \cdot (A \pm B) = A \cdot \Gamma \pm B \cdot \Gamma." \qquad (4)$$

Beweis. Dafs $AB = BA$, folgt aus dem Anblicke der Formeln (1), (2). Der Nachweis der Relation

$$(AB)\,\Gamma = A\,(B\Gamma) \qquad (5)$$

verlangt zunächst die Unterscheidung der in der Tafel (5) von Nr. 7 aufgeführten acht Fälle und die Ausdehnung der Formel (2) auf den Fall, dafs $\alpha - \beta$ eine positive, $\alpha' - \beta'$ Null oder eine negative rationale Zahl bedeutet. Das ergiebt sich hier unmittelbar, denn man hat, $\alpha - \beta = \gamma$ gesetzt, nach (1)

$$(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta') = \delta(\alpha' - \beta') = \delta\alpha' - \delta\beta'$$
$$= (\alpha - \beta)\alpha' - (\alpha - \beta)\beta' \qquad (5^*)$$
$$= (\alpha\alpha' - \beta\alpha') - (\alpha\beta' - \beta\beta') = (\alpha\alpha' + \beta\beta') - (\alpha\beta' + \beta\alpha')$$

Dieses vorausgesetzt, folgt (5) sofort. Sind z. B. A, B, 1 sämmtlich nicht positiv und

$$A = \mu - \nu, \qquad B = \pi - \varkappa, \qquad \Gamma = \varrho - \sigma,$$

so folgt

$$AB = (\mu\pi + \nu\varkappa) - (\mu\varkappa + \nu\pi)$$

und

$$(AB)\Gamma = (\mu\pi\varrho + \mu\varkappa\sigma + \pi\sigma\nu + \varrho\nu\varkappa) - (\nu\varkappa\sigma + \nu\pi\varrho + \varkappa\varrho\mu + \sigma\mu\pi)$$

Der Ausdruck ändert sich bei Vertauschung der Paare $\mu\nu$, $\pi\varkappa$, $\varrho\sigma$ untereinander nicht, läfst sich somit auch als $(B\Gamma)A$ auffassen. Mit Rücksicht auf den folgenden Satz kann man diese Erörterung auch für die übrigen Fälle gelten lassen, da ja auch jede positive Zahl als eine Differenz darstellbar ist.

Beim Beweise des Satzes (3) sind die ebenfalls in Nr. 7 aufgeführten vier Fälle zu unterscheiden. Wenn z. B. A, B beide nicht positiv sind, so sei $A = \mu - \nu$, $A' = \mu' - \nu'$ und $\mu + \nu' = \mu' + \nu$. Man findet

$$AB = (\mu\pi + \nu\varkappa) - (\nu\pi + \mu\varkappa)$$
$$A'B = (\mu'\pi + \nu'\varkappa) - (\nu'\pi + \mu'\varkappa)$$

und da

$$(\mu + \nu')\pi + (\mu' + \nu)\varkappa = (\mu' + \nu)\pi + (\mu + \nu')\varkappa$$
$$(\mu\pi + \nu\varkappa) + (\nu'\pi + \mu'\varkappa) = (\mu'\pi + \nu'\varkappa) + (\nu\pi + \mu\varkappa),$$

schliefslich $AB = A'B$.

Bezüglich der Formel (4) sind die acht oben erwähnten Fälle auseinander zu halten. Es genügt übrigens für A, B, Γ beliebige Differenzen zu setzen. Man findet dann nach (2), bez. (5*)

$$(A + B)\Gamma = \{(\mu + \pi) - (\nu + \varkappa)\}(\varrho - \sigma)$$
$$= [\varrho(\mu + \pi) + \sigma(\nu + \varkappa)] - [\varrho(\nu + \varkappa) + \sigma(\mu + \pi)]$$
$$= [(\varrho\mu + \sigma\nu) - (\varrho\nu + \sigma\mu)] + [(\varrho\pi + \sigma\varkappa) - (\varrho\varkappa + \sigma\pi)] = A\Gamma + B\Gamma.$$

Vertauscht man hier π und $\varkappa$, so erhält man wegen

$$\varkappa - \pi = -B \qquad (A - B)\,\Gamma = A\Gamma - B\Gamma.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$(A - B)(A' - B') = AA' - BA' - AB' + BB'. \quad (6)$$

Setzt man in (1), (2) $\alpha = \beta$, so folgt die Formel

$$0 \cdot A = A \cdot 0 = 0, \quad (7)$$

worin A jede rationale Zahl sein kann. Ist $\alpha - \beta$ negativ, also $\beta = \alpha + \delta$, und $\beta\gamma = \alpha\gamma + \delta\gamma$, so zeigt (1), dafs

$$(-\delta)\,\gamma = \gamma\,(-\delta) = -\delta\gamma. \quad (8)$$

Ist auch $\alpha' - \beta'$ negativ, also $\beta' = \alpha' + \delta'$, sodafs

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \alpha\beta' + \beta\alpha' + \delta\delta',$$

so ergiebt sich aus (2)

$$(-\delta)(-\delta') = \delta\delta'. \quad (9)$$

Die Formeln (7)—(9) enthalten die Regeln über die Bildung der Producte rationaler Zahlen. Aus ihnen folgt der wichtige Satz: Ist ein Product $AB = 0$, so mufs mindestens einer der Factoren gleich 0 sein. Denn ist keiner derselben 0, so auch das Product nicht.

Die Formeln (8) und (9) gestatten die Verallgemeinerung zur algebraischen Zeichenregel: „Gleiche Zeichen geben bei der Multiplication $+$, ungleiche $-$“ d. h.

$$(-A)\,B = B\,(-A) = -AB, \qquad (-A)(-B) = -AB,$$

worin AB beliebige von Null verschiedene rationale Zahlen bedeuten. Diese Formeln können aus (4) und (6) mittelst (7) abgeleitet werden:

$$(0 - A)\,B = 0 \cdot B - A \cdot B = 0 - AB = -AB;$$

$$(0 - A)(0 - B) = 0 + AB = AB.$$

Division. „Die Gleichung

$$XB = A \quad (10)$$

hat, wenn B nicht 0 ist, eine und nur eine Auflösung $X = A : B$.“ — Ist $A = 0$, so mufs $X = 0$ sein. Ist aber

A nicht 0, so sind mit Rücksicht auf das Zeichen von A, B vier Fälle möglich, in deren jedem der Satz unmittelbar sich ergiebt. Sind z. B. A, B beide negativ

$$A = -\gamma, \quad B = -\delta,$$

so mufs X positiv sein: $X = \xi$ und weiter $\xi\delta = \gamma$ sein. Demnach mufs $X = \frac{\gamma}{\delta}$ sein, welche Zahl in der That der vorgelegten Gleichung genügt. — So findet man ferner

$$\frac{-\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{-\delta} = -\frac{\gamma}{\delta}.$$

Wenn in 10) $A = B = 0$, so kann X jede beliebige Zahl sein nach 7). Der Quotient $0:0$ ist vieldeutig und daher unbrauchbar.

Die Gleichung $X \cdot 0 = A$, wo $A \gtrless 0$, hat nach 7) keine Lösung unter den rationalen Zahlen. Man könnte nun meinen, dafs das System derselben noch einer Erweiterung fähig sei. Nach Nr. 7 würde man zunächst festsetzen, indem $A \cdot 0 = 0 \cdot B$, dafs die Quotienten $A:0$, was auch A aufser 0 sein mag, einander gleich seien. Hierauf wäre die Multiplication von $A:0$ mit einer rationalen Zahl B durch die Formel

$$(A:0) \cdot B = A \cdot B:0$$

zu definiren, welche aber für $B = 0$ $0:0$, also nichts brauchbares liefert. Wir sehen daher von der Schaffung neuer Gröfsen $A:0$ ab und erklären die Division durch die Zahl 0 für unmöglich.

Zufolge der Sätze III. und V. gelten nunmehr auch für die rationalen Zahlen die schon in Nr. 11 und 12 erwähnten Regeln über die Multiplication und Division, abgerechnet jedoch die Ungleichungen in II. 6, 8, und zwar allgemein mit der einzigen Beschränkung, dafs kein Divisor Null sein darf.

Hinsichtlich der Ungleichungen beschränken wir uns auf den Satz: „Ist $A > A'$ und β eine positive Zahl, so ist sowol $A\beta > A'\beta$ als auch $A:\beta > A':\beta$.“ Man kann die Glieder jeder Ungleichung zwischen rationalen Zahlen mit einer positiven Zahl multipliciren oder durch eine solche divi-

diren. — Der Satz folgt daraus, dafs sowol $(A - A')\beta$, als auch $(A - A') : \beta$ positiv ist.

Satz. „Ist A eine beliebige rationale, β irgend eine positive Zahl, so ist A entweder das Product von β mit einer ganzen Zahl oder es läfst sich A in einziger Weise auf die Form bringen $A = G \cdot \beta + \varrho$, worin G eine ganze und ϱ eine positive Zahl kleiner als β bedeutet; demnach liegt A zwischen $G\beta$ und $(G + 1)\beta$. Wenn ϱ von $\frac{1}{2}$ verschieden ist, so hat man in einziger Weise auch $A = G' \cdot \beta + P$, unter G' eine ganze, unter P eine rationale Zahl zwischen $-\frac{1}{2}\beta$ und $\frac{1}{2}\beta$ verstanden." — Wenn $A < 0$ und $|A| : \beta$ keine ganze Zahl ist, so hat man $A : \beta = -m : n = -\left(g + \frac{r}{n}\right)$, wo $1 \leqq r < n$, also $A = (-g - 1)\beta + \varrho$, sodafs $0 < \varrho < \beta$. — Ist $\varrho > \frac{1}{2}\beta$, so setzt man die erstere Form in $A = (G + 1)\beta + (\varrho - \beta)$ um.

15. Wenn man bei Ertheilung der Prädicate gröfser und kleiner sich ausschliefslich an die Bedingungen 1)—5) in I. 3 halten würde, so könnten dieselben den rationalen Zahlen noch in anderer Weise verliehen werden, als es in Nr. 13 geschehen ist. Wir dürfen dann auch festsetzen: „Unter je zwei rationalen Zahlen von verschiedenem absoluten Betrage heifse diejenige gröfser, welcher der gröfsere absolute Betrag zukommt. Und von je zwei entgegengesetzten Zahlen sei die positive gröfser. Endlich heifse jede von 0 verschiedene Zahl gröfser als 0." — Aber unter dieser Voraussetzung würde der Satz: „Ist $A > A'$ so ist $A + B > A' + B$" nicht mehr allgemein gelten. Daher kann die neue Ansicht nicht zugelassen werden.

16. Es ist nun ein System von Zahlen aufgestellt, in welchem die vier Species mit alleiniger Ausnahme der Division durch Null stets ausführbar sind; sonst gelten alle Regeln und Formeln ohne irgend eine Einschränkung. Aus diesem Grunde kann man die rationalen Zahlen auch algebraische nennen; denn erst jetzt ist das Rechnen mit Buchstaben, die nicht eine bestimmte darunter bedeuten, möglich geworden.

Sowie das System der rationalen Zahlen hier abgeleitet worden ist, besteht es aus zwei verschiedenartigen Theilen. Der eine, die natürlichen Zahlen, hat nach dem II. Abschnitte eine reale Bedeutung; der andere existirt nur auf dem Papiere. Die Zahl $\frac{2}{3}$ ist nichts anderes als dieses Zeichen, die Zahl 0 nichts anderes, als eines der Zeichen $1 - 1$, $2 - 2 \ldots$ u. s. f. Es ist indefs nicht schwer, diese Ungleichheit in dem Sinne zu beheben, dafs auch die natürlichen Zahlen als

ein System von gesetzmäfsig vermittelst der beiden Zeichen 1 und + gebildeten Zeichen erscheinen.[7])

Wir erklären die Zahlen 2, 3 ... durch die Formeln $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, ... und setzen fest, dafs jede Zahl gröfser sei als die vorhergehenden.

Die Herstellung der Summe $a + b$ und einer associativen und commutativen Addition verlangt nur die Annahme

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \qquad (I)$$

d. i. eines speciellen Falles des associativen Gesetzes. Nun läfst sich jede Summe recurrent berechnen (II. 3). Auch gilt die Formel

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad (\alpha)$$

allgemein, wie leicht durch den Schlufs von n auf $n + 1$ erhellt. Ist sie nämlich richtig, sowie sie in der That für $c = 1$ gilt, so hat man nach (I)

$$(a + b) + (c + 1) = [(a + b) + c] + 1$$
$$a + [b + (c + 1)] = a + [(b + c) + 1] = [a + (b + c)] + 1$$

d. i.

$$(a + b) + (c + 1) = a + [b + (c + 1)].$$

Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, dafs allgemein $a + b = b + a$.

Um das Product blofs als Zeichen zu erklären, setzt man fest, dafs

$$a = a \cdot 1 \quad a + a = a \cdot 2 \quad a \cdot 2 + a = a \cdot 3 \ldots\ldots \quad a \cdot b + a = a \cdot (b + 1),$$

wornach man jedes Product $a \cdot b$ recurrent finden kann. Dann ergeben sich nach einander durch den Schlufs von n auf $n + 1$ die beiden distributiven, das associative und commutative Gesetz der Multiplication d. h. die Formeln

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (ab) \cdot c = a \cdot (bc) \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

Z. B. nehmen wir die erste Formel als richtig an, wie sie es für $c = 1$ ist, so folgt nach (I) und (α)

$$a \cdot [b + (c + 1)] = a \cdot [(b + c) + 1] = a \cdot (b + c) + a \cdot 1$$
$$= (a \cdot b + a \cdot c) + a \cdot 1 = a \cdot b + (a \cdot c + a \cdot 1) = a \cdot b + a \cdot (c + 1)$$

u. s. w.

Verbindet man diese Darstellung der Lehre von den natürlichen Zahlen mit den Entwickelungen in Nr. 11—14, so hat man eine Theorie der rationalen Zahlen, die lediglich vermittelst formaler Gesichtspunkte systematisch abgeleitet ist. Der Grundgedanke derselben, von einem gegebenem Gröfsensysteme zu einem weiteren, es umfassenden Begriffe dadurch aufzusteigen, dafs neue Objecte gesetzt und mit verständlichen Prädicaten ausgestattet werden, gehört schon dem

Alterthume an; hierin aber soweit zu gehen, dafs man mit den neuen Gröfsen so rechnen kann, wie mit den ursprünglichen, ist eine moderne Anwendung der alten Idee. Mit Recht kann man diese Theorie als analytisch bezeichnen im Gegensatze zu der im nächsten Abschnitte vorzuführenden Darstellung, welche zur Summe und zum Producte zweier rationalen Zahlen durch geometrische Betrachtungen gelangt. Während für sie die Addition und Multiplication eine anschauliche Bedeutung haben, so sind sie hier blofse Gröfsenverknüpfungen, deren Natur die ihnen auferlegten formalen Gesetze bestimmen. Wir fordern übrigens nicht immer das Bestehen aller bisher beobachteten Gesetze; es soll vielmehr für die Addition das associative und für die Multiplication, der stets eine Addition der betrachteten Gröfsen vorausgehen mufs, die eine der beiden Seiten des distributiven genügen.

17.[8]) Nachdem die Theorie der rationalen Zahlen vollendet ist, erhebt sich sofort eine unabsehbare Menge von Aufgaben, welche durch keine von ihnen gelöst werden. In der Regel wird es nämlich nicht möglich sein, eine rationale Zahl X zu bestimmen, welche die Gleichung

$$A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \ldots + A_{m-1} X + A_m = 0 \qquad (1)$$

erfüllt, worin $A_0, A_1 \ldots A_m$ ganze Zahlen und X^r wie in II. 9 das Product von r Factoren X bedeutet. Schon die reine Gleichung $X^m = \alpha$, worin α, sowie im Folgenden β, $\gamma \ldots$, eine positive rationale Zahl ist, hat keine rationale Auflösung, wenn α nicht die m^{te} Potenz einer solchen Zahl ist. Sind nämlich in reducirter Form $\alpha = p : q$ und $X = x : y$, so hat man $qx^m = py^m$, also mufs, da x^m y^m relative Primzahlen sind (II. 11), q ein Vielfaches von $y^m : q = ky^m$ und somit $p = kx^m$, also, da p q relative Primzahlen sind, $k = 1$ sein. Somit ergiebt sich $p = x^m$ $q = y^m$.

Man wird versuchen, neue Zahlen einzuführen, welche die noch ungelösten Gleichungen befriedigen und mit welchen zugleich so gerechnet werden kann wie mit den rationalen.

Zunächst nimmt man an, es gebe eine und nur eine Zahl, die absolute Quadratwurzel $\sqrt{\alpha}$, welche die Gleichung $X^2 = \alpha$ erfüllt; Quadratwurzeln aus gleichen rationalen Zahlen seien einander

gleich und es sei $\sqrt{\alpha} \gtrless \gamma$, je nachdem $\alpha \gtrless \gamma^2$ und $\sqrt{\alpha} \gtrless \sqrt{\beta}$, je nachdem $\alpha \gtrless \beta$. Hierauf sind die vier Species für die neuen Zahlen zu untersuchen und zwar ist zuerst die Multiplication zu erklären, was durch die Formeln

$$\sqrt{\alpha} \cdot \gamma = \gamma \cdot \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha\gamma^2} \qquad \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$$

geschieht. Die Summe

$$\sqrt{\alpha} + \gamma = \gamma + \sqrt{\alpha}$$

sei eine neue Zahl, desgleichen

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha},$$

abgerechnet $\varkappa\sqrt{\varrho} + \lambda\sqrt{\varrho}$, welche Summe durch $(\varkappa + \lambda)\sqrt{\varrho}$ erklärt wird. Und es sei $\sqrt{\alpha} + \gamma = \sqrt{\alpha'} + \gamma'$ dann und nur dann, wenn $\alpha = \alpha'$ $\gamma = \gamma'$; $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha'} + \sqrt{\beta'}$ dann und nur dann, wenn $\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$. Die weitere Vergleichung dieser neuen Zahlen unter einander und mit den positiven rationalen setzt die Kenntnifs des Satzes: „Zu jeder rationalen Zahl $\varepsilon > 0$ gehören rationale Zahlen $\xi > 0$, sodafs $|\xi^m - \alpha| < \varepsilon$" voraus, den man mittelst der Formeln in VIII. 4 leicht beweisen wird. In der That genügt nun die Annahme: „Ist $\sqrt{\alpha} \gtrless \alpha'$ und entsprechend $\sqrt{\beta} \gtrless \beta'$, so sei auch

$$\sqrt{\alpha} + \gamma \gtrless \alpha' + \gamma \quad \text{und} \quad \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \gtrless \alpha' + \beta'."$$

Auch die dreigliederigen Summen, wie

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) + \sqrt{\gamma} = \sqrt{\alpha} + (\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}),$$

müfsten im Allgemeinen als neue Zahlen eingeführt werden u. s. f. Ist endlich jeder neuen Zahl die ihr entgegengesetzte zugeordnet, so darf man mit den Quadratwurzeln so rechnen, wie mit den rationalen Zahlen.

Ähnlich müfsten nacheinander die dritten, vierten ..... Wurzeln geschaffen werden, entsprechend den Gleichungen $X^3 = \alpha$, $X^4 = \alpha$.... Dann wären auch andere Gleichungen (1) in Betracht zu ziehen, wobei es, wie bei $X^2 + \alpha^2 = 0$, vorkommen kann, dafs man die Vergleichung der neuen Zahlen mit den rationalen gar nicht zu Stande bringt. — Diejenigen unter den so gewonnenen Zahlen, welche mit den rationalen vergleichbar sind, heifsen irrationale. Hat man irgend welche Classen derselben definirt und mit eigenen Bezeichnungen versehen, so stellen sich ähnliche Aufgaben ein, indem man jetzt annehmen wird, dafs die Coefficienten in (1) Polynome seien, deren Glieder auch die neuen Zahlen ent-

halten. U. s. f. Es ist klar, dafs man nach der bis jetzt befolgten Methode der Zahlenbildung keine Übersicht über die irrationalen Zahlen erlangen kann. Wir werden aber sehen, dafs dieselben sowol bei analytischer als auch bei synthetischer Darstellung aus einer Quelle hergeleitet werden können.

Wenn wir darauf verzichten, das Zahlensystem auf dem angegebenen Wege zu erweitern, so erklären wir damit zugleich, dafs es aufser den vier Species keine Grundoperationen der Arithmetik gebe. Daher werden wir von der dritten Stufe derselben, bestehend aus den Operationen des Potenzirens, Radicirens, Logarithmirens, nicht weiter sprechen. Die Potenz soll vielmehr als eine Function des Exponenten aufgefafst werden (IX. 3).

IV. Abschnitt.

Synthetische Theorie der rationalen Zahlen.

1. Die gebrochenen absoluten Zahlen. Im zweiten Abschnitte, an den dieser unmittelbar angeschlossen werden kann, sind wir von einer Schaar unter sich gleicher Dinge ausgegangen, welche später als benannte Einheiten bezeichnet wurden. Nunmehr nehmen wir an, jedes derselben lasse sich in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zerlegen und die gleichvielten Theile verschiedener Einheiten derselben Art seien auch einander gleich. D. h. alle diese Einheiten sind anzusehen als gleiche Vielheiten von Untereinheiten in beliebiger Anzahl. Indem wir die abstracte Einheit 1 der folgenden Erörterung zu Grunde legen, betrachten wir, was auch b für eine natürliche Zahl > 1 sein mag, 1 als eine Vielheit von b Untereinheiten, deren jede der Stammbruch $\frac{1}{b}$ heifst und schreiben vorläufig, $\frac{1}{b}$ gegenüber 1 als eine neue nach dem „Nenner" b benannte Einheit ansehend,

$$1) \qquad b\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{b}{b} = 1.$$

Zunächst ergeben sich die folgenden Sätze, worin $a, b, c \ldots$ wieder natürliche Zahlen bedeuten.

2) „Jede natürliche Zahl $a > 1$ läfst sich, auch wenn sie kein Vielfaches von b ist, in b gleiche Theile zerlegen und zwar ist ein jeder $\frac{a}{b}$." Denn die aus a Untereinheiten $\frac{1}{b}$ gebildete Menge, welche mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet wird, giebt b-mal gesetzt a Einheiten. D. i.

$$b\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{ab}{b} = a.$$

Auch $\frac{a}{b}$ heifst ein Bruch, b sein Nenner, a sein Zähler.

3) „Das c-fache von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{ac}{b}$."

Wir setzen ferner fest, dafs auch die gleichvielten Theile der von 1 verschiedenen Zahlen einander gleich seien. D. h. Sind

$$q\left(\frac{a}{b}\right) = p \qquad q\left(\frac{a'}{b'}\right) = p,$$

so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Aus den ersteren Gleichungen folgt

$$qa = pb, \qquad qa' = pb',$$

somit

$$qab' = pbb' = qa'b \quad \text{d. i.} \quad ab' = a'b.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich umgekehrt

$$b\left(\frac{a'}{b'}\right) = \frac{a'b}{b'} = \frac{ab'}{b'} = a, \quad \text{also} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}.$$

Demnach sind zwei Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ dann und nur dann einander gleich, wenn $ab' = a'b$. Aus dieser Definition folgt wie in III. 11, dafs gleichen Brüchen eine und dieselbe reducirte Form entspricht. Man hat darnach ferner

4) $$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

5) „Zwei oder mehrere rationale Zahlen lassen sich auf einen gemeinsamen Nenner bringen" d. h. als Vielheiten eines und desselben Stammbruches darstellen. Jedes gemeinschaftliche Vielfache der vorkommenden Nenner liefert einen für alle Zahlen passenden Nenner und wenn die Brüche in die reducirte Form gebracht sind, nur ein solches. Hieraus ergiebt sich nach II. 2 die Vergleichung von je zwei ungleichen absoluten rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$. Indem

$$\frac{a}{b} = \frac{ab'}{bb'}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a'b}{bb'};$$

so ist $\frac{a}{b}$ gröfser oder kleiner als $\frac{a'}{b'}$, je nachdem ab' gröfser oder kleiner $a'b$. Es ist jedoch noch zu zeigen, dafs diese Definitionen von der Wahl des gemeinsamen Nenners unab-

hängig seien. Gehen wir von den reducirten Formen der beiden Zahlen

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{p'}{q'}$$

aus und nehmen z. B. an es sei $pq' > p'q$. Da

$$a = kp \qquad b = kq, \qquad a' = k'p' \qquad b' = k'q';$$

so ergiebt sich aus

$$kk'pq' > kk'p'q \qquad ab' > a'b.$$

6) „Auch die gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$ läfst sich in $d >$ gleiche Theile zerlegen und zwar ist ein jeder der Bruch $\frac{a}{bd}$." — Denn man hat

$$d\left(\frac{a}{bd}\right) = \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}.$$

7) „$\frac{c}{d}$ von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{ac}{bd}$." — Denn man hat

$$\frac{c}{d}\left(\frac{a}{b}\right) = c\left\{\frac{1}{d}\left(\frac{a}{b}\right)\right\} = c\left(\frac{a}{bd}\right) = \frac{ac}{bd}.$$

8) „Jede Zahl $\frac{e}{f}$ läfst sich als Bruch von jeder anderen $\frac{a}{b}$ auffassen." — Zufolge der Gleichung

$$\frac{be}{af}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{e}{f}.$$

2. Die Addition der absoluten rationalen Zahlen wird dadurch ausgeführt, dafs man alle Summanden als Vielheiten einer Untereinheit darstellt d. h. man bringt sie auf einen gemeinsamen Nenner und addirt die neuen Zähler. Dafs der Werth des so erhaltenen Resultates von der Wahl dieses Nenners nicht abhängt, ist bereits III. 12 bemerkt. Wir finden somit die nämlichen Regeln wie bei der Addition der natürlichen Zahlen. Ein Gleiches gilt von der Subtraction der neuen Zahlen.

3. Die Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl lehren die Regeln 1)—3) der Nr. 1, welche wir jetzt so schreiben

$$\frac{1}{b} \cdot b = 1, \quad \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b}, \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}.$$

Die Multiplication mit einem Bruche wird häufig durch die Definition eingeführt: „$\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ multipliciren bedeute, eine Zahl aus $\frac{a}{b}$ so ableiten, wie der Multiplicator $\frac{c}{d}$ aus 1 entstanden ist." Dann zeigt die Formel 7) dafs

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Allein diese Erklärung des genannten Productes ist nicht anschaulich, sondern wieder formal. Synthetisch müfste unser Product als Flächenzahl abgeleitet werden zufolge des Satzes: Theilt man zwei parallele Seiten eines Rechteckes in je a, die beiden andern in je b gleiche Theile und zieht durch die Theilungspunkte Parallele zu den Seiten, so zerfällt das Rechteck in $a \cdot b$ congruente Rechtecke. Jetzt leuchtet ein, dafs $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ der ab^{te} Theil der Flächeneinheit sein mufs u. s. f.[1])

4. Die relativen rationalen Zahlen. Manchmal lassen sich aus den rationalen Zahlen von einer Benennung durch Hinzufügung einer weiteren Bestimmung zwei Reihen von benannten Zahlen ableiten, entspringend aus zwei Einheiten, welchen selbst sowie je zwei Zahlen der beiden Reihen vom nämlichen numerischen Werthe die Eigenschaft beigelegt wird, dafs sie bei ihrer Vereinigung sich vernichten. Daher heifsen je zwei solche Zahlen einander entgegengesetzt oder kürzer „Zahl und Gegenzahl". Beispiele eines solchen Gegensatzes bieten dar: Vermögen und Schulden, die geradlinigen Wege vor- und rückwärts. Von jeder Besonderheit absehend, bezeichnen wir die Einheit mit 1, die Gegeneinheit mit $\bar{1}$; eine Zahl mit a, ihre Gegenzahl mit $\bar{a}$, bez. mit A und $\bar{A}$, wo A sowol der ersten, als auch der zweiten Reihe angehören kann. Zu den so erhaltenen Zahlen fügen wir noch die uneigentliche (formale) Zahl 0, welche sogleich erklärt werden wird. — Wir sagen, zwei relative Zahlen sind einander gleich, wenn sie gleich viele

Einheiten bez. Untereinheiten derselben Reihe enthalten. Die positiven, d. i. die aus 1 entspringenden Zahlen nennen wir gröfser als 0, die negativen d. i. die aus $\overline{1}$ entspringenden kleiner als 0; und jede positive (negative) Zahl gröfser (kleiner) als jede negative (positive). Die positiven Zahlen werden untereinander verglichen wie die absoluten. Von je zwei negativen Zahlen heifst gröfser (kleiner) die Zahl vom kleineren (gröfseren) absoluten Betrage. — Nunmehr folgt aus $A > B$ stets $\overline{A} < \overline{B}$, wenn $A, B \ldots$ beliebige relative Zahlen bedeuten.

5. Die vier Species für die relativen Zahlen. — Die Summe je zweier solcher Zahlen wird folgendermaafsen erklärt. Zunächst sagt man $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ (bez. $A + \overline{A} = 0$). Ferner sei $A + 0 = 0 + A = A$. In den übrigen Fällen hat man aufser dem bereits bekannten $\alpha + \beta$

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \overline{\alpha + \beta}, \quad \alpha + \bar{\beta} = \bar{\beta} + \alpha = \begin{cases} \alpha - \beta, & \text{wenn } \alpha > \beta, \\ \overline{\beta - \alpha}, & \text{wenn } \alpha < \beta. \end{cases}$$

Daraus erkennt man, dafs allgemein

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A + B} \qquad \text{(a)}$$

also $A + B$ und $\overline{A} + \overline{B}$ einander entgegengesetzt seien.

Etwas umständlich gestaltet sich hier der Nachweis, dafs die soeben definirte Verknüpfung unter den neuen Zahlen den formalen Gesetzen der Addition gehorche. Es ergiebt sich zwar sofort, dafs

1) $$A + B = B + A;$$

aber hinsichtlich des Beweises der associativen Formel

2) $$(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$$

sind mehrere Fälle zu unterscheiden. Sie ist offenbar richtig, wenn einer der drei Summanden 0 ist. Ist 0 nicht darunter, so reducirt man die acht, vermöge der Natur der Zahlen $AB\Gamma$ möglichen Fälle zunächst mittelst der Gleichung (a), welche zeigt, dafs neben 2) auch

$$(\overline{A} + \overline{B}) + \overline{\Gamma} = \overline{A} + (\overline{B} + \overline{\Gamma}), \qquad \text{(b)}$$

auf die folgenden drei: $\alpha, \beta, \overline{\gamma}$; $\alpha, \overline{\beta}, \gamma$; $\alpha, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ und diese auf den ersten. Angenommen nämlich, es sei

$$(\alpha + \beta) + \bar{\gamma} = \alpha + (\beta + \bar{\gamma}), \qquad \text{(c)}$$

so hat man

$$(\beta + \alpha) + \bar{\gamma} = (\beta + \bar{\gamma}) + \alpha,$$

also auch

$$(\alpha + \bar{\beta}) + \gamma = (\alpha + \gamma) + \bar{\beta} = \alpha + (\gamma + \bar{\beta}) = \alpha + (\bar{\beta} + \gamma)$$

d. i. der zweite Fall. Endlich folgt aus (c) vermöge (b)

$$(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + \gamma = \bar{\alpha} + (\bar{\beta} + \gamma)$$

oder

$$(\gamma + \bar{\beta}) + \bar{\alpha} = \gamma + (\bar{\beta} + \bar{\alpha})$$

d. i. der dritte Fall. Die Formel (c) mufs durch Berechnung ihrer beiden Seiten verificirt werden. Links steht, je nachdem $\alpha + \beta \gtreqless \gamma$

$$(\alpha + \beta) - \gamma, \quad 0, \quad \overline{\gamma - (\alpha + \beta)}.$$

Ist im ersten Falle $\beta > \gamma$, so kommt auch rechts

$$\alpha + (\beta - \gamma) = (\alpha + \beta) - \gamma$$

u. s. f. — Unmittelbar ergiebt sich: 3) Neben $A = A'$ ist

$$A + B = A' + B.$$

Um den Satz: 4) „Ist $A > A'$, so ist

$$A + B > A' + B,$$"

zu zeigen, sind nach Erledigung der Fälle, wo mindestens eine der Zahlen A, A', B 0 ist, noch sechs zu unterscheiden, welche sich leicht auf den direct zu verificirenden Satz: „Neben $\alpha > \alpha'$ ist

$$\alpha + \bar{\beta} > \alpha' + \bar{\beta}"$$

zurückführen lassen.

Bezüglich der Subtraction gilt wieder das in III. 13 Gesagte. Die Gleichung $X + B = A$ wird gelöst durch die Zahl $X = A + \overline{B}$ und in Folge des Satzes 4) nur durch sie. Es ist $\overline{A} = 0 - A$, wofür man $-A$ schreibt.

Das Product $A \cdot B$ wird in der Regel durch die Definition: „A mit B multipliciren bedeute, aus der Zahl A und ihrer Gegenzahl $-A$ eine Zahl so ableiten, wie der Multiplicator B aus der Einheit und der Gegeneinheit entstanden ist" eingeführt. Dieses Verfahren hat, den Fall ausgenommen dafs B eine natürliche Zahl ist, eigentlich formalen Charakter.[2])

6. Die systematischen Brüche. — Versteht man wie in II. 10 unter e eine natürliche Zahl $\geqq 2$, unter c_0 eine ganze Zahl $\gtreqless 0$, unter $c_1, c_2 \ldots c_m$ Ziffern d. i.

$$0 \leqq c_n \leqq e-1;$$

so nennt man den Bruch

$$A = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_m}{e^m} \qquad (1)$$

einen systematischen. Bricht man bei dem Gliede

$$c_n : e^n \ (n < m)$$

ab, so ist der Rest kleiner als $1 : e^n$. Mit Hilfe der leicht zu beweisenden Formel (vgl. VIII. 1)

$$(\omega \gtrless 1) \quad \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} \qquad (2)$$

findet man nämlich

$$\frac{c_{n+1}}{e^{n+1}} + \cdots + \frac{c_m}{e^m} < \frac{e-1}{e^{n+1}}\left\{1 + \frac{1}{e} + \cdots + \frac{1}{e^{m-n-1}}\right\} = \frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^m} < \frac{1}{e^n}. \qquad (3)$$

1. Satz. „Jede rationale Zahl A (in die Form $a : b$ gebracht, wo b eine natürliche und zu $|a|$ relativ prime Zahl bedeutet) ist entweder gleich einem systematischen Bruche oder es giebt neben der ganzen Zahl c_0, wofür

$$c_0 < A < c_0 + 1,$$

eine unbegrenzte Reihe von Ziffern $c_1, c_2 \ldots c_n$ — welche nicht von einer bestimmten an sämmtlich 0 sind —, so dafs wie grofs auch n sein mag, stets

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} < A < c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n+1}{e^n}.“ \qquad (4)$$

„In der Reihe $c_1, c_2 \ldots$ wiederholt sich von einem bestimmten Gliede an fortwährend eine aus höchstens $b-1$ Ziffern bestehende Gruppe.“

Nach III. 14 hat man entweder $a = c_0 b$, wo c_0 eine ganze Zahl oder $a = c_0 b + r_0$, worin r_0 eine natürliche Zahl $< b$. Im ersten Falle ist $A = c_0$; im zweiten, wo

$$c_0 < A < c_0 + 1,$$

bildet man er_0 und findet entweder $er_0 = c_1 b$ oder

$$er_0 = c_1 b + r_1,$$

wo c_1 eine ganze Zahl: $0 \leq c_1 \leq e-1$ und r_1 eine solche zwischen 1 und $b-1$ bedeutet. Im ersten Falle ist

$$A = c_0 + \frac{c_1}{e};$$

im zweiten, wo

$$c_0 + \frac{c_1}{e} < A < c_0 + \frac{c_1+1}{e},$$

bildet man er_1 und vollzieht die analoge Disjunction. U. s. f. Hierbei kann sich nur Folgendes ergeben. Entweder geht eine der Divisionen

$$\frac{a}{b} = c_0 + \frac{r_0}{b}, \quad \frac{er_0}{b} = c_1 + \frac{r_1}{b}, \quad \frac{er_1}{b} = c_2 + \frac{r_2}{b}, \ldots\ldots,$$

$$\frac{er_n}{b} = c_{n+1} + \frac{r_{n+1}}{b} \ldots\ldots$$

auf; dann ist A gleich einem systematischen Bruche. Oder es geht keine derselben auf, so dafs die Reste $r_0, r_1 \ldots$ nur die Werthe $1, 2, \ldots b-1$ erhalten können. Demnach mufs m in der Reihe der b Reste $r_0, r_1 \ldots r_{b-1}$ einen ersten r_m geben, der wiederkehrt. Ist aber $r_{m+h} = r_m$, so folgt auch

$$c_{m+h+1} = c_{m+1}, \quad r_{m+h+1} = r_{m+h} \ldots c_{m+2h} = c_{m+h},$$

$$r_{m+2h} = r_{m+h} = r_m.$$

U. s. f. In der Reihe $c_{m+1}, c_{m+2} \ldots$ wiederholen sich ohne Ende die $h \leq b-1$ Ziffern

$$c_{m+1}, \quad c_{m+2} \ldots c_{m+h}.$$

Die Zahl

$$c_{m+1} e^{h-1} + c_{m+2} e^{h-2} + \cdots + c_{m+h}$$

heifst die zur Zahl A gehörige Periode.

Dafs die Zahl A nur einem systematischen Bruche gleich sein kann, folgt leicht aus (3). Angenommen, es sei auch noch

$$A = d_0 + \frac{d_1}{e} + \ldots + \frac{d_n}{e^n};$$

so mufs neben $c_0 \leq A < c_0 + 1$ auch $d_0 \leq A < d_0 + 1$ sein, d. i. $c_0 < d_0 + 1$ und $d_0 < c_0 + 1$. Hieraus folgt $c_0 = d_0$, da c_0, d_0 ganze Zahlen sind. Nun hat man nach (3) ferner

$$\frac{c_1}{e} \leqq A - c_0 < \frac{c_1 + 1}{e}, \quad \frac{d_1}{e} \leqq A - c_0 < \frac{d_1 + 1}{e},$$

d. i. $c_1 < d_1 + 1$ neben $d_1 < c_1 + 1$ also auch $c_1 = d_1$ u. s. f. So viele Stellen, als beide Brüche gemein haben, stimmen überein; folglich mufs auch $m = n$ sein. Auf ähnliche Weise wird mit Hilfe der Formel (4) gezeigt, dafs es im zweiten Falle nur eine Reihe $c_0, c_1, c_2 \ldots$ geben könne.

2. Satz. „Die Zahl A ist dann und nur dann gleich einem systematischen Bruche, wenn ihr Nenner nur Primfactoren von e enthält."

3. Satz. „Ist b relativ prim zu e, so beginnt die Periode mit c_1 und umgekehrt."

Wäre $m \geqq 1$, so hätte man neben

$$er_{m-1} = c_m b_m + r_m \qquad er_{m+h-1} = c_{m+h} b + r_m,$$

also

$$e(r_{m-1} - r_{m+h-1}) = b(c_m - c_{m+h}),$$

was nicht möglich ist, wenn b, e relative Primzahlen sind; denn es müfste $|r_{m-1} - r_{m+h-1}|$ d. i. eine Zahl, kleiner als b, durch b theilbar sein (II. 11). Also mufs $m = 0$ sein. — Ist $m = 0$ $r_h = r_0$, so folgt aus $a = c_0 b + r_0$, $r_{h-1} e = c_h b + r_0$

$$a - er_{h-1} = b(c_0 - c_h);$$

demnach mufs jeder gemeinsame Theiler von b, e in a aufgehen, also kann es aufser 1 keinen geben. — Daraus folgt unmittelbar der

4. Satz. „Sind die Primfactoren von b theils solche von e, theils nicht, so müssen der Periode Ziffern vorangehen, die mindestens in derselben Ordnung nicht wiederholt werden."

7. Es frägt sich noch, ob umgekehrt zu jeder unbegrenzten Reihe $c_0, c_1, c_2 \ldots$ welche die im 1. Satze angegebene Beschaffenheit hat, eine rationale Zahl A gehört, welche die Relationen (4) erfüllt.

5. Satz. „Neben der beliebigen ganzen Zahl c_0 sei gegeben die unbegrenzte Reihe von Ziffern $c_1, c_2 \ldots$, welche von dem Gliede c_{m+1} an gebildet wird durch Wiederholung der Gruppe $c_{m+1}, c_{m+2} \ldots c_{m+h}$ mit mindestens einer geltenden Ziffer, die die Periode

$$P = c_{m+1} e^{h-1} + c_{m+2} e^{h-2} + \cdots + c_{m+h-1} e + c_{m+h}$$

liefert. Setzt man für $n = 0, 1, 2 \ldots$

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} = S_n,$$

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_m}{e^m} = S_m = \frac{Q}{e^m}$$

und bildet den Bruch

$$A = \frac{(Qe^h + P) - Q}{(e^h - 1)\, e^m}, \tag{5}$$

so findet man, falls nicht $h = 1$ und $P = e - 1$, stets, was auch n sein mag,

$$S_n < A < S_n + \frac{1}{e^n}.$$

In dem ausgeschlossenen Falle hat man wenn $m \geq 1$,

$$S_n < \frac{Q+1}{e^m} \leqq S_n + \frac{1}{e^n}, \tag{6}$$

worin das obere Zeichen nur für $n < m$ steht."

„Beginnt die Periode mit c_1, so hat man in (5) $m = 0$ $Q = c_0$ und wie auch sonst $e^0 = 1$ zu setzen. (6) geht über in

$$c_0 + 1 = S_n + \frac{1}{e^n}."$$

Beweis. Es ist unmittelbar ersichtlich dafs

$$S_{n+k} \geqq S_n. \tag{7}$$

Dagegen hat man nach (3)

$$S_{n+k} + \frac{1}{e^{n+k}} \leqq S_n + \frac{1}{e^n}. \tag{8}$$

Setzt man $1 : e^h = \omega$, so folgt nach (2) und (5)

$$\begin{aligned} S_{m+rh} &= S_m + \frac{P}{e^{m+h}} + \frac{P}{e^{m+rh}} + \cdots + \frac{P}{e^{m+rh}} \\ &= S_m + \frac{P}{e^{m+h}} \cdot \frac{1-\omega^r}{1-\omega} = A - \frac{P}{(e^h-1)\, e^{m+rh}}, \end{aligned} \tag{9}$$

also $S_{m+rh} < A$. Da wie grofs auch n sein mag, eine Zahl

r zu finden ist, so dafs $n < m + rh$, so hat man nach (7) $S_n \leq S_{m+rh} < A$ d. h. $S_n < A$.

Es ergiebt sich ferner aus (9), dafs

$$S_{m+rh} + \frac{1}{e^{m+rh}} = A + \frac{1}{e^{m+rh}}\left(1 - \frac{P}{e^h - 1}\right). \qquad (10)$$

Wenn nicht $h = 1$ und $P = e - 1$, so ist $P < e^h - 1$, somit

$$S_{m+rh} + \frac{1}{e^{m+rh}} > A,$$

also nach (8)

$$S_n + \frac{1}{e^n} > A.$$

Im Falle $h = 1$ $P = e - 1$ hat man

$$A = (Q + 1) : e^m = S_m + 1 : e^m$$

und nach (10)

$$S_{m+r} + \frac{1}{e^{m+r}} = A.$$

Wenn $m \geq 1$, so mufs c_m von $e - 1$ verschieden sein; demnach ist nach (8)

$$A = S_m + \frac{1}{e^m} < S_n + \frac{1}{e^n} \quad (n < m).$$

V. Abschnitt.

Absolute, relative, stetige Gröfsen.

1. Absolute Gröfsen. Wir werden zunächst erörtern, welche Eigenschaften allen Systemen von geometrischen Gröfsen d. i. den Linien, Winkeln, Flächen, Körpern abgesehen von der Ausdehnung zukommen. Die Vielheiten von einer Benennung oder discreten Gröfsen fassen wir mit ihnen zusammen. Ferner handelt es sich um Ermittelung der notwendigen und hinreichenden Eigenschaften d. i. derjenigen, aus welchen die übrigen von selbst hervorgehen. Die Gröfsen irgend eines dieser Systeme, im Folgenden mit $A, B, C \ldots$ bezeichnet, erfüllen die nachstehenden Forderungen.

I.) Je zwei derselben können entweder als gleich oder ungleich und im letzteren Falle kann die eine als die gröfsere, die andere als die kleinere bezeichnet werden.

II.) Die Gröfsen lassen sich addiren (und vervielfachen) wie die natürlichen Zahlen, insbesondere ist die Summe je zweier eine Gröfse des Systemes.

III.) Falls $A > B$, so existirt im Systeme eine und nur eine Gröfse X, so dafs $B + X = A$.

IV.) Jede Gröfse A ist entweder beschränkt oder unbeschränkt in gleiche und mit ihr gleichartige Theile zerlegbar d. h. es giebt im Systeme eine Gröfse X, so dafs $nX = A$, worin n entweder jede oder auch nur gewisse natürliche Zahlen bedeuten kann.

V.) Ist $A > B$, so giebt es ein Vielfaches von B, das gröfser ist als A: $pB > A$.

Hierbei ist zunächst zu bemerken, dafs die fünfte Eigenschaft nicht aus den übrigen hervorgeht, denn

es giebt Gröfsen z. B. die von P. du Bois-Reymond eingeführten „Unendlichen der Functionen“ (vgl. IX. 24), welche die Forderungen I.)—IV.) erfüllen, V.) aber nicht. Die Postulate I.)—IV.) sind, wie leicht einzusehen, formal von einander unabhängig.[1])

Gröfsen, welche den Eigenschaften I.)—IV.) genügen, sollen absolute heifsen und zwar, wenn hierzu noch die fünfte tritt, eigentliche oder a. Gr. im engeren Sinne; sonst uneigentliche oder solche im weiteren Sinne.

2. Gestützt auf die Untersuchungen des 1. und 3. Abschnittes können wir noch genauer angeben, welchen Bedingungen die Gröfsen eines Systemes $A, B, C \ldots$ zu entsprechen haben, um als absolute Gröfsen im engeren Sinne zu gelten. Nach Aufstellung der in I.) geforderten Definitionen ist nachzuweisen, dafs

1) aus $A = B$ $B = A$;

2) aus $A > B$ $B < A$ folgt und umgekehrt;

3) die aufgestellte Disjunction vollständig ist;

4) aus $A = B$, $B = C$ sich ergiebt $A = C$ [Euclid's 1. allgemeiner Grundsatz (*κοινὴ ἔννοια*)];

5) aus $A = B$, $B > C$ folgt $A > C$;

6) aus $A > B$, $B > C$ folgt $A > C$.

Nunmehr ist je zwei Gröfsen A, B eine dritte Gröfse des Systemes als ihre Summe zuzuordnen. Dabei müssen erfüllt sein die Sätze:

7) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

8) $A + B = B + A$;

9) Wenn $A = A'$, $B = B'$, so ist $A + B = A' + B$ (Euclid's 2. Grundsatz);

10) Wenn $A > A'$ $B = B'$, so ist $A + B > A' + B'$ (Euclid's 4. Grundsatz);

11) $A + B > A$ (Euclid's 8. Grundsatz);

12)—14) Die obigen Forderungen III.)—V.), deren letzte von Archimedes als Annahme (*λαμβανόμενον*) angeführt[2]) und daher im Folgenden als „Axiom des A.“ bezeichnet wird.

Aus den Sätzen 1—12 folgen nämlich alle im 2. Abschnitte angeführten Regeln der Addition und Subtraction. Ferner die Sätze:

1) Ist $A = A'$, so sind auch die Gleichvielfachen beider einander gleich: $mA = mA'$.

2) Ist $A > A'$, so ist $mA > mA'$.

3) $mA \pm mB = m(A \pm B)$ (Eucl. V. prop. 1).

Aus 13) folgt, wenn wir die Theilbarkeit einer jeden Gröfse als unbegrenzt voraussetzen:

4) Die gleichvielten Theile von gleichen Gröfsen $A = A'$ sind einander gleich: $\frac{1}{n} A = \frac{1}{n} A'$."

Denn diese Theile können nach dem 2. Satze nicht ungleich sein. Auch kann man in den Sätzen IV. 1, 2 die Einheit durch jede Gröfse A ersetzen. Wegen der Annahme 13) könnte hier die Darstellung derselben etwas vereinfacht werden.

5) „Ist μ eine absolute rationale Zahl, so ist

$$\mu A \pm \mu B = \mu (A \pm B).$$"

In diesen Formeln ist μA nicht als Product aus der Gröfse A in die Zahl μ aufzufassen (vgl. II. 6).

Aus 14) ergiebt sich: 1) „Ist $A > B$ so ist A entweder ein Vielfaches von B oder A liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Vielfachen von B: $qB < A < (q+1) B$." Beweis wie in II. 8.

2) „Ist $A > B$ und C beliebig, so giebt es absolute rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ derart dafs $A > \frac{p}{q} C > B$ — und zwar unzählig viele." Denn es giebt ganze Zahlen q, wofür sowol $q(A - B) > C$, als auch $qB > C$ und nach 1) eine ganze Zahl p, so dafs

$$pC > qB \geqq (p-1) C;$$

demnach ist

$$A > B + \frac{1}{q} C \geqq \frac{p}{q} C > B.$$

Zwischen A und $\frac{p}{q} C$, sowie zwischen $\frac{pC}{q}$ und B liegt wieder je eine Gröfse von der verlangten Form u. s. f.

3. Commensurabele und incommensurabele absolute Gröfsen im engeren Sinne. — Ist eine Gröfse A ein Vielfaches einer anderen M, so heifst die letztere ein

Maafs der ersteren. Besitzen zwei gleichartige Gröfsen A, B ein gemeinschaftliches Maafs M, so nennt man sie commensurabel. Wenn

$$A = aM, \qquad B = bM,$$

so ist

$$B = \frac{b}{a} A.$$

Ist M' ein anderes gemeinschaftliches Maafs von A, B, so dafs $A = a'M'$, $B = b'M'$, so ist $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$. Denn man hat $bA = aB$, $b'A = a'B$ also $a'bA = ab'A$ und $a'b = ab'$. Der gemeinsame Werth der Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ heifst das Verhältnifs von A zu B.

Das gröfste gemeinschaftliche Maafs zweier Gröfsen A, B wird auf ähnliche Weise ermittelt, wie der gröfste gemeinsame Theiler zweier natürlichen Zahlen (vgl. II. 11).[5] Wenn $A > B$, so ist entweder $A = qB$ oder $A = qB + B'$, wo $B' < B$. Im zweiten Falle hat man entweder $B = q'B'$ oder $q'B' + B''$, wo $B'' < B'$ und im letzteren wieder entweder $B' = q''B''$ oder $q''B'' + B'''$, wo $B''' < B''$ u. s. f. Auf diese Art gelangt man entweder zu einem Reste $B^{(n)}$, der seinen Vorgänger mifst: $B^{(n-1)} = q^{(n)}B^{(n)}$ oder es zeigt sich, dafs wie grofs auch n sein mag, $B^{(n)}$ niemals ein Maafs von $B^{(n-1)}$ ist:

$$A = qB + B',$$

$$B^{(n-1)} = q^{(n)}B^{(n)} + B^{(n+1)} \quad (B^{(n+1)} < B^{(n)}) \quad (n = 1, 2 \ldots).$$

Im ersten Falle ist $B^{(n)}$ ein gemeinschaftliches Maafs von A, B und zwar das gröfste, da jedes Maafs von A, B auch die Gröfsen $B', B'' \ldots B^{(n)}$ mifst. Im zweiten Falle giebt es kein gemeinschaftliches Maafs der Gröfsen A, B; sie sind incommensurabel. Denn wäre eines (M) vorhanden, so müfste es $B', B'' \ldots B^{(n)}$ messen; es kann aber n so grofs angenommen werden, dafs $B^{(n)} < M$. Folglich giebt es keines.

Der soeben benutzte Hilfssatz ergiebt sich in folgender Weise. Zunächst bemerke man, dafs

$$B^{(n+2)} < \tfrac{1}{2} B^{(n)}.$$

Man schliefst nämlich aus der Gleichung

$$B^{(n)} = q^{(n+1)} B^{(n+1)} + B^{(n+2)},$$

da

$$B^{(n+1)} > B^{(n+2)}$$

und

$$q^{(n+1)} \geqq 1,$$

unmittelbar, dafs

$$B^{(n)} \geqq B^{(n+1)} + B^{(n+2)} > 2B^{(n+2)}.$$

Demnach folgt nacheinander

$$B'' < \tfrac{1}{2} B, \quad B^{IV} < \tfrac{1}{2} B'' \ldots B^{(2n)} < \tfrac{1}{2} B^{(2n-2)},$$

somit

$$B^{(2n)} < \frac{1}{2^n} B.$$

Nach 14) giebt es Zahlen p, so dafs $M > \frac{1}{p} B$ und nach II. 9 Exponenten m, so dafs $2^m > p$. Mithin ist $M > B^{(2m)}$.

4. Wenn wir das System der alten Geometrie nach den Werken von Euclid, Archimedes, Apollonius genauer prüfen, so werden wir leicht bemerken, dafs es nur in der Verhältnifslehre den in Nr. 2 aufgestellten Forderungen völlig entspricht.[4]) Abgesehen von Bedenken, welche sich auf die exacte Definition der geometrischen Gröfsen an sich beziehen, vermissen wir bald das Verfahren, nach welchem die Vergleichung je zweier unter ihnen durchzuführen ist. Euclid's 7. Grundsatz („Was einander deckt ist gleich") und der 8. („das Ganze ist gröfser als sein Theil") reichen zur geometrischen Erklärung der Gleichheit und des Gröfserseins für die Systeme der geradlinigen Strecken und der Winkel aus. Aber man sucht bei ihm und seinen Nachfolgern vergebens nach Aufschlufs darüber, was unter zwei gleichen Flächen und Körpern, die nicht congruent sind, zu verstehen sei. Handelt es sich um ebene Polygone, so ist es, wie wir sehen werden, sehr leicht, diese Frage zu beantworten. Das angewandte Mittel versagt jedoch immer, wenn geradlinig und krummlinig begrenzte ebene Flächen miteinander verglichen werden sollen. Diese und ähnliche Schwierigkeiten umgeht die Darstellung der Alten auf folgende

Weise. Es wird die Vergleichbarkeit von je zwei gleichartigen geometrischen Gröfsen von vorneherein angenommen d. h. ohne dafs die Möglichkeit der Vergleichung auf geometrischen Wege nachgewiesen ist. Natürlich müssen dann auch die Sätze 1)—14) in Nr. 2 ohne Beweis zugelassen werden, was, wie a. a. O. hervorgehoben ist, von den Alten zum Theile ausdrücklich anerkannt wurde. Hierzu kommt noch die Annahme, dafs in jedem ihrer Gröfsensysteme neben einer Gröfse A sowol eine kleinere, als auch eine gröfsere vorhanden sei.

Vermittelst der Grundsätze wird die Vergleichung erzielt in einigen Fällen, die nicht zu den im 7. und 8. Grundsatze erwähnten gehören (vgl. Nr. 6). Diese Methode reicht jedoch nicht weit; es mufs daher ein neuer Gedanke herangezogen werden, welcher allerdings von den Alten nicht ausdrücklich ausgesprochen wurde.

Die Griechen geben zu den von ihnen gefundenen Sätzen über die Quadratur krummlinig begrenzter Flächen stets indirecte Beweise, denen der folgende Satz zu Grunde liegt: „Zwei gleichartige geometrische Gröfsen A, B sind einander gleich, wenn sich zeigen läfst, dafs bei der Annahme $A > B$ der Unterschied $A - B$ und bei der Annahme $A < B$ der Unterschied $B - A$ kleiner sein würde, als eine jede mit A, B gleichartige Gröfse. — Es ist $A \leqq B$, wenn nur das Erstere, und $A \geqq B$, wenn nur das Letztere behauptet werden kann.“ — Die Benutzung dieses Satzes, auf welchen die Exhaustionsmethode der Alten sich zurückführen läfst, wird ermöglicht durch das Axiom des Archimedes (V).

5. Zufolge der geometrischen Voraussetzungen der Euclid'schen Geometrie lassen sich für die nachstehenden Systeme von absoluten Gröfsen im engeren Sinne die in Nr. 2 aufgestellten Forderungen reduciren.

I. Hinsichtlich der geradlinigen Strecken läfst sich die Vergleichung, Addition, Subtraction, Theilung geometrisch ausführen, so dafs nur der Satz V. unbewiesen bleibt. Unter den Strecken giebt es incommensurabele Paare z. B. die Seite

B und die Diagonale A eines Quadrates. Hier findet man nämlich

$$A = B + B', \quad B^{(n-1)} = 2B^{(n)} + B^{(n+1)} \quad (n = 1, 2 \ldots).$$

II. Aehnliches gilt von den Winkeln, nur ist die Theilung im Allgemeinen geometrisch (d. h. mit Lineal und Zirkel) nicht ausführbar, daher als möglich vorauszusetzen (13. S.).[5])

III. Eingehender wollen wir uns mit dem Systeme der Polygone d. h. solcher ebenen Flächen, deren Begrenzung aus geradlinigen einander nicht schneidenden Strecken besteht, beschäftigen, da eine einfache Darstellung dieses Gegenstandes nicht hinlänglich bekannt zu sein scheint.[6])

Definition. „Zwei Polygone sind einander gleich, wenn sie entweder congruent oder aus gleich vielen Stücken bestehen, die paarweise congruent sind. — Ein Polygon ist gröfser als ein zweites, wenn es neben den Stücken des letzteren noch andere enthält."

Dafs die formalen Bedingungen von I. 2, 3 erfüllt sind, leuchtet ein. Bedeuten A, B, $C \ldots$ nun Polygone, so hat man neben $A = B$, $B = C$ auch $A = C$. Davon überzeugt man sich, wenn man in B sowol das Liniensystem verzeichnet, welches die Theile von A, als auch das, welches die Theile von C liefert u. s. f. Für die weitere Untersuchung ist bequem das Corollar: „Zwei Polygone sind einander gleich, wenn sie aus gleich vielen Stücken bestehen, die paarweise einander gleich sind."

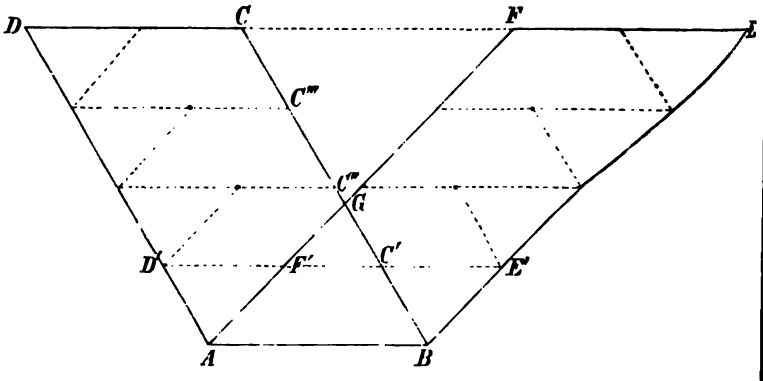
Nunmehr ist leicht zu zeigen, dafs je zwei Polygone mit einander verglichen werden können.

Gleichwinkelige Parallelogramme, worin je eine Seite gleich einer gegebenen Strecke, werden durch Aufeinanderlegen verglichen.

1. Satz. „Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich" (Euclid. I. prop. 35).

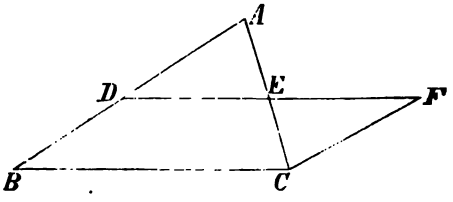
Beim Beweise des Satzes sind drei Fälle zu unterscheiden, wovon wol nur der dritte einer besonderen Erwähnung bedarf: Die Seiten BC, AF der gegebenen Parallelogramme $ABCD$ und $ABEF$ schneiden sich in G. Zufolge des für die Strecken geltenden Satzes V. in Nr. 1 kann man BC

in p gleiche Theile theilen, deren jeder kleiner ist als BG. Zieht man durch die Theilungspunkte C', C'' ... Parallele zur gemeinsamen Grundlinie AB, so zerfällt jedes der Parallelogramme in p unter sich congruente Parallelogramme und zwar ist je ein Theil des einen gleich einem des an-



deren: $ABC'D' = ABE'F'$ — nach dem zweiten Falle unseres Satzes. Folglich ist $ABCD = ABEF$. Die punktirten Linien zerschneiden die gegebenen Figuren so, dafs je ein Stück der einen congruent ist einem der anderen.

2. Satz. „Ein Dreieck ist gleich einem Parallelogramme von derselben Grundlinie und der halben Höhe."

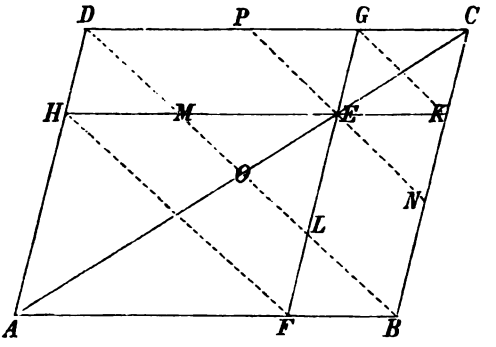


Verbindet man die Mittelpunkte D, E der Seiten AB, AC des Dreieckes ABC und macht $EF = DE$, so ist $AED \simeq CEF$ also $ABC = BCFD$.

3. Satz. „In jedem Parallelogramme sind die Ergänzungen der um eine Diagonale liegenden Parallelogramme einander gleich" (Euclid I. prop. 43).

D. h. Zieht man durch einen Punkt E einer der Diagonalen des Parallelogrammes $ABCD$ Parallele FG, HI

zu den Seiten desselben, so entstehen zwei gleiche Parallelogramme $FBKE = HEGD$. — Der Beweis des Satzes beruht auf der Bemerkung, dafs die Diagonalen BD, FH, KG



parallel sind, was sich leicht ergiebt, wenn man durch O eine Parallele zu BC zieht.[7]) Legt man durch E $NP \parallel BD$, so erhält man die congruenten Dreiecke

$$FBL \cong HMD, \qquad ENK \cong PEG$$

und die gleichen Parallelogramme

$$BNEL = DMEP.$$

Demnach ist

$$FBKE = HEGD.$$

Mit Hilfe der vorstehenden Sätze kann man zu jedem Parallelogramme, sowie zu jedem Dreiecke ein ihm gleiches Parallelogramm construiren, von dem ein Winkel und eine Seite gegeben sind. Dasselbe gilt von jedem Polygone, da man es durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen kann. Somit lassen sich in der That je zwei Polygone mit einander vergleichen.

Nennt man Summe zweier Polygone A, B jedes aus ihnen zusammengesetzte Polygon, so ergeben sich sofort die Sätze 7)—11) in Nr. 2. Die noch übrigen 12)—14) lassen sich dadurch nachweisen, dafs man die betreffenden Polygone wieder in Parallelogramme verwandelt, wovon ein Winkel und eine Seite gegeben sind.

IV. In ähnlicher Weise lassen sich die Prismen als absolute Gröfsen im engeren Sinne auffassen.

6. Ohne Zweifel wird man zugeben, dafs vorstehendes Verfahren, die Polygone zu vergleichen, die Darstellung Euclid's an geometrischer Anschaulichkeit weit übertrifft. Dort wird z. B. die Gleichheit der im 1. Satze erwähnten Parallelogramme lediglich dialektisch mit Hilfe der als Axiome erklärten Sätze 9) und 12) in Nr. 2 begründet. Leider läfst uns die oben befolgte Methode bald im Stiche, in der Stereometrie schon bei der Vergleichung der Pyramiden. Bis jetzt ist es nämlich nicht gelungen, zwei Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen in gleichviele, paarweise congruente Theile zu zerlegen. Bei den Alten wird in solchen Fällen der am Schlusse von Nr. 4 angeführte Satz angewendet.[8])

Es dürfte nicht überflüssig sein, die Methode der Alten durch ein Beispiel zu erläutern, wozu der soeben angezogene Satz: „Zwei dreiseitige Pyramiden A, A' von gleichen Grundflächen G, G' und gleichen Höhen h, h' sind einander gleich" dienen kann. Theilt man h in n gleiche Theile und legt durch die Theilungspunkte und die Spitze von A Ebenen parallel zu G und macht dasselbe an der Pyramide A', so sind die gleichweit von den Grundflächen abstehenden Schnitte von A, A' einander gleich. Dabei zerfallen A, A' je in n Theile, die von den Spitzen ab gerechnet mit $S_1\ S_2 \ldots S_n$, bez. $S'_1\ S'_2 \ldots S'_n$ bezeichnet werden. Zieht man sowol in A, als auch in A' von zwei Ecken der Grundfläche und von den zwei entsprechenden jedes Schnittes Parallele zu der durch die dritte gehenden Scheitelkante, so werden S_r, S'_r zu Prismen R_r, R'_r ergänzt, welche einander gleich sind. Zugleich sieht man, dafs $S_1 < R_1$ und $R_{r-1} < S_r < R_r$ $(r = 2, 3 \ldots n)$. — Angenommen nun es sei $A' > A$, so ist $A' - A < R_n$, da

$$A' < R'_1 + R'_2 + \ldots + R'_n = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

und

$$A > R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}.$$

Somit ist auch $A' - A < \frac{1}{n} P$, wenn P das Prisma bedeutet, das entsteht, wenn die von den zwei Ecken der Grundfläche ausgehenden Geraden bis an die durch die Spitze von A gelegte Ebene verlängert werden. Nach dem Axiome des Archimedes giebt es aber, wie klein auch der Körper E sein mag, eine ganze Zahl n so, dafs $nE > P$; somit ist $A' - A < E$. Ganz ähnlich folgt, $A' < A$ vorausgesetzt, $A - A' < E$. Also mufs $A' = A$ sein.

Die in dem Fundamentalsatze der Exhaustionsmethode liegende Voraussetzung, dafs je zwei geometrische Gröfsen derselben Art vergleichbar seien, ist theoretisch jedenfalls unzulässig; denn die analytische Geometrie vermag Curven

nachzuweisen, welche keine endliche Länge haben.[9]) Hier giebt es keinen anderen Ausweg, als die Längen der Curven, die Flächenräume und körperlichen Inhalte als Grenzwerthe zu definiren.

7. Relative Gröfsen. Hat man zwei solche Systeme absoluter Gröfsen definirt, dafs jeder Gröfse (und den ihr gleichen) des einen Systemes eine Gröfse (und die ihr gleichen) des anderen entspricht und umgekehrt — und erklärt man, dafs jedes dieser Paare die Summe „Null" liefert; so kann man die beiden Systeme mit der Null zu einem System von Gröfsen vereinigen, die dann relative heifsen. So haben wir in IV. 4 das System der rationalen Zahlen gebildet. Für jedes System von relativen Gröfsen kann man in ähnlicher Weise, wie für die genannten Zahlen, eine Addition definiren.

Nach der Natur der zu Grunde gelegten absoluten Gröfsen haben wir auch die relativen Gröfsen in eigentliche und uneigentliche einzutheilen. Ein Beispiel der letzteren Art s. IX. 25.

Relative Gröfsen im engeren Sinne kommen in der neueren Geometrie vor. — Setzen wir in einer Geraden g (und in allen zu ihr parallelen) eine positive Richtung fest und nennen diejenigen Strecken AB derselben, wofür der Übergang von A zu B im positiven Sinne erfolgt, positiv, die anderen negativ; so erhalten wir das System der relativen Strecken. Es ist am bequemsten hierfür die Möbiussche Bezeichnung AB zu gebrauchen, wobei auf die Anordnung der Buchstaben zu achten ist. Gleich sind nun zwei Strecken $AB = A'B'$, wenn die absoluten Strecken $|AB|$, $|A'B'|$ einander gleich sind und der Übergang von A zu B in demselben Sinne stattfindet wie der von A' zu B'. Erfolgt er bei der zweiten im entgegengesetzten Sinne wie bei der ersten, so heifsen die Strecken AB, $A'B'$ einander entgegengesetzt z. B. AB und BA. Die Strecke AB heifst gröfser als AC, wenn CB eine positive Strecke ist.

Als Summe zweier Strecken $AB + CD$ wird definirt die Strecke AE, worin der Punkt E durch die Construction der Strecke $BE = CD$ gefunden wird. Ferner sei $AB + BA = 0$, $0 + AB = AB + 0 = AB$. Nun folgt sofort 1) $AB + CD = CD + AB$ und 2) $AB + CD = AB + C'D'$ wenn $CD = C'D'$. Um 3) die associative Eigenschaft der Verknüpfung

festzustellen, genügt die Bemerkung, dafs $(AB + BC) + CD = AC + CD = AD$ und $AB + (BC + CD) = AB + BD = AD$. 4) Ist $BC > BC'$, so ist $AB + BC > AB + BC'$. Denn es zeigt die Figur, dafs $AC > AC'$. Der Gleichung $AC + CX = AB$ genügt die Strecke $CX = CB$ und nur sie, bez. die ihr gleichen. Die Subtraction ist somit stets ausführbar und eindeutig: $AB - AC = CB$. Da $BA = 0 - AB$, so schreibt man $BA = -AB$.

In ähnlicher Weise kann man relative Winkel, Flächen, Körper definiren.

8. Stetige Systeme von absoluten Gröfsen. Der Raum und die in ihm gedachten Gebilde werden als stetig ausgedehnt bezeichnet. Sieht man Körper, Fläche, Linie als geometrische Grundbegriffe an, so mufs auch die stetige Ausdehnung ein solcher sein; denn es läfst sich ja von keinem derselben die Stetigkeit trennen. Bolzano betrachtet die Entfernung von je zwei Punkten als den Grundbegriff der Geometrie und versucht damit die Punktcontinua, zunächst die linearen oder Linien, zu erklären, was ihm jedoch nicht gelungen ist, indem seine Continua sogar des Zusammenhanges entbehren können.[10])

Bei der Definition eines stetigen Gröfsensystemes wird es sich darum handeln, aus dem Begriffe der absoluten Gröfsen im Allgemeinen einen engeren abzuleiten durch Zufügung von solchen Merkmalen, welche auch jeder begrenzten Linie zukommen. Die folgenden Erörterungen sind gegründet auf die Bemerkung, dafs die Stetigkeit einer Linie z. B. der Geraden AB nicht allein dadurch, dafs man ein zusammenhängendes Stück $A'B'$ aus ihr entfernt, sondern auch schon durch Wegnahme eines Punktes M aufgehoben wird. Man hat nur die Eigenschaften der beiden Theile, in welche durch jeden dieser Vorgänge das System der die ganze Linie bildenden Strecken AM zerfällt, zu untersuchen.

Wir setzen zunächst ein System Σ von Gröfsen $A, B, C\ldots$ mit den folgenden Eigenschaften voraus. Neben den Forderungen I—III in Nr. 1 soll noch die nachstehende erfüllt sein.

IV.) Zwischen je zwei ungleichen Gröfsen liegt immer noch eine Gröfse des Systemes und es giebt neben jeder Gröfse sowol eine kleinere, als auch eine gröfsere; somit weder eine kleinste, noch eine gröfste. Die letzte Eigenschaft

wird kurz dadurch ausgedrückt, dafs man dem Systeme Σ die untere Grenze Null (0) und die obere Unendlich (∞) verleiht.

Aus dem Systeme Σ denken wir uns ein System Π zwischen den Grenzen 0 und A abgesondert, das, ohne gerade alle Gröfsen von Σ zu umfassen, doch noch die obigen Eigenschaften besitzt. Das System Π wird im Allgemeinen Lücken aufweisen, wie man auf folgende Weise erkennen kann.

Eine Lücke des Systemes Π heifst jede Theilung der ihm angehörigen Gröfsen P in zwei Gruppen von den folgenden Eigenschaften:

1) Jede Gröfse P gehört einer und nur einer Gruppe an.

2) Wenn P_1 eine Gröfse der ersten Gruppe ist, so auch jede Gröfse $P < P_1$; wenn P_2 eine Gröfse der zweiten Gruppe ist, so auch jede Gröfse $P > P_2$. (Somit ist notwendig $P_1 < P_2$.)

3) Wenn P_1 eine Gröfse der ersten Gruppe, so gehört zu ihr auch eine Gröfse, welche P_1 überschreitet, und ist P_2 aus der zweiten Gruppe, so befindet sich darin auch eine Gröfse $P < P_2$.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder bleibt der Unterschied $P_2 - P_1$, was auch P_1 für eine Gröfse der ersten, P_2 der zweiten Gruppe sein möge, über einer bestimmten Gröfse D von Π, oder er kann kleiner sein als irgend eine Gröfse von Π. Lücken der letzteren Art sollen Schnitte von Π heifsen.

Ein System Π, das keine Lücken erster Art, also entweder gar keine Lücken oder doch nur Schnitte aufzuweisen hat, soll zusammenhängend heifsen. — Dazu ist hinreichend, dafs die Gröfsen von Π (jedoch nicht notwendig die von Σ) dem Axiome des Archimedes (V) genügen. Angenommen es seien die zu einer Lücke von Π gehörigen Gruppen so beschaffen, dafs $P_2 - P_1 > D$. Denken wir uns jetzt unter P_1 eine bestimmte Gröfse der ersten, unter P_2 eine solche der zweiten Gruppe, so gehören zur ersten Gruppe die Gröfse $P_1 + D$ und alle zwischen ihr und P_1 liegenden, desgleichen $P_1 + 2D$ und alle zwischen ihr und $P_1 + D$ liegenden; kurz $P_1 + nD$, wo n eine beliebige natürliche Zahl sein kann, und alle zwischen ihr und P_1 liegenden. Es giebt aber nach Voraussetzung eine

solche Zahl m, wofür $mD > P_2 - P_1$ d. i. $P_2 < P_1 + mD$. Demnach wäre P_2 zur ersten Gruppe zu rechnen, entgegen der Voraussetzung. — Es scheint nur auf die angegebene Weise möglich zu sein, ein zusammenhängendes System als solches zu erkennen.

Zur Stetigkeit des Systemes Σ ist erforderlich die Abwesenheit von Lücken. Allein das reicht nicht hin, da es denkbar ist, dafs Schnitte eines aus Σ entnommenen zusammenhängenden Systemes Π durch mehr als eine Gröfse von Σ geschlossen werden d. h. dafs es mehrere Gröfsen in Σ gebe, welche gröfser als alle P_1, kleiner als alle P_2 sind (vgl. IX. 24). Die Stetigkeit des Systemes Σ wird demnach folgendermafsen zu erklären sein.

„Das Gröfsensystem Σ heifst zwischen den Grenzen 0, A stetig dann und nur dann, wenn aus den ihm angehörigen Gröfsen Systeme Π, welche innerhalb der Grenzen 0, A zusammenhängen, gebildet werden können und wenn jedem Schnitte eines solchen eine und nur eine, nicht zu Π gehörige Gröfse S entspricht, welche gröfser als alle P_1, kleiner als alle P_2 ist.“ [11])

Ein System von relativen Gröfsen wird als stetig angesehen, wenn jedes der beiden zusammengefafsten Systeme von absoluten Gröfsen stetig ist. Die vorstehenden Definitionen behalten auch für ein solches Geltung.

9. Wir haben noch die wichtige Bemerkung hervorzuheben, dafs jedes stetige System von absoluten Gröfsen zu den Gröfsen dieser Art im engeren Sinne gehört. Das zeigt der folgende Satz.

„Wenn ein Gröfsensystem Σ den Forderungen I—IV. in Nr. 8 genügt und dabei stetig ist, so folgt 1) die Theilbarkeit jeder Gröfse A desselben in beliebig viele gleiche Theile, 2) das Axiom (V. in Nr. 1) des Archimedes.“

Beweis. Zu 1). Man bemerke zunächst: Ist B eine gegebene Gröfse von Σ, n eine beliebige natürliche Zahl, so existirt immer eine Gröfse Y, derart dafs $nY < B$. Das ergiebt sich aus den Voraussetzungen I—IV. unmittelbar. Würde man nun annehmen, es sei keine Gröfse X vorhanden, derart dafs $nX = A$, so könnte man im Systeme $(0, A)$ eine

Lücke nachweisen, gegen die Voraussetzung der Stetigkeit. In der That, ist $P < A$, so ist nP entweder $<$ oder $> A$. Auf diese Weise lassen sich die Gröfsen $(0, A)$ in zwei Gruppen P_1, P_2 theilen: $nP_1 < A$, $nP_2 > A$, welche die oben aufgestellten Bedingungen erfüllen. Insbesondere: ist P_1 aus der ersten Gruppe, so auch $P_1 + Y_1$, woferne nur Y_1 so gewählt ist, dafs $nY_1 < A - nP_1$; ist P_2 aus der zweiten Gruppe, so auch $P_2 - Y_2$, woferne nur $nY_2 < nP_2 - A$.

Zu 2). Es sei $A > B$. Würde die Reihe wachsender Gröfsen $B, 2B \ldots nB \ldots$ die Gröfse A nicht überschreiten, so müfste es eine Gröfse $C \leqq A$ geben, so dafs $C > nB$ $(n = 1, 2 \ldots)$, jedoch Zahlen m, so dafs $C - B < mB$. Darin liegt ein Widerspruch, da $C < (m+1)B$ folgen würde.

Es ist nur nachzusehen, ob der hier benutzte Satz: „Wenn $M_1\ M_2 \ldots M_n \ldots$ eine unbegrenzte Reihe wachsender Gröfsen des stetigen Systemes $\Sigma : (0, A)$ bezeichnet, welche die Gröfse A nicht überschreiten, so existirt eine und nur eine Gröfse $C \leqq A$ derart, dafs C gröfser ist als alle M_n, jedoch zu jeder Gröfse $D < C$ des Systemes Σ eine ganze Zahl m gehört, sodafs wenn $n > m$ $M_n > C - D$" — nicht das Axiom des Archimedes voraussetzt. Das ist jedoch nicht der Fall. In der That, wird die Existenz einer solchen Gröfse C nicht zugestanden, so ist im Systeme $(0, A)$ eine Lücke vorhanden. Die erste Gruppe wird gebildet von den Gröfsen P_1, die kleiner sind als irgend ein M_n; die zweite von denjenigen P_2, die gröfser sind als jedes M_n. Die Gruppen entsprechen den Bedingungen der vorigen Nr. So findet man z. B. in der zweiten Gruppe zu jeder Gröfse P_2 eine kleinere. Wäre nämlich bei beliebigem D für jeden hinlänglich grofsen Werth von n $(n > m)$ $M_n > P_2 - D$, so könnte man P_2 für C setzen. Somit mufs es Gröfsen D geben, so beschaffen, dafs wie grofs auch n vorausgesetzt werden mag, eine Zahl $r > n$ vorhanden ist, wofür $M_r \leqq P_2 - D$. Bezeichnet nun P eine beliebige Gröfse zwischen $P_2 - D$ und P_2, so hat man $P > M_r > M_n$, worin n jeder Index sein kann. — Und zwar existirt nur eine Gröfse C. Hätte nämlich $C' > C$ dieselbe Eigenschaft wie C, so wäre, wie klein auch D sein mag, $C + D > M_m + D > C'$; also mufs $C' \leqq C$ sein (vgl. Nr. 4). Ebensowenig kann aber $C' < C$ sein, somit bleibt nur $C' = C$ übrig.

10. Das System der rationalen Zahlen z. B. von 0 bis zu einer Zahl $\alpha > 0$ ist offenbar zusammenhängend, läfst aber Schnitte zu. — Es sei $0 < \varrho < \alpha$ und ϱ nicht die $n$te Potenz einer rationalen Zahl. Da mithin die $n$te Potenz jeder der gegebenen Zahlen entweder kleiner oder gröfser als ϱ ist, zerfallen sie in zwei Gruppen π_1, π_2. In der ersten sei $\pi_1^n < \varrho$, in der zweiten $\pi_2^n > \varrho$. Die Gruppen haben auch die 2) und, wie aus dem Folgenden erhellt, die 3) der

obigen Eigenschaften. Man hat nur positive Zahlen ξ_1, anzugeben, so dafs, wenn π_1 eine bestimmte Zahl der erste π_2 eine der zweiten Gruppe bedeutet, $(\pi_1 + \xi_1)^n < \varrho$ u $(\pi_2 - \xi_2)^n > \varrho$. Da nach VIII. 2, wenn nur $(n-1)\xi_1 < \pi$

$$\left(1 + \frac{\xi_1}{\pi_1}\right)^n < 1 : \left(1 - \frac{n\xi_1}{\pi_1 + \xi_1}\right);$$

so genügt, dafs

$$\xi_1 \leqq \frac{\pi_1(\varrho - \pi_1^n)}{(n-1)\varrho + \pi_1^n}$$

sei. Und da

$$\left(1 - \frac{\xi_2}{\pi_2}\right)^n > 1 - \frac{n\xi_2}{\pi_2},$$

so braucht man nur anzunehmen

$$\xi_2 \leqq \frac{(\pi_2^n - \varrho)}{n\pi_2^{n-1}}.$$

Das System der rationalen Zahlen ist demnach nic stetig. Um dasselbe zu einem stetigen Gröfsensysteme ergänzen, kann man jedem seiner Schnitte entsprechend, ei neue Zahl einführen. So gelangt man nach **Dedekind** den irrationalen Zahlen,

VI. Abschnitt.

Theorie der Verhältnisse nach Euclid.

1. Man sagt von je zweien eines Systemes von absoluten Gröfsen im engeren Sinne, dafs die eine ein Verhältnifs zur anderen habe. Mithin wird je zweien solcher Gröfsen, die in eine bestimmte Reihenfolge $A\ B$ gebracht sind, ein neues Object zugeordnet, welches das Verhältnifs A zu B heifst und die Bezeichnung $A : B$ erhält.[1]) A heifst das Vorderglied, B das Hinterglied. Unser Ding ist noch ohne Eigenschaften, kann also solche erhalten — und zwar in verschiedener Weise — nach dem schon im 3. Abschnitte angewandten Verfahren, indem wir es zuerst zu einer Gröfse machen und dann Verknüpfungen zwischen den neuen Gröfsen definiren. Im Folgenden sollen A, B, $C\ldots$ gleichartige absolute Gröfsen im engeren Sinne, a, b, $c\ldots$ natürliche, α, β, $\gamma\ldots$ absolute rationale Zahlen, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}\ldots$ Verhältnisse bedeuten.

Wir können zunächst festsetzen, es soll $A : B$ gleich, gröfser, kleiner als $A' : B'$ sein, je nachdem $A + B'$ gleich, gröfser, kleiner als $B + A'$. Die formalen Bedingungen nach I. 2, 3 sind offenbar erfüllt, somit die Definitionen zulässig. Ferner wollen wir das Verhältnifs $(A + A') : (B + B')$ als Summe von $A : B$ und $A' : B'$ bezeichnen, wobei, wie man leicht finden wird, dieselben Sätze gelten, wie bei der Addition der relativen Gröfsen (V. 7). Die Subtraction ist auch hier stets möglich und zwar nur auf eine Weise. — Die dergestalt bestimmten Verhältnisse hat man arithmetische genannt. Das arithmetische Verhältnifs stellt eine Erweiterung der Differenz $A - B$ auf den Fall wo $A \gtreqless B$, dar und ist daher entbehrlich, wenn eine solche bereits da-

durch erzielt ist, dafs aus den absoluten Gröfsen A, B, C.... relative abgeleitet wurden.

Wir wenden uns nun zur Aufstellung der **geometrischen** Verhältnisse, welche in der Geometrie der Alten als Ersatz für die irrationalen Zahlen unentbehrlich waren. Und zwar wollen wir ihre Theorie zunächst in der Gestalt vorführen, wie sie im 5. Buche der Euclidschen Elemente vorliegt. — In Zukunft ist unter „Verhältnifs" immer das „geometrische" zu verstehen.

2. In V. 3 ist bemerkt, dafs man unter dem Verhältnisse zweier commensurabelen Gröfsen $A = aM$, $B = bM$ den Quotienten $\frac{a}{b}$ verstehe. Daraus folgt, dafs wenn $A = \alpha M$, $B = \beta M$, das Verhältnifs $A : B$ die Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$ sei. Es kann dabei M auch die Einheit, A B absolute rationale Zahlen bedeuten. Stellen wir neben A B ein zweites Paar commensurabeler, aber nicht notwendig mit ihnen gleichartiger Gröfsen $A'B' - A' = a'M'$, $B' = b'M'$ —; so nennt man $A : B$ gleich gröfser, kleiner als $A' : B'$, je nachdem die Zahl $\frac{a}{b}$ gleich, gröfser, kleiner als $\frac{a'}{b'}$. Ist $A = B$, $A' = B'$, so ist demnach $A : B = A' : B'$. Je zwei gleiche Gröfsen stehen zu einander im „Verhältnisse der Gleichheit".

Um die Definition der gleichen Verhältnisse auf Paare incommensurabeler Gröfsen zu erweitern, suchen wir zunächst eine solche Eigenschaft von zwei commensurabelen Gröfsenpaaren AB, $A'B'$, deren Verhältnisse einander gleich sind, auf, welche auch dann einen Sinn hat, wenn die Paare incommensurabel sind. Es sei also $A = aM$, $B = bM$; $A' = a'M'$, $B' = b'M'$ und $ab' = a'b$. Bezeichnen m, n irgend zwei natürliche Zahlen, so wird ma entweder gleich oder gröfser oder kleiner als nb sein. Multiplicirt man beide Seiten jeder dieser Relationen mit b' und dividirt dann durch b, so findet man entsprechend ma' gleich, gröfser, kleiner als nb'. Mithin ist wegen $bA = aB$, $b'A' = a'B'$ neben

$$mA \gtrless nB \qquad \text{simultan} \qquad mA' \gtrless nB'.$$

Dieser Satz gestattet die folgende Umkehrung, welche für unseren Zweck unerläfslich ist.

Satz. „Angenommen dafs für alle Paare pq von relativen Primzahlen mit Ausnahme eines einzigen gh den Relationen $pA \gtrless qB$ entsprechen die folgenden: $pA' \gtrless qB'$, während für das letztere Paar die Gleichung $gA = hB$ besteht, so mufs auch $gA' = hB'$ sein."

Beweis. Bedeutet m eine beliebige durch g nicht theilbare Zahl, nur so gewählt dafs $mA > B$, so kann mA kein Vielfaches von B sein, so dafs nach V. 2 eine ganze Zahl n existirt, wofür $nB < mA < (n+1)B$. Daraus folgt durch Multiplication mit g $ng < mh < (n+1)g$ und ferner zufolge Voraussetzung $nB' < mA' < (n+1)B'$. Nun kann man nach V. 4 zeigen, dafs $gA' = hB'$. Wäre nämlich $A' > \frac{h}{g}B'$, so hätte man

$$A' - \frac{h}{g}B' < \frac{n+1}{m}B' - \frac{n}{m}B' = \frac{B'}{m},$$

was unmöglich, da m so grofs angenommen werden kann, dafs $\frac{1}{m}B'$ kleiner ist als eine beliebige mit $A'B'$ gleichartige Gröfse D'. Somit mufs $A' \leq \frac{h}{g}B'$ sein. Es kann aber auch A' nicht $< \frac{h}{g}B'$ sein, da auch $\frac{h}{g}B' - A' < \frac{B'}{m}$ sein müfste. Folglich bleibt nur übrig, dafs $gA' = hB'$.

Nunmehr können wir die folgende Definition aufstellen:

Def. 1. Bezeichnen m, n irgend ein Paar natürlicher Zahlen, so dafs $mA \gtrless nB$ und ist simultan mit diesen Relationen $mA' \gtrless nB'$, so sollen die Verhältnisse $A : B$ und $A' : B'$ einander gleich sein. (Eucl. V. Def. 5.)[2])

Die formalen Bedingungen von I. 2 sind hier erfüllt. Ist $A : B = A' : B'$, so ist auch $A' : B' = A : B$. Denn hat man $m'A' \gtrless n'B'$, so kann nach dem obigen Satze nicht $m'A = n'B$, mithin mufs zufolge der Voraussetzung entsprechend $m'A \gtrless n'B$ sein. Unmittelbar ergiebt sich: 1) Ist $A : B = A' : B'$ und $A' : B' = A'' : B''$, so ist $A : B = A'' : B''$ (Eucl. V. prop. 11). 2) Ist $A = A'$, $B = B'$, so ist $A : B = A' : B'$ (l. c. prop. 7).

3. Das gröfsere Verhältnifs. Wenn die Gröfsenpaare $A\,B$, $A'\,B'$ commensurabel sind, so hat man, wie oben bemerkt, $A:B > A':B'$ falls $ab' > a'b$. Lassen wir wieder m, n beliebige Zahlen sein, so ergiebt sich leicht: 1) Ist

$$\frac{a}{b} > \frac{n}{m} > \frac{a'}{b'},$$

so hat man neben $mA > nB$, $mA' < nB'$; 2) ist $\frac{n}{m} = \frac{a}{b}$, so neben $mA = nB$ $mA' < nB'$ und wenn $\frac{n}{m} = \frac{a'}{b'}$, so neben $mA > nB$ $mA' = nB'$; 3) ist $\frac{n}{m} > \frac{a}{b}$, so hat man neben $mA < nB$ $mA' < nB'$ und wenn $\frac{n}{m} < \frac{a'}{b'}$, so neben $mA > nB$ auch $mA' > nB'$.

Wie diese Relationen zusammenhängen, lehren die folgenden Sätze: 1) „Giebt es ein Zahlenpaar m, n, so dafs neben

$$mA > nB \quad mA' \leq nB',$$

so ist stets neben

$$pA \leq qB \quad pA' < qB'.“$$

Denn aus $pA \leqq qB$ folgt

$$pnA \leq qnB < qmA,$$

also $pn < qm$ und somit

$$pnA' < qmA' \leq qnB'$$

also $pA' < qB'$. — 2) „Ist neben

$$kA > lB \quad kA' = lB',$$

so giebt es auch Zahlenpaare m, n, so dafs neben

$$mA > nB \quad mA' < nB'.“$$

Denn zwischen A und $\frac{l}{k}B$ liegen unzählige Gröfsen $\frac{n}{m}B$ (V. 2), also hat man $mA > nB$ und $\frac{n}{m}B' > \frac{l}{k}B' = A'$ d. i. $mA' < nB'$.

Das Vorstehende hat geführt zu

Def. 2 (Eucl. V. Def. 7). „Es steht A im gröfseren (kleineren) Verhältnisse zu B, als A' zu B', wenn ein Zahlenpaar m, n existirt, so dafs zugleich

$$mA > nB \quad mA' \leqq nB' \qquad (mA < nB \quad mA' \geqq nB').$$

Die formalen Forderungen von I. 3 sind erfüllt. 1) Aus $A:B > A':B'$ folgt $A':B' < A:B$. (Im Falle dafs neben $mA > nB$ $mA' = nB'$ gegeben ist, braucht man nur den 2. Satz oben anzuwenden.) 2) Die aufgestellte Disjunction unter den Verhältnissen ist vollständig. — Betrachtet man nämlich zunächst solche Zahlenpaare mn, dafs $mA > nB$, so hat man entweder einmal $mA' \leqq nB'$ — d. i. $A:B > A':B'$ — oder es ist stets $mA' > nB'$. Geht man nun über zu solchen Paaren, welche $mA < nB$ liefern, so ist entweder einmal $mA \geqq nB'$ — d. i. $A:B < A':B'$ oder durchaus auch $mA' < nB'$, in welchem Falle man $A:B = A':B'$ setzt. 3) Aus $A:B = A':B'$ und $A':B' > A'':B''$ folgt $A:B > A'':B''$ (Eucl. V. prop. 13). 4) Aus $A:B > A':B'$ und $A':B' > A'':B''$ folgt $A:B > A'':B''$. Denn nach Voraussetzung giebt es Zahlen m, n, so dafs $mA > nB$, $mA' \leqq nB'$; also ist nach dem 1. Satze oben $mA'' < nB''$. Man findet somit $A:B > A'':B''$.

4. Erste Gruppe von Sätzen über Proportionen und Ungleichungen. Gleichungen zwischen Verhältnissen heifsen Proportionen. Sind A und B ungleiche Gröfsen, so sind die Verhältnisse $A:B$ und $B:A$ von einander verschieden und zwar ist neben $A > B$ $A:B > B:A$. Das Verhältnifs $B:A$ heifst das umgekehrte von $A:B$. Unmittelbar aus den vorhergehenden Definitionen folgen die Sätze:

1) „Ist $A:B \geqq A':B'$, so hat man entsprechend $B:A \leqq B':A'$."

Bezeichnen α β absolute rationale Zahlen, so hat man: 2) „$A:B = \alpha A:\alpha B$ (V. 15); 3) neben $A:B \geqq A':B'$ entsprechend $\alpha A:\beta B \geqq \alpha A':\beta B'$." (V. 4.)[3])

4) „Ist $A > A'$, so ist $A:B > A':B$" (V. 8). Nach V. 2 giebt es Gröfsen $\frac{n}{m}B$, sodafs $A > \frac{nB}{m} > A'$; also hat man neben $mA > nB$ $mA' < nB$ d. i. $A:B > A':B$. Daraus folgt nach I. 7:

5) „Ist $A:B \geqq A':B$, so ist entsprechend $A \geqq A'$." (V. 9 und 10.)

6) „Aus $A:B = A':B'$ folgt

$(A \pm B):A = (A' \pm B'):A'$ und $(A \pm B):B = (A' \pm B'):B'$,

wobei im Falle des unteren Zeichens $A > B$ **vorauszusetzen** ist" (V. 18 und 17). Wenn $p \geqq q$, so ist sowol $p(A+B) > qA$ als auch $p(A'+B') > qA'$. Ist aber $p < q$, so hat man neben $p(A+B) \gtrless qA$ entsprechend $pB \gtrless (q-p)A$, so mit hier entsprechend $pB' \gtrless (q-p)A'$, also $p(A'+B') \gtrless qA'$ Demnach ist in der That $(A+B):A = (A'+B'):A'$ u. s. w

7) „Aus $A:B > A':B'$ folgt $(A+B):B > (A'+B'):B'$ (Archimedes de sphaera etc. I. prop. 3.) — Denn aus $mA > nB$ neben $mA' < nB'$ ergiebt sich $m(A+B) > (m+n)B$ neben $m(A'+B') < (m+n)B'$.

8) „Aus $A:B > A':B'$ und $A' > B'$, folgt (nach dem 1. Satze in Nr. 3) $A > B$ und $(A-B):B > (A'-B'):B$ (Archimedes l. c. I. prop. 7 — Beweis ähnlich wie beim vorhergehenden Satze), sowie $(A-B):A > (A'-B'):A'$."

9) „Aus $A:B = A':B'$ und $B:C = B':C'$ folgt neben $A \gtreqless C$ entsprechend $A' \gtreqless C'$" (V. 20). Ist z. B. $A > C$ so hat man nach dem 4. Satze $A:B > C:B$, also $A':B' > C':B$ und nach dem 5. $A' > C'$.

10) „Aus $A:B = A':B'$ und $B:C = B':C'$ folgt

$$A:C = A':C'"$$

(V. 22). — Denn bedeuten p q irgend zwei natürliche Zahlen so hat man nach dem 3. Satze

$$pA:B = pA':B' \qquad B:qC = B':qC',$$

somit nach dem 9. neben $pA \gtrless qC$ entsprechend $pA' \gtrless qC'$ d. i. $A:C = A':C'$. — Auf ähnliche Art wie der 9. Satz ergiebt sich:

11) „Aus

$$A:B \geqq A':B' \qquad B:C \geqq B':C'$$

(worin jedoch das Zeichen $=$ nur einmal vorkommen soll) folgt, wenn $A \leqq C$, $A' < C'$."

12) „Aus

$$A:B > A':B' \qquad B:C = B':C'$$

folgt $A:C > A':C'$." — Was auch p q für natürliche Zahlen sein mögen, so hat man

$$pA:B \geqq pA':B' \qquad B:qC \geqq B':qC',$$

also nach dem 11. Satze neben $pA < qC$ stets $pA' < qC'$. Somit mufs $A : C$ entweder gröfser oder gleich $A' : C'$ sein. Das letztere ist indefs nicht möglich, da nach dem 10. Satze $A : B = A' : B'$ sein müfste. — Man kann den Satz ohne Mühe dahin erweitern, dafs in den erstgenannten Relationen irgend eines der Zeichen $= >$, nur nicht beide Male $=$, vorkommen darf.

13) „Aus

$$A : B = B' : C' \qquad B : C = A' : B'$$

folgt neben $A \gtreqless C$ entsprechend $A' \gtreqless C'$." (V. 21.) — Ist z. B. $A > C$, so hat man nach 4) $A : B > C : B$, also $B' : C' > B' : A'$ d. i. $C' < A'$.

14) „Aus

$$A : B = B' : C' \qquad B : C = A' : B'$$

folgt $A : C = A' : C'$." (V. 23.) — Für irgend ein Paar natürlicher Zahlen p q hat man nach 2) und 3)

$$pA : pB = qB' : qC' \qquad pB : qC = pA' : qC',$$

also nach dem 13. Satze neben $pA \gtreqless qC$ stets entsprechend $pA' \gtreqless qC'$ d. i. $A : C = A' : C'$. — Ähnlich wie 11) und 12) ergeben sich die Sätze:

15) „Aus

$$A : B \geqq B' : C' \qquad B : C \geqq A' : B'$$

folgt (bei höchstens einmaligem Vorkommen des Zeichens $=$), wenn $A \leqq C$, $A' < C'$." — 16) „Aus

$$A : B > B' : C' \qquad B : C = A' : B'$$

folgt $A : C > A' : C'$."

17) „Aus

$$A : M = A' : M' \qquad B : M = B' : M'$$

folgt

$$(A \mp B) : M = (A' \mp B') : M',$$

im Falle des unteren Zeichens $A > B$ vorausgesetzt." (V. 24.) — Nach dem 10. Satze ist $A : B = A' : B'$, also nach dem 6.)

$$(A \mp B) : A = (A' \mp B') : A',$$

woraus durch nochmalige Anwendung von 10) die neue Proportion folgt.

5. Zweite Gruppe von Sätzen über Proportionen und Ungleichungen. Alle Glieder derselben müssen gleichartig sein. Sind das zweite oder dritte Glied einer Proportion einander gleich, so heifst sie stetig.

1) „Ist $A : B = A' : B'$ und $A \gtreqless A'$, so hat man entsprechend $B \gtreqless B'$" (V. 14).

2) „Ist $A : B = A' : B'$, so ist auch $A : A' = B : B'$." (V. 16.)

3) „Ist $A : B > A' : B'$, so hat man, wenn $A \leqq A'$, $B < B'$ und jedenfalls $A : A' > B : B'$."

Diese Sätze sind nichts anderes als specielle Fälle der Sätze 13)—16) der vorigen Nr.; man hat nur dort

$$A' = B \qquad B' = C$$

zu setzen. — Mit Hilfe des 2) läfst sich zeigen, dafs aus jeder Proportion, deren Glieder gleichartig und von einander verschieden sind, durch Versetzung derselben sieben andere abgeleitet werden können.

4) „Aus $A : B = A' : B'$ folgt

$$(A \mp A') : (B \mp B') = A : B,$$

im Falle des unteren Zeichens $A > A'$ vorausgesetzt" (V. 12 und 19). — Folgt mittelst des 2. Satzes aus dem 6) in Nr. 4. Auf ähnliche Weise wird der folgende Satz aus dem 7) in Nr. 4 abgeleitet.

5) „Ist $A : B > A' : B'$, so hat man

$$A : B > (A + A') : (B + B') > A' : B'."$$

6. Bezeichnen α, β, γ gegebene rationale Zahlen, so wird zufolge Nr. 2 die Proportion $\xi : \gamma = \alpha : \beta$ durch die Zahl $\xi = \frac{\alpha\gamma}{\beta}$ befriedigt.

Satz. „In einem stetigen Gröfsensysteme giebt es zu einer Gröfse C eine und nur eine Gröfse X, sodafs das Verhältnifs $X : C$ gleich einem gegebenen $A : B$, wobei A, B mit C nicht gleichartig zu sein brauchen."

Beweis. Ist $A = B$, so ist $X = C$. Wenn A B ungleich sind z. B. $A > B$, so würde bei der Annahme, dafs es keine solche Gröfse X gebe, eine Lücke in dem Gröfsensysteme C, P sich zeigen. Nunmehr ist $P : C$ entweder kleiner oder gröfser als $A : B$. Ersteres tritt sicher ein wenn $P < C$, letzteres wenn $P > pC$, wo die Zahl p so gewählt ist, dafs $A < pB$. Bilden wir mit den Gröfsen P_1, wofür $P_1 : C < A : B$ die erste, aus den Gröfsen P_2, wofür $P_2 : C > A : B$ die zweite Gruppe, so können wir an ihnen leicht die in V. 8 verlangten Eigenschaften nachweisen. So giebt es, wenn wir P_1 nun eine bestimmte Gröfse der ersten Gruppe sein lassen, darin Gröfsen, die P_1 überschreiten. Da $P_1 : C < A : B$, so existiren Zahlen m n, sodafs neben

$$mP_1 < nC \qquad mA > nB.$$

Nach V. 9 verfügt man über Gröfsen D, so dafs

$$mD < nC - mP_1$$

d. i.

$$m(P_1 + D) < nC,$$

also $(P_1 + D) : C < A : B$. U. s. f.[4])

7. Satz. „Es seien zwei Verhältnisse $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gegeben. Bestimmt man zu einer beliebigen Gröfse M eines stetigen Systemes von absoluten Gröfsen eine Gröfse N, sodafs $M : N = \mathfrak{a}$, und zu N eine Gröfse P, so dafs $N : P = \mathfrak{b}$, so ist das Verhältnifs $M : P$ eine von M unabhängige Gröfse.“ Denn ist

$$\mathfrak{a} = M : N = M' : N' \qquad \mathfrak{b} = N : P = N' : P',$$

so hat man nach dem 10. Satze in Nr. 4 $M : P = M' : P'$. Jedes der Verhältnisse $M : P = M' : P' = \ldots$ heifst aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zusammengesetzt[5]) und wird mit $\mathfrak{ab}$ bezeichnet.

Dabei bestehen die Sätze:

1) $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$. — Bestimmt man die Gröfse R so, dafs $M : N = P : R$, so ist wegen $N : P = N : P$ nach dem 14. Satze in Nr. 5 $M : P = N : R$ d. h. $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$.

2) $(\mathfrak{ab})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{bc})$. — Setzt man $\mathfrak{c} = P : Q$, so ergiebt sich

$$\mathfrak{bc} = N : Q \qquad (\mathfrak{ab})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{bc}) = M : Q.$$

3) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, so hat man $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}$.

8. Bei den bis jetzt vorgeführten Begriffen sind die Griechen stehen geblieben. In den auf uns gekommenen geometrischen Schriften des Alterthumes findet sich keine deutliche Spur der Ansicht, dafs das Verhältnifs zweier incommensurabelen Gröfsen eine Zahl sei. Sie entwickelte sich vielmehr erst im 16. Jahrhunderte und verbreitete sich dann, ohne ernsthaften Widerstand zu finden. Als Ausdruck derselben mögen wir die folgende Definition betrachten, womit Newton's Arithmetica universalis anfängt: „Per numerum abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus." Sie bildet jedoch nur ein Paradestück, von dem weiter kein Gebrauch gemacht wird.

In Wahrheit führt die vorgetragene Lehre zu der folgenden Entwickelung. Nachdem man allen Verhältnissen, die dem der commensurabelen Gröfsen $A = aM$ $B = bM$ gleich sind, die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ zugeordnet hat, wird man auch allen Verhältnissen, die dem zweier incommensurabelen Gröfsen A B gleich sind, eine absolute Zahl entsprechen lassen, welche der Exponent oder Index des Verhältnisses $A : B$ heifst. Da er nach Nr. 2 eine rationale Zahl nicht sein kann, so wird er als eine incommensurabele oder irrationale Zahl bezeichnet. Dem gröfseren Verhältnisse soll die gröfsere Zahl entsprechen. — Damit ist aber noch nicht alles gethan. Vielmehr erhebt sich nun erst die Frage, ob die neuen Zahlen ähnliche Eigenschaften besitzen wie die absoluten rationalen d. h. ob man mit ihnen so rechnen könne, wie mit diesen. Dafs das in der That zutrifft, läfst sich mit Hilfe der in Nr. 4—7 gegebenen Sätze leicht nachweisen.

9. Das Rechnen mit den geometrischen Verhältnissen. Addition und Subtraction. Nach Nr. 6 kann man jedes Verhältnifs in eines mit gegebenem Hintergliede M verwandeln. Setzt man nun

$$\mathfrak{a} = P : M \qquad \mathfrak{b} = Q : M,$$

so ist nach dem 14. Satze in Nr. 7 das Verhältnifs $(P + Q) : M$ eine von M unabhängige Gröfse, die wir als die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bezeichnen. — Durch Wiederholung der Schlüsse in

III. 12 erkennt man, dafs diese Addition denselben Regeln genügt, wie die der natürlichen Zahlen und dafs die Differenz $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ stets möglich und eindeutig ist, wenn $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$.

Unter dem m-fachen von $\mathfrak{a}$ versteht man das Verhältnifs $mP : M$, unter dem m^{ten} Theile von $\mathfrak{a}$ das V. $P : mM$. — Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, so giebt es stets Vielfache von $\mathfrak{b}$, die gröfser als $\mathfrak{a}$ sind. Bestimmt man nämlich die ganze Zahl p so, dafs $pQ > P$, so ist $p\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$. — Die geometrischen Verhältnisse gehören somit zu den absoluten Gröfsen im engeren Sinne.

Multiplication und Division. Das aus den Verhältnissen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zusammengesetzte heifse ihr Product: $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$.[6]) — Das commutative und associative Gesetz, sowie die Regel, dafs neben

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \qquad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}$$

sei, folgen unmittelbar aus Nr. 7. — Dafs neben

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{a}' \qquad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} > \mathfrak{a}'\mathfrak{b},$$

zeigt der 12. Satz in Nr. 4. — Die distributive Formel

$$(\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} \pm \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$$

erhellt sofort, wenn

$$\mathfrak{a} = P : M \qquad \mathfrak{b} = Q : M \qquad \mathfrak{c} = M : R$$

gesetzt werden. — Die Gleichung $\mathfrak{x}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ wird erfüllt durch $\mathfrak{x} = P : Q$ und nur dadurch. Somit ist der Quotient

$$\frac{P : M}{Q : M} = P : Q.$$

10. So gelangt man mit Hilfe eines stetigen Gröfsensystemes $A, B, C \ldots$ zu einem Zahlensystem, das ebenfalls stetig ist. Jeder Lücke des einen Systemes würde nämlich eine des anderen entsprechen. Es wäre leicht, die irrationalen Zahlen $A : B$ in systematischer Form darzustellen. Dafs umgekehrt jedem systematischen Bruche ohne Ende, wenn nur beliebig viele Stellen desselben auf arithmetischem Wege bestimmt werden können, ein Gröfsenverhältnifs entspricht, wird aus der Stetigkeit des Systemes $A, B, C \ldots$ gefolgert (vgl. VII. 13). — Unsere nächste Aufgabe bestände darin, uns bei der Vergleichung der neuen Zahlen untereinander, bei der arithmetischen Darstellung

ihrer Summen, Producte u. s. w. von dem zu Grunde gelegten Gröfsensysteme frei zu machen. Wir ziehen es jedoch vor, die auf diesem Wege zu erzielenden Resultate mit Einschluſs des Zahlensystemes selbst direct d. h. ohne den Umweg über ein stetiges Gröfsensystem einzuschlagen, in die Arithmetik einzuführen. Dabei wird die Theorie der Verhältnisse von stetigen Gröfsen eine erhebliche Vereinfachung erfahren, so daſs die vorstehende entbehrlich wird.

Gleichwol verdient sie unsere Aufmerksamkeit. Und zwar nicht allein wegen ihrer schon betonten historischen Bedeutung als erster Versuch, ein System von (abstracten) Gröfsen zu definiren, sondern auch deſshalb, weil sie ein Verfahren an die Hand giebt, die absoluten Zahlen aus der reinen Geometrie abzuleiten. Das Wesen derselben besteht darin, geometrische Objecte zu bilden, welchen die nämlichen formalen Eigenschaften zukommen, wie den absoluten Zahlen. Als solche können, wie v. Staudt dargelegt hat,[7]) auch dienen die Würfe oder Doppelverhältnisse von je vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe.

Sowie v. Staudt alle reellen Zahlen erhalten hat, so können sie auch abgeleitet werden aus den Verhältnissen der relativen Gröfsen im engeren Sinne. Man erklärt dann die Verhältnisse von je zwei Strecken in derselben Geraden $AB : BC$, $A'B' : B'C'$ als einander gleich, wenn erstens die Verhältnisse der bezüglichen absoluten Strecken im Sinne von Nr. 2 einander gleich sind und zweitens die Punkte B, B' entweder beide innerhalb oder beide aufserhalb der Strecken AC, $A'C'$ liegen.

VII. Abschnitt.

Arithmetische Theorie der irrationalen Zahlen.

1. Wir haben VI. 8 der Einführung der irrationalen Zahlen vermittelst eines stetigen Gröfsensystemes gedacht. In neuerer Zeit hat man es vorgezogen, diese Theorie auf arithmetischem Boden zu entwickeln, wozu das im 3. Abschnitte auseinandergesetzte Verfahren der Begriffsbildung vollkommen ausreicht. Dabei kann man in verschiedener Weise zu Werke gehen. Bisher sind solche Theorien der irrationalen Zahlen von Weierstrafs, G. Cantor, R. Dedekind[1]) aufgestellt worden, wovon uns die Cantor'sche am leichtesten durchführbar zu sein scheint. Sie läfst sich ungezwungen an die Lehre von den systematischen Brüchen anknüpfen.

2. Nach IV. 6 ist eine rationale Zahl α entweder gleich einem Bruche von der Form

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_m}{e^m},$$

oder es giebt eine unbegrenzte, schliefslich periodische Reihe von ganzen Zahlen $c_0, c_1, c_2 \ldots$, so dafs wie grofs auch die positive ganze Zahl n sein mag,

$$\text{(a)} \quad c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} < \alpha < c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n + 1}{e^n}.$$

Dabei bedeutet e eine ganze positive Zahl ≥ 2; c_0 kann jede beliebige ganze Zahl sein; $c_1, c_2 \ldots c_n \ldots$ sind Ziffern, also je auf die Werthe 0 bis $e - 1$ beschränkt. Umgekehrt entspricht jeder Reihe von ganzen Zahlen $c_0, c_1 \ldots$ von den eben angegebenen Eigenschaften, die schliefslich periodisch wird, eine rationale Zahl α, welche der Relation (a) genügt.

Nur in dem Falle, dafs die Periode aus der einen Ziffer $e-1$ besteht, ist im zweiten Theile von (a) von einem bestimmten Werthe von n an das Zeichen $=$ statt $<$ einzusetzen.

Untersuchen wir nun näher die Beziehung des Werthes α zu dem systematischen Bruche

$$S_n = c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Man wird sofort bemerken, dafs die positive Differenz $\alpha - S_n$ von einem bestimmten Werthe des Zeigers n an kleiner ist, als eine beliebige positive rationale Zahl ε. Genauer: Zu jeder positiven Zahl ε gehört eine positive Zahl μ, welche die Eigenschaft hat, dafs

$$0 < \alpha - S_n < \varepsilon$$

wenn nur $n > \mu$. In der That folgt aus (a)

$$0 < \alpha - S_n < \frac{1}{e^n} < \frac{1}{1 + n(e-1)}$$

(II. 9); nimmt man nun n so an, dafs

$$\frac{1}{1 + n(e-1)} < \varepsilon,$$

d. i.

$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon(e-1)},$$

so hat man

$$\alpha - S_n < \varepsilon.$$

Wir können demnach

$$\mu \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon(e-1)}$$

setzen. In Folge dieses Verhaltens nennt man α den Grenzwerth der Zahlen $S_0, S_1 \ldots S_n$ bei unbegrenzt wachsendem n, was kurz durch die Formel

$$\alpha = \lim_{n=+\infty} S_n$$

ausgedrückt wird. Es hat keine Schwierigkeit, den Begriff des Grenzwerthes etwas zu verallgemeinern. φ_n bedeute einen rationalen von der ganzen positiven Zahl n abhängi-

gen Ausdruck und α eine rationale Zahl. Wenn dann zu jeder positiven rationalen Zahl ε eine positive rationale Zahl μ gehört, von der Eigenschaft, dafs stets

$$|\alpha - \varphi_n| < \varepsilon \qquad \text{(b)}$$

wenn nur $n > \mu$; so heifst α der Grenzwerth (limes) der Zahlen $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots$ bei unbegrenzt wachsendem n; wofür die abgekürzte Schreibweise gebraucht wird

$$\alpha = \lim_{n=+\infty} \varphi_n .^{2})$$

Von entscheidender Wichtigkeit hierbei ist die wirkliche Herstellung der Zahl μ, die, wenn nicht $\varphi_n = \alpha$, von ε abhängen mufs. Bevor sie nicht geleistet ist, darf von einem Grenzwerthe der Zahlen φ_n nicht gesprochen werden. Dabei darf man annehmen, dafs ε in (b) unter einer bestimmten, übrigens beliebigen positiven Zahl liege. — Ist insbesondere $\alpha = 0$, so mufs zu jeder positiven Zahl ε eine ebensolche μ gehören von der Eigenschaft, dafs stets $|\varphi_n| < \varepsilon$, wenn nur $n > \mu$.

Wenn die $\varphi_0, \varphi_1 \ldots$ sowie der Zeiger n selbst, bei wachsendem n gröfser werden, als jede positive rationale Zahl γ, so drückt man das kurz durch die Formel aus

$$\lim_{n=+\infty} \varphi_n = +\infty \text{ (unendlich)}$$

d. i. zu jeder positiven rationalen Zahl γ gehört eine ebensolche Zahl μ von der Eigenschaft, dafs stets $\varphi_n > \gamma$, wenn nur $n > \mu$. Endlich bedeutet die Formel

$$\lim_{n=+\infty} \varphi_n = -\infty$$

den Umstand, dafs zu jeder negativen rationalen Zahl $-\gamma$ eine positive rationale Zahl μ gehört von der Eigenschaft, dafs stets $\varphi_n < -\gamma$, wenn nur $n > \mu$.

3. Legt man sich eine unbegrenzte Reihe $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n \ldots$ vor, so liegt die Frage nahe, ob ihre Glieder einen rationalen Grenzwerth besitzen. Eine Bedingung, welcher die φ_n dann notwendig zu genügen haben, ergiebt sich unmittelbar aus (b). Es ist nämlich auch

$$|\alpha - \varphi_{n+r}| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2 \ldots),$$

so dafs man schliefsen mufs

$$|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < 2\varepsilon,$$

wenn nur $n > \mu$. Indem auch 2ε jede positive Zahl bedeuten kann, so gelangen wir hierdurch zu folgender notwendigen Bedingung: Sollen die $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots$ einen rationalen Grenzwerth α besitzen, so mufs zu jeder positiven Zahl ε eine ebensolche Zahl μ gehören von der Eigenschaft, dafs

$$|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < \varepsilon \qquad (c)$$

wenn nur $n > \mu$, gleichviel welchen der ganzzahligen Werthe 1, 2, ... auch r annehmen mag.

Allein diese Bedingung ist nicht hinreichend. Man kann leicht zeigen, dafs sie an den φ_n erfüllt sein kann, ohne dafs ein rationaler Grenzwerth vorhanden ist. Die Relation (c) besteht immer, wenn wir

$$\varphi_n = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} = S_n$$

setzen, wobei wir unter $c_1, c_2 \ldots c_n \ldots$ eine unbegrenzte Reihe von Ziffern d. i. $0 \leqq c_r \leqq e - 1$) verstehen, von denen man beliebig viele berechnen kann. In der That ist nun (vgl. IV. 6)

$$0 \leqq S_{n+r} - S_n \leqq \frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+r}} < \frac{1}{e^n}, \qquad (d)$$

so dafs für μ der schon oben benutzte Werth $\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon\,(e - 1)}$ gesetzt werden kann.

Werden die $c_0, c_1 \ldots c_n \ldots$ schliefslich periodisch, so ist, wie wir bereits wissen, ein rationaler Grenzwerth für die S_n vorhanden. Wir zeigen nun, dafs umgekehrt, wenn ein rationaler Grenzwerth α für die S_n existiren soll, die Reihe $c_0, c_1 \ldots c_n \ldots$ schliefslich periodisch werden mufs. Es soll mithin zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ gehören von der Eigenschaft, dafs $|\alpha - S_n| < \varepsilon$ für alle $n > \mu$. Angenommen nun, die Reihe $c_1, c_2 \ldots c_n \ldots$ werde nicht periodisch. Wir bemerken zunächst nach (d), dafs

$$S_{n+r} \geqq S_n \qquad S_{n+r} + \frac{1}{e^{n+r}} \leqq S_n + \frac{1}{e^n}. \qquad \text{(e)}$$

Es sei m ein bestimmter Werth von n. Bei einem hinlänglich grofsen Werthe von r wird dann $S_{m+r} > S_m$ und für ein beliebiges s $S_{m+r+s} - \alpha > S_{m+r} - \alpha$ sein. Daraus folgt, dafs unmöglich $S_m \geqq \alpha$ sein kann, also $S_m < \alpha$ sein mufs. Es würde ja $S_n - \alpha$ von $n = m + r + 1$ an über der positiven Zahl $S_{m+r} - \alpha$ liegen und könnte somit nicht kleiner werden als jede Zahl $\varepsilon > 0$. Aus (e) wird auf ähnliche Weise geschlossen

$$\alpha - S_{m+r+s} > \alpha - \left(S_{m+r+s} + \frac{1}{e^{m+r+s}}\right)$$
$$> \alpha - \left(S_{m+r} + \frac{1}{e^{m+r}}\right),$$

so dafs $S_m + \frac{1}{e^m}$ unmöglich $\leqq \alpha$ sein kann, also $S_m + \frac{1}{e^m} > \alpha$ sein mufs. Soll aber zu einer rationalen Zahl α eine Folge von Ziffern $c_1, c_2, \ldots c_n \ldots$ gefunden werden, derart, dafs wie grofs auch m sein mag, die Relation

$$S_m < \alpha < S_m + \frac{1}{e^m}$$

bestehe, so mufs die Folge schliefslich periodisch werden.

Daraus folgt, falls die Ziffern $c_1, c_2 \ldots c_n \ldots$ sich nicht von einem bestimmten Gliede an periodisch wiederholen, so können die S_n keinen rationalen Grenzwerth haben. Es ist leicht, solche Gesetze für die Entwickelung der aufeinanderfolgenden Stellen $c_1, c_2 \ldots$ vorzuschreiben, dafs die Folge nicht periodisch sein kann. Man nehme z. B.

$$\varphi_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \cdots + \frac{1}{10^{\frac{n(n+1)}{2}}} \; (n = 1, 2 \ldots),$$

welche den Decimalbruch 0,1010010001 ... liefern.

4. Die so eben gemachte Bemerkung veranlafst uns, die Eigenschaften einer Folge von rationalen Zahlen φ_0, $\varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots$, welche von einer unbegrenzt wachsenden ganzen Zahl n abhängen und zunächst blofs der folgenden Forde-

rung genügen, näher zu untersuchen. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehöre eine positive Zahl μ von der Eigenschaft, dafs

$$|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < \varepsilon \text{ wenn nur } n > \mu, \qquad (f)$$

was immer auch r für eine ganze positive Zahl sein mag.

1. Satz. „Unter dieser Voraussetzung mufs einer der folgenden drei Fälle eintreten:

1) Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\mu > 0$, derart dafs

$$|\varphi_n| < \varepsilon \text{ wenn nur } n > \mu;$$

oder

2) Es existiren zwei positive rationale Zahlen $\varrho < \varrho'$, derart dafs $\varrho < \varphi_n < \varrho'$, wenn nur n über einer bestimmten positiven Zahl μ liegt; oder

3) Es existiren zwei negative rationale Zahlen

$$-\varrho' < -\varrho,$$

derart dafs

$$-\varrho' < \varphi_n < -\varrho,$$

wenn nur n über einer bestimmten positiven Zahl μ liegt."

Aus (f) ergiebt sich nämlich, wenn m eine bestimmte ganze Zahl $> \mu$ bedeutet,

$$\varphi_m - \varepsilon < \varphi_{m+r} < \varphi_m + \varepsilon \qquad (r = 1, 2, 3 \ldots).$$

Findet sich nun, dafs $\varphi_m > \varepsilon$ oder dafs $\varphi_m < -\varepsilon$, so ist schon ersichtlich, dafs die φ_n die im zweiten oder dritten Falle ausgesprochene Eigenschaft besitzen. Wenn aber φ_n zwischen $-\varepsilon$ und ε liegt, so bleibt die Frage noch unentschieden. Dann setze man für ε nacheinander positive Zahlen $\varepsilon', \varepsilon'' \ldots \varepsilon^{(p)} \ldots$, die beständig abnehmen und kleiner werden, als jede rationale positive Zahl. Nun sind nur zwei Fälle denkbar. Entweder giebt es ein bestimmtes $\varepsilon^{(p)}$, wofür $\varphi_m > \varepsilon^{(p)}$ oder $\varphi_m < -\varepsilon^{(p)}$, oder es giebt keine solche Zahl. Im ersten Falle sind die φ_n der zweiten oder dritten Classe zuzuweisen; im zweiten gehören sie zur ersten Classe, indem man hat $-2\varepsilon^{(p)} < \varphi_{m+r} < 2\varepsilon^{(p)}$. Somit unterliegt es keinem Zweifel, dafs einer der drei im Satze erwähnten Fälle eintreten mufs; denn eine weitere Möglichkeit ist ausgeschlossen.

Welcher derselben aber bei einer concreten Annahme der φ_n zutreffe, kann auf dem angegebenen Wege nicht immer entschieden werden. Ueberhaupt ist bisher kein Verfahren aufgefunden worden, wodurch ersichtlich wäre, dafs in allen Fällen eine endliche Anzahl von Versuchen zur Herbeiführung der Entscheidung ausreicht.

Der vorstehende Satz ist für die folgende Theorie der irrationalen Zahlen unentbehrlich. Man könnte ihn auch mit Hilfe eines anderen in Nr. 11 zu erwähnenden Satzes beweisen.

2. Satz. „Genügen die φ_n der Bedingung (f), so gilt das nämliche sowol von den Zahlen $\gamma \pm \varphi_n$, als auch von den Zahlen $\gamma\varphi_n$; worin γ eine beliebige, von 0 verschiedene rationale Zahl bedeutet."

„Auch die Zahlen $\frac{1}{\varphi_n}$ entsprechen der Bedingung (f), falls nur $\lim\limits_{n=+\infty} \varphi_n$ nicht 0 ist, in welchem Falle $1 : \varphi_n$ den Grenzwerth $\pm \infty$ besitzt, wenn die φ_n von einem bestimmten Gliede der Folge an sämmtlich dasselbe Zeichen haben."

„Befriedigen auch die Zahlen ψ_n die Bedingung (f), so gilt dasselbe von den Folgen, welche bezüglich durch das allgemeine Glied $\varphi_n \pm \psi_n$, $\varphi_n\psi_n$ dargestellt sind. Die Folge $\psi_n : \varphi_n$ genügt der Relation (f) sicher dann, wenn $\lim\limits_{n=+\infty} \varphi_n$ nicht 0 ist."

Die Beweise dieser Sätze bieten sich unmittelbar dar. Nach dem 1. Satze läfst sich, falls $\lim \varphi_n$ nicht 0 ist, eine pcsitive Zahl ϱ so bestimmen, dafs $|\varphi_n| > \varrho$ wenn nur $n > \mu$. Man findet daher

$$\left|\frac{1}{\varphi_{n+r}} - \frac{1}{\varphi_n}\right| = \left|\frac{\varphi_{n+r} - \varphi_n}{\varphi_n\varphi_{n+r}}\right| < \frac{|\varphi_{n+r} - \varphi_n|}{\varrho^2} < \frac{\varepsilon}{\varrho^2}.$$

Ist nun ε' irgend eine positive Zahl, so ermittle man eine Zahl $\varepsilon < \varepsilon'\varrho^2$. Ihr entspricht in (f) eine Zahl $\mu' > 0$. Läfst man M die gröfsere unter den Zahlen μ, μ' sein, so ergiebt sich

$$\left|\frac{1}{\varphi_{n+r}} - \frac{1}{\varphi_n}\right| < \varepsilon', \quad \text{wenn nur } n > M.$$

Wird neben der Reihe φ_n noch eine zweite Reihe ψ_n von ähnlicher Beschaffenheit betrachtet, so kann man immer behaupten, dafs neben (f) auch die Relation bestehe

$$|\psi_{n+r} - \psi_n| < \varepsilon, \text{ wenn nur } n > \mu.$$

Somit folgt

$$|(\varphi_{n+r} + \psi_{n+r}) - (\varphi_n + \psi_n)| < 2\varepsilon, \text{ wenn nur } n > \mu.$$

Da ferner

$$\varphi_{n+r}\psi_{n+r} - \varphi_n\psi_n = \varphi_{n+r}(\psi_{n+r} - \psi_n) + \psi_n(\varphi_{n+r} - \varphi_n)$$

und nach dem 1. Satze solche positive Zahlen ϱ', σ' existiren müssen, dafs für $n > \mu'$

$$|\varphi_n| < \varrho' \qquad |\psi_n| < \sigma',$$

so wird für $n > M$

$$|\varphi_{n+r}\psi_{n+r} - \varphi_n\psi_n| < (\varrho' + \sigma')\,\varepsilon$$

sein, worin $(\varrho' + \sigma')\,\varepsilon$ jede positive Zahl sein kann.

Corollar. „Betrachtet man eine endliche Anzahl (p) Folgen φ_n, ψ_n, $\chi_n \ldots \omega_n$, welche sämmtlich der Relation (f) genügen, so gilt dasselbe von den Folgen, welche bezüglich durch das allgemeine Glied

$$\varphi_n + \psi_n + \chi_n + \cdots + \omega_n, \qquad \varphi_n \cdot \psi_n \cdot \chi_n \cdot \ldots \cdot \omega_n$$

dargestellt sind."

3. Satz. „Wenn die φ_n einen rationalen Grenzwerth α besitzen, so haben auch die Zahlen $\gamma \pm \varphi_n$, sowie $\gamma\varphi_n$ je einen rationalen Grenzwerth und zwar ist er bezüglich $\gamma \pm \alpha$, $\gamma\alpha$. Wenn α nicht 0 ist, so haben auch die $1 : \varphi_n$ einen rationalen Grenzwerth, und zwar ist er $1 : \alpha$."

„Haben auch die ψ_n einen rationalen Grenzwerth β, so auch die Ausdrücke $\varphi_n \pm \psi_n$, $\varphi_n\psi_n$, und zwar ist dieser Grenzwerth bezüglich $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$. Die $\psi_n : \varphi_n$ haben den Grenzwerth $\beta : \alpha$, wenn α nicht Null ist."

Auch die Beweise dieser Sätze ergeben sich unmittelbar aus der Relation (b), der wir die folgende an die Seite setzen können:

$$|\beta - \psi_n| < \varepsilon \text{ für alle } n > \mu.$$

Nun hat man nur die Unterschiede zu betrachten:

$$(\alpha+\gamma)-(\varphi_n+\gamma)=\alpha-\varphi_n, \qquad \gamma\alpha-\gamma\varphi_n=\gamma(\alpha-\varphi_n)$$

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\varphi_n}=\frac{\varphi_n-\alpha}{\alpha\varphi_n},$$

$$(\alpha+\beta)-(\varphi_n+\psi_n)=(\alpha-\varphi_n)+(\beta-\psi_n),$$

$$\alpha\beta-\varphi_n\psi_n=\beta(\alpha-\varphi_n)+\alpha(\beta-\psi_n)-(\alpha-\varphi_n)(\beta-\psi_n).$$

Hieraus folgt nach (b) z. B., dafs für $n>\mu$

$$\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\varphi_n}\right|<\frac{\varepsilon}{\varrho\cdot|\alpha|}$$

und da $\varepsilon:\varrho\,|\alpha|$ jede positive Zahl sein kann,

$$\lim_{n=+\infty}\frac{1}{\varphi_n}=\frac{1}{\alpha}.$$

Aehnlich hat man — $\varepsilon<1$ vorausgesetzt — für $n>\mu$

$$|\alpha\beta-\varphi_n\psi_n|<\varepsilon\{|\alpha|+|\beta|+\varepsilon\}<\varepsilon\,\{|\alpha|+|\beta|+1\};$$

somit, da der letzte Ausdruck jede positive Zahl sein kann,

$$\lim_{n=+\infty}\varphi_n\beta_n=\alpha\beta.$$

Corollar. „Sind eine endliche Anzahl (p) Ausdrücke φ_n, ψ_n, χ_n ... ω_n vorgelegt, deren jeder einen rationalen Grenzwerth besitzt, so hat die Summe $\varphi_n+\psi_n+\chi_n+\cdots+\omega_n$ zum Grenzwerth die Summe, das Product $\varphi_n\cdot\psi_n\cdot\chi_n\cdot\ldots\cdot\omega_n$ zum Grenzwerthe das Product der Grenzwerthe der einzelnen Glieder.“

5. Definition der irrationalen Zahlen. Wenn die rationalen Zahlen φ_n die Forderung (f) befriedigen, einen rationalen Grenzwerth jedoch nicht besitzen, so denken wir uns durch die unbegrenzte Reihe φ_0, φ_1 ... ein neues von jeder rationalen Zahl verschiedenes Object gesetzt, wodurch zunächst nichts weiter ausgedrückt ist, als dafs wir sie im Gegensatze zu ihren einzelnen Gliedern als ein Ding für sich auffassen. Vorläufig wenden wir für das neue Object die Bezeichnung $(\varphi_0, \varphi_1 \ldots)$ oder kürzer (φ_n) an. Zugleich wollen wir, um Unterscheidungen im Folgenden zu vermeiden, wenn den Gliedern φ_n ein rationaler Grenzwerth zukömmt, ihn unter dem Zeichen (φ_n) verstehen.[2*])

Hierbei ist hervorzuheben, dafs die Entscheidung, ob ein vorgelegter rationaler Ausdruck φ_n einen rationalen Grenzwerth besitze oder nicht, nicht durch eine allgemeine Methode herbeigeführt werden kann, sondern jedem Falle eigenthümliche, oft umständliche Untersuchungen verlangt.

Der 1. und 2. Satz der vorigen Nr. gestatten nun, die neuen Objecte untereinander und mit den rationalen Zahlen zu vergleichen, d. i. sie als Gröfsen aufzufassen, die mit den rationalen Zahlen zu einem Systeme zusammentreten, welches das der reellen Zahlen genannt wird. Die neuen Zahlen selbst erhalten in demselben das Prädicat „irrational".

Betrachten wir nämlich zwei der neuen Objecte (φ_n), (ψ_n), so genügt auch die aus den Differenzen $\varphi_0 - \psi_0$, $\varphi_1 - \psi_1 \ldots$ gebildete Folge der charakteristischen Forderung (f), so dafs sie entweder zu einem rationalen Grenzwerthe oder zu einem neuen Objecte $(\varphi_n - \psi_n)$ führt.

1. Definition. „Man sagt $(\varphi_n) = (\psi_n)$, falls

$$\lim_{n=+\infty} (\varphi_n - \psi_n) = 0$$

d. i. zu jeder rationalen Zahl $\varepsilon > 0$ eine eben solche Zahl $\mu > 0$ gehört, derart dafs $|\varphi_n - \psi_n| < \varepsilon$, wenn nur $n > \mu$ genommen wird."

2. Definition. „Man sagt $(\varphi_n) > \alpha$ (rationale Zahl), wenn eine positive rationale Zahl ϱ existirt, derart dafs $\varphi_n - \alpha > \varrho$, wenn nur n gröfser ist als eine bestimmte Zahl $\mu > 0$."

„Man sagt $(\varphi_n) < \alpha$, wenn eine negative rationale Zahl $-\varrho$ existirt, derart dafs $\varphi_n - \alpha < -\varrho$ für alle $n > \mu$."

Auf ähnliche Art wird man die Relationen $\alpha > (\varphi_n)$, $\alpha < (\varphi_n)$ erklären.

3. Definition. „Man sagt $(\varphi_n) > (\psi_n)$, wenn eine positive rationale Zahl ϱ existirt, derart dafs $\varphi_n - \psi_n > \varrho$ für alle $n > \mu$; und $(\varphi_n) < (\psi_n)$, wenn eine negative rationale Zahl $-\varrho$ existirt, derart dafs $\varphi_n - \psi_n < -\varrho$ für alle $n < \mu$."

Es ist unmittelbar ersichtlich, dafs die in I. 2, 3 auf-

gestellten formalen Forderungen durch diese Definitionen erfüllt werden. Man braucht sich nur an die Formel

$$\varphi_n - \chi_n = (\varphi_n - \psi_n) + (\psi_n - \chi_n)$$

zu erinnern. Dafs die Disjunction: gleich, gröfser, kleiner vollständig sei, erhellt aus dem 1. Satze in Nr. 4, den man nur auf die Ausdrücke $\alpha - \varphi_n$, $\varphi_n - \alpha$, $\varphi_n - \psi_n$ anzuwenden hat.

Nach der 2. Definition ist $(\varphi_n) > 0$, wenn eine solche rationale positive Zahl ϱ existirt, dafs für alle $n > \mu$ $\varphi_n > \varrho$, und $(\varphi_n) < 0$, wenn eine solche negative rationale Zahl existirt, dafs für alle $n > \mu$ $\varphi_n < -\varrho$. Eine irrationale Zahl der ersten Art soll positiv, eine der zweiten Art negativ heifsen. Für jede von 0 verschiedene Zahl (φ_n) werden die φ_n schliefslich gleichbezeichnet; daher ist $(|\varphi_n|)$ eine positive irrationale Zahl, die der absolute Betrag von (φ_n) genannt und mit $|(\varphi_n)|$ bezeichnet wird. Nach dem 1. Corollar ist $|(\varphi_n)| = (\varphi_n)$ oder $(-\varphi_n)$, je nachdem $(\varphi_n) >$ oder < 0.

Corollare. 1. „Wird aus der unbegrenzten Folge der ganzen Zahlen 0, 1, 2 ... eine andere unbegrenzte Folge $k_1, k_2, \ldots k_n \ldots$ herausgehoben, so ist $(\varphi_n) = (\varphi_{k_n})$."

2. „Ist für $n > \mu$ $\varphi_n > \alpha$ (rationale Zahl), so ist $(\varphi_n) \geqq \alpha$. Wenn aber $(\varphi_n) < \alpha$, so ist $(\varphi_n) \leqq \alpha$." — Denn wäre im ersten Falle $(\varphi_n) < \alpha$, so müfste schliefslich

$$\varphi_n - \alpha < -\varrho < 0$$

also $\varphi_n < \alpha$ sein.

3. „Ist für $n > \mu$

$$\varphi_n > \psi_n,$$

so folgt

$$(\varphi_n) \geqq (\psi_n)."$$

4. „Zu jeder rationalen Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine solche Zahl $\mu > 0$, dafs

$$\varphi_n - \varepsilon < (\varphi_n) < \varphi_n + \varepsilon \qquad (n > \mu)."$$

Denn nach (f) hat man für $\varepsilon' < \varepsilon$ und $r = 1, 2 \ldots$

$$\varphi_n - \varepsilon' < \varphi_{n+r} < \varphi_n + \varepsilon' \qquad (n > \mu');$$

somit nach 1. und 2., da

$$(\varphi_{n+r}) = (\varphi_n), \quad \varphi_n - \varepsilon' \leq (\varphi_n) \leq \varphi_n + \varepsilon',$$

woraus der Satz unmittelbar folgt. — Man schliefst aus der vorstehenden Relation, dafs „zwischen je zwei reellen Zahlen $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ unbegrenzt viele rationale Zahlen liegen." Sind z. B. beide Zahlen irrational:

$$\mathfrak{a} = (\varphi_n), \qquad \mathfrak{b} = (\psi_n),$$

so weifs man, dafs für alle $n > \mu$

$$\psi_n - \varphi_n > \varrho > 0.$$

Demnach hat man, wenn $2\varepsilon \leq \varrho$,

$$\varphi_n + \varepsilon < \psi_n - \varepsilon$$

und sòmit bei hinlänglich grofsen Werthen von n

$$\mathfrak{a} < \varphi_n + \varepsilon < \psi_n - \varepsilon < \mathfrak{b}.$$

5. „Eine Zahl (φ_n), deren absoluter Betrag kleiner ist als jede positive Zahl ε, ist Null."[3])

Denn wäre $(\varphi_n) > 0$, also ihr absoluter Betrag ebenfalls (φ_n), so hätte man für $n > \mu$

$$\varphi_n > \varrho > 0,$$

somit $(\varphi_n) \geq \varrho$ gegen die Voraussetzung. Ebensowenig kann $(\varphi_n) < 0$ sein.

6. „Wenn die φ_n mit wachsendem n nicht abnehmen (zunehmen), so ist (φ_n) gröfser (kleiner) als jedes φ_n."

Wenn die φ_n nicht schliefslich alle gleich werden, so giebt es eine ganze Zahl $k > 0$, derart, dafs

$$\varphi_{m+k} > \varphi_m.$$

Setzt man in 4.

$$\varepsilon = \varphi_{m+k} - \varphi_m,$$

so folgt bei hinlänglich grofsem $r > k$

$$(\varphi_n) > \varphi_{m+r} - (\varphi_{m+k} - \varphi_m) > \varphi_m.$$

7. „Betrachtet man, wie in Nr. 3, eine irrationale Zahl von der systematischen Form

$$\mathfrak{c} = (S_n) = \left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}\right) = \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right),$$

so besteht, was immer auch n für einen der Werthe $0, 1, 2 \ldots$ haben mag, die Relation

$$S_n < c < S_n + \frac{1}{e^n}.“$$

Sie ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze unmittelbar, denn die S_n nehmen bei wachsenden n nicht ab, die $S_n + \frac{1}{e^n}$ nicht zu. (Vgl. Nr. 3.)

NB. Dafs man jede irrationale Zahl (φ_n) in systematischer Form darstellen könne, wird in Nr. 11 gezeigt werden.

Als Beispiel zum Vorstehenden möge der folgende Satz dienen. „Zu den rationalen Zahlen

$$\varphi_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad (n = 1, 2 \ldots),$$

wo $n!$ das Product aller natürlichen Zahlen von 1 bis n bedeutet, gehört eine irrationale Zahl, die gewöhnlich mit e bezeichnet wird.“ — Man bemerkt unmittelbar dafs

$$\varphi_{n+r} > \varphi_n.$$

Ferner hat man

$$\varphi_{n+r} - \varphi_n = \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+r)}\right\},$$

somit nach IV. 6

$$\varphi_{n+r} - \varphi_n < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{r-1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1 - \frac{1}{(n+1)^r}}{1 - \frac{1}{n+1}} < \frac{1}{n \cdot n!}. \qquad \text{(h)}$$

Bezeichnet nun m irgend eine natürliche Zahl, so ist für $n > m$

$$\varphi_{n+r} - \varphi_n < \frac{1}{m \cdot m!}\,\frac{1}{(m+1)^{n-m+1}} < \frac{(m+1)^{m-1}}{m \cdot m!\,(1 + n \cdot m)},$$

so dafs $\varphi_{n+r} - \varphi_n$ sicher $< \varepsilon$ ist, wenn

$$n > \frac{1}{m}\left\{\frac{(m+1)^{m-1}}{m \cdot m!\,\varepsilon} - 1\right\}.$$

Also giebt es eine Zahl $(\varphi_n) = e$ und zwar ist $e > \varphi_n$. – Nehmen wir an, es sei e rational und zwar in reducirter Form

$$e = \frac{p}{q} \qquad (q \geq 1).$$

Nach (h) findet man

$$\varphi_q < \varphi_{q+r} < \varphi_q + \frac{1}{q \cdot q!},$$

aber auch, da im zweiten Gliede statt $\frac{1}{n+1}$ $\frac{1}{n+2}$ gesetzt werden kann,

$$\varphi_{q+r} < \varphi_q + \frac{1}{(q+1)!}\frac{q+2}{q+1} < \varphi_q + \frac{1}{q \cdot q!}.$$

Nun ist $(\varphi_{q+r}) = e$. Somit ergiebt sich

$$\varphi_q < e < \varphi_q + \frac{1}{q!\,q}$$

oder

$$q \cdot q!\,\varphi_q > q \cdot q!\,e < q \cdot q!\,\varphi_q + 1.$$

Nach Voraussetzung mufs $q \cdot q!\,e$ eine ganze Zahl sein, kann somit nicht zwischen zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen liegen. Folglich mufs e irrational sein.

6. Addition der irrationalen Zahlen.

4. Definition. „Unter den Summen $\alpha + (\varphi_n)$ und $(\varphi_n) + \alpha$, wo α rational ist, verstehen wir die irrationale Zahl $(\varphi_n + \alpha)$. Die Zahl $(\varphi_n + \psi_n)$ heifst die Summe der irrationalen Zahlen (φ_n) und (ψ_n)."

$$\alpha + (\varphi_n) = (\varphi_n) + \alpha = (\varphi_n + \alpha); \quad (\varphi_n) + (\psi_n) = (\varphi_n + \psi_n).$$

Die Definition beruht auf dem 2. Satze in Nr. 4. Aus dem 3. Satze daselbst entnehmen wir, dafs wenn (φ_n), (ψ_n) rationale Grenzwerthe α, β bedeuten, $(\varphi_n + \psi_n)$ mit $\alpha + \beta$ übereinstimmt. Die analoge Bemerkung wird man auch zu den folgenden Nr. 7—9 zu machen haben.

Bezeichnen nun $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ... reelle Zahlen überhaupt, so wird man aus der vorstehenden Definition ohne jede Schwierigkeit die folgenden Formeln ableiten können.

1) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.

2) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.

3) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}$.

4) Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}'$, so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} > \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}$.

5) Ist $\mathfrak{b} > 0$, so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} > \mathfrak{a}$.

Damit ist aber erwiesen, dafs bei der Addition der reellen Zahlen genau dieselben Regeln gelten, wie bei der von rationalen Zahlen.

7. Subtraction der irrationalen Zahlen. Die Gleichungen

$$\alpha + \mathfrak{x} = (\varphi_n), \qquad (\varphi_n) + \mathfrak{x} = \alpha, \qquad (\varphi_n) + \mathfrak{x} = (\psi_n)$$

haben bez. die Auflösungen

$$\mathfrak{x} = (\varphi_n - \alpha), \qquad (\alpha - \varphi_n), \qquad (\psi_n - \varphi_n)$$

und wegen 6, 4) je nur diese eine. Man bezeichnet sie bez. mit

$$(\varphi_n) - \alpha, \qquad \alpha - (\varphi_n), \qquad (\psi_n) - (\varphi_n).$$

Ist $(\varphi_n) = (\psi_n)$, so ergiebt sich $\mathfrak{x} = 0$, und wenn $(\psi_n \gtrless (\varphi_n)$, simultan $\mathfrak{x} \gtrless 0$. — Wenn

$$(\varphi_n) + (\psi_n) = 0 \quad \{\text{d. i. wenn } (\varphi_n + \psi_n) = 0\},$$

so folgt

$$(\psi_n) = 0 - (\varphi_n),$$

wofür man kürzer

$$(\psi_n) = -(\varphi_n)$$

schreibt. Die Zahlen (φ_n) und $-(\varphi_n)$ heifsen einander entgegengesetzt. Insbesondere ist

$$(-\varphi_n) = -(\varphi_n).$$

Aus den oben angeführten Gesetzen der Addition und der Möglichkeit und Eindeutigkeit der Subtraction in jedem Falle, ergeben sich auch hier dieselben Regeln für das Rechnen mit Summen und Differenzen, wie bei den rationalen Zahlen.

Corollare. 1) Zwei reelle Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, deren Differenz dem absoluten Betrage nach kleiner ist, als jede positive Zahl ε, sind einander gleich.

Nach dem 5. Corollare in Nr. 5 ist nämlich $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = 0$, also mufs $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ sein.

2) Ist die Differenz $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ kleiner als jede Zahl $\varepsilon > 0$, so ist $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$.

Indirect zu beweisen.

3) „Es sei (φ_n) eine reelle Zahl. Dann gehört zu jed positiven Zahl eine positive Zahl μ, derart dafs

$$|(\varphi_n) - \varphi_n| < \varepsilon,$$

wenn nur $n > \mu$."

Setzt man im 4. Cor. der Nr. 5 für ε eine rationa Zahl $\leq \varepsilon$, so folgt

$$\varphi_n - \varepsilon < (\varphi_n) < \varphi_n + \varepsilon$$

für alle $n > \mu$, somit

$$|(\varphi_n) - \varphi_n| < \varepsilon.$$

Nunmehr sind wir berechtigt, auch eine irrationa Zahl (φ_n) als Grenzwerth von φ_n bei unbeschränk wachsenden n zu bezeichnen, so dafs von nun an d Schreibweisen (φ_n) und $\lim \varphi_n$ als gleichbedeutend anz sehen sind.

8. Multiplication der irrationalen Zahlen.

5. Definition. „Bedeutet α eine von Null verschiede rationale Zahl, so nenne man die irrationale Zahl $(\alpha\varphi_n)$ d Product $\alpha \cdot (\varphi_n)$ oder $(\varphi_n) \cdot \alpha$. — Ferner sei

$$0 \cdot (\varphi_n) = (\varphi_n) \cdot 0 = 0.$$

Endlich verstehe man unter dem Producte $(\varphi_n) \cdot (\psi_n)$ dies irrationalen Zahlen die Zahl $(\varphi_n \psi_n)$." (Vgl. wieder Nr. 2. Satz.)

$$\alpha \cdot (\varphi_n) = (\varphi_n) \cdot \alpha = (\alpha\varphi_n) \qquad (\varphi_n) \cdot (\psi_n) = (\varphi_n \psi_n).$$

Diese Benennungen sind völlig berechtigt, denn wie m mittelbar erhellt, bestehen die folgenden Formeln:

1) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$.
2) $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$.
3) $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a} + \mathfrak{c}\mathfrak{a}$.
4) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, so hat man $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}$.
5) Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} > 0$, so hat man $\mathfrak{a}\mathfrak{b} > \mathfrak{a}'\mathfrak{b}$.

Daraus folgt, dafs bei der Multiplication der reelle Zahlen genau dieselben Regeln gelten, wie bei der der ra tionalen Zahlen.

9. Division der irrationalen Zahlen.

Die Gl

chung $\alpha\xi = (\varphi_n)$ hat die Lösung $\xi = \left(\frac{\varphi_n}{\alpha}\right)$, wenn nur die rationale Zahl α nicht 0 ist. — Die Gleichungen

$$(\varphi_n)\,\xi = \alpha \qquad (\varphi_n)\,\xi = (\psi_n),$$

worin (φ_n), (ψ_n) irrationale Zahlen bedeuten, haben bezüglich die Lösung

$$\xi = \left(\frac{\alpha}{\varphi_n}\right), \quad \left(\frac{\psi_n}{\varphi_n}\right).$$

Und zwar haben diese Gleichungen nach dem 5. Satze der vorigen Nummer je nur diese eine Lösung, welche wir bezüglich mit

$$(\varphi_n) : \alpha, \qquad \alpha : (\varphi_n), \qquad (\varphi_n) : (\psi_n)$$

bezeichnen werden. Keiner dieser Quotienten ist Null.

Die Division ist mithin stets möglich, wenn der Divisor nicht Null ist, und zwar in eindeutiger Weise. Aus diesem Satze folgt im Vereine mit den oben nachgewiesenen Gesetzen der Multiplication, dafs bezüglich des Rechnens mit Producten und Quotienten auch hier die aus der Arithmetik der rationalen Zahlen bekannten Regeln gelten.[4])

10. Nachdem nunmehr erwiesen ist, dafs die von uns eingeführten Zahlen die vier Species nach denselben Regeln, wie bei den rationalen Zahlen, zulassen, tritt ihre Analogie mit diesen klar zu Tage. Sie geht noch weiter, indem für die positiven irrationalen Zahlen auch das Axiom des Archimedes besteht d. h. der Satz: „Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > 0$ so giebt es doch ein Vielfaches von $\mathfrak{b}$, welches $\mathfrak{a}$ übertrifft: $p\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$.“ Nach Nr. 5, 4 giebt es stets rationale Zahlen α, β derart, dafs $\alpha > \mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \beta$ und da ganze positive Zahlen p existiren, so dafs $p\beta > \alpha$, so folgt $p\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$.

Daraus kann man schliefsen, dafs jede irrationale Zahl (φ_n) zwischen zwei ganzen Zahlen c_0, $c_0 + 1$ liegen mufs, und weiterhin dafs jedes (φ_n) durch den Grenzwerth eines systematischen Bruches S_n ersetzt werden kann, was wir in Nr. 11 auf eine andere Art nachweisen werden.

Jede reelle Zahl $\mathfrak{a}$ läfst sich auf die Form bringen

$$\mathfrak{a} = c + \mathfrak{r}$$

wo c eine ganze Zahl bedeutet und

$$0 \leq \mathfrak{r} < 1$$

ist; oder auch auf die Form

$$\mathfrak{a} = c' + \mathfrak{r}'$$

wo c' wieder eine ganze Zahl und

$$-\tfrac{1}{2} < \mathfrak{r}' \leq \tfrac{1}{2}$$

ist.

Das System der reellen Zahlen zwischen irge zwei derselben $\mathfrak{a} < 0$, $\mathfrak{b} > 0$ ist stetig (V. 8). Angenoı men es sei Π ein innerhalb dieser Grenzen zusammenhänge des System von reellen Zahlen (ein solches kann stets a rationalen Zahlen gebildet werden) und es seien $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ d beiden Classen eines Schnittes desselben. Bestimmt m zwei ganze Zahlen a, b derart, dafs

$$a \leq \mathfrak{a} < a + 1, \qquad b - 1 < \mathfrak{b} \leq b,$$

so wird unter den Intervallen

$$(a,\ a+1 \ldots -1,\ b)$$

eines und nur eines $(c_0,\ c_0 + 1)$ vorkommen, das Zahlen d beiden Classen enthält. Desgleichen wird unter den e Inte vallen

$$\left(c_0,\ c_0 + \tfrac{1}{e}\right) \cdots \left(c_0 + \tfrac{e-1}{e},\ c_0 + 1\right)$$

ein und nur ein solches Intervall vorkommen u. s. f. A die angegebene Weise gelangt man zu einer Folge v ganzen Zahlen c_0, c_1, $c_2 \ldots$, die von der zweiten an Ziffe bedeuten von der folgenden Eigenschaft. Jedes Intervall

$$\left(S_n,\quad S_n + \frac{1}{e^n}\right) \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

enthält Zahlen beider Classen. Dabei hat S_n (sowie e) di selbe Bedeutung, wie in Nr. 2. Es ist nun zu zeigen, da die Zahl

$$\mathfrak{c} = \left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}\right)$$

gröfser als alle Zahlen $\mathfrak{m}_1$ der ersten und kleiner als alle Zahlen $\mathfrak{m}_2$ der zweiten Classe ist und dafs es neben ihr keine zweite reelle Zahl von derselben Beschaffenheit giebt. Gäbe es in der ersten Classe eine Zahl $\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{c}$, so müfste sie ebenfalls in jedem Intervalle

$$\left(S_n,\ S_n + \frac{1}{e^n}\right)$$

liegen; da aber

$$S_n < \mathfrak{c} \leqq S_n + \frac{1}{e^n}$$

so würde folgen

$$0 < \mathfrak{m}_1 - \mathfrak{c} < \frac{1}{e^n} \text{ d. i. } \mathfrak{c} = \mathfrak{m}_1.$$

In derselben Art folgt, dafs keine Zahl $\mathfrak{m}_2$ der zweiten Gruppe kleiner sein kann als $\mathfrak{c}$. — Und wenn neben $\mathfrak{c}$ noch eine andere Zahl $\mathfrak{c}'$ existirte, gröfser als alle $\mathfrak{m}_1$ und kleiner als alle $\mathfrak{m}_2$, so müfste sie ebenfalls in jedem Intervalle

$$\left(S_n,\ S_n + \frac{1}{e^n}\right)$$

liegen, woraus wieder nach dem 2. Corollar in Nr. 7 zu schliefsen wäre: $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$.

11. Sowie es Folgen von rationalen Zahlen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ giebt, welche der Relation (f) in Nr. 4 Genüge leisten, so kann man dasselbe auch von einer Folge irrationaler Zahlen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_n \ldots$ annehmen. Wir setzen also voraus, dafs diese Zahlen die folgende Eigenschaft besitzen. Zu jeder positiven Zahl e gehört eine positive Zahl $\mathfrak{m}$, derart dafs

$$(1) \qquad |\mathfrak{f}_{n+r} - \mathfrak{f}_n| < e \qquad \text{für alle } n > \mathfrak{m},$$

was auch r für eine ganze positive Zahl sein mag. Man braucht aber nicht mehr neue Zahlen $(\mathfrak{f}_n)$ einzuführen; denn es läfst sich zeigen, dafs stets eine und nur eine reelle Zahl $\mathfrak{c}$ existirt, welche der Grenzwerth der $\mathfrak{f}_n$ ist. D. h. es läfst sich jeder positiven Zahl e eine positive Zahl $\mathfrak{m}$ derart zuordnen, dafs

$$|\mathfrak{c} - \mathfrak{f}_n| < e \qquad \text{für alle } n > \mathfrak{m}.$$

Um den Beweis dieses Satzes zu führen, wollen wir,

was hier am nächsten zu liegen scheint, zeigen, dafs e Folge von ganzen Zahlen $c_0, c_1, c_2 \ldots$

$$c_0 \gtrless 0, \quad 0 \leq c_p < e - 1 \quad \text{für } p \geq 1$$

so dafs

$$(1^*) \qquad S_p < \mathfrak{f}_n < S_p + \frac{1}{e^p} \qquad \text{für } n > m_p > 0,$$

sicher dann existirt, wenn die $\mathfrak{f}_n$ keinen rationa Grenzwerth von der Form S_m besitzen. Dabei h e, S_p dieselbe Bedeutung wie in Nr. 2.

Der Satz geht unmittelbar aus dem folgenden her „Es sei q eine ganze positive Zahl. Wenn die $\mathfrak{f}_n$ ke rationalen Grenzwerth mit dem Nenner q besitzen, so stirt sicher eine ganze Zahl h, derart dafs

$$\frac{h}{q} < \mathfrak{f}_n < \frac{h+1}{q} \qquad \text{für alle } n > M.\text{“}$$

Aus (1) ergiebt sich, wenn $\mathfrak{e} = \frac{1}{2q}$ und die ganze Z m gröfser als das zugehörige $\mathfrak{m}$ vorausgesetzt wird,

$$\mathfrak{f}_m - \frac{1}{2q} < \mathfrak{f}_{m+r} < \mathfrak{f}_m + \frac{1}{2q} \qquad (r = 1, 2 \ldots).$$

Man bringe $\mathfrak{f}_m$ auf die Form

$$\mathfrak{f}_m = \frac{Q}{q} + \varrho \qquad \left(-\frac{1}{2q} < \varrho < \frac{1}{2q}\right),$$

worin Q eine ganze Zahl bedeutet. Ist zufällig $\varrho = \frac{1}{2q}$, findet man

$$\frac{Q}{q} < \mathfrak{f}_{m+r} < \frac{Q+1}{q},$$

kann somit $h = Q$ setzen. Wenn aber ϱ nicht diesen We hat, so ergiebt sich zunächst nur, dafs

$$\frac{Q-1}{q} < \mathfrak{f}_{m+r} < \frac{Q+1}{q}.$$

Um das Intervall der Grenzen auf $\frac{1}{q}$ einzuschränken, k man so verfahren. Man setze in (1)

$$\mathfrak{e} = 1 : 2qe^s \qquad (s \geq 1),$$

wonach sich ergiebt

$$\mathfrak{f}_{m^{(s)}} - \frac{1}{2q \cdot e^s} < \mathfrak{f}_{m^{(s)}+r} < \mathfrak{f}_{m^{(s)}} + \frac{1}{2q \cdot e^s}.$$

Nach Ausführung der Rechnung

$$\mathfrak{f}_{m^{(s)}} = \frac{Q^{(s)}}{q \cdot e^s} + \varrho^{(s)} \qquad \left(-\frac{1}{2q \cdot e^s} < \varrho^{(s)} \leqq \frac{1}{2q \cdot e^s}\right),$$

wo $Q^{(s)}$, wie die unten folgenden $h^{(s)}$ $r^{(s)}$, eine ganze Zahl bedeutet, findet man, wenn

$$\frac{Q^{(s)}}{e^s} = h^{(s)} + \frac{r^{(s)}}{e^s} \qquad (0 \leqq r^{(s)} \leqq e^s - 1)$$

gesetzt und die Annahme $\varrho^{(s)} = 1 : 2q \cdot e^s$, welche $h = h^{(s)}$ liefert, nicht weiter berücksichtigt wird:

$$(2) \quad \frac{h^{(s)}}{q} + \frac{r^{(s)} - 1}{q \cdot e^s} < \mathfrak{f}_{m^{(s)}+r} < \frac{h^{(s)}}{q} + \frac{r^{(s)} + 1}{q \cdot e^s} \leqq \frac{h^{(s)} + 1}{q}.$$

Ist $r^{(k)}$ der erste von 0 verschiedene Divisionsrest, so wird

$$\frac{h^{(k)}}{q} < \mathfrak{f}_{m^{(k)}+r} < \frac{h^{(k)} + 1}{q}$$

sein, so dafs $h^{(k)} = h$ zu setzen ist. Wollte man annehmen, dafs wie grofs auch s sei, stets $r^{(s)} = 0$ sei, so würde sich ergeben dafs

$$\lim_{n=+\infty} \mathfrak{f}_n = \frac{h^{(1)}}{q}$$

sei. Man bemerke zunächst, dafs wenn

$$r^{(s)} = r^{(s+1)} = 0$$

ist, dann auch

$$h^{(s)} = h^{(s+1)}$$

sein mufs. Schreibt man in (2) anstatt s $s + 1$ und setzt in der so erhaltenen Relation $r = l$, in (2) aber

$$r = m^{(s+1)} - m^{(s)} + l,$$

so folgt unmittelbar

$$\frac{h^{(s)}}{q} - \frac{1}{qe^s} < \frac{h^{(s+1)}}{q} + \frac{1}{q \cdot e^{s+1}},$$

$$\frac{h^{(s+1)}}{q} - \frac{1}{q \cdot e^{s+1}} < \frac{h^{(s)}}{q} + \frac{1}{q \cdot e^s},$$

woraus man schliefst, dafs

$$|h^{(s+1)} - h^{(s)}| < \frac{1}{e^s} + \frac{1}{e^{s+1}} \leq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4},$$

also

$$h^{(s)} = h^{(s+1)}$$

sein mufs. Wenn nun

$$r^{(1)} = r^{(2)} = \ldots = 0,$$

so folgt

$$h^{(1)} = h^{(2)} = \ldots,$$

so dafs aus (2) sich ergiebt

$$\left| f_n - \frac{h^{(1)}}{q} \right| < \frac{1}{q \cdot e^s} \quad (n > m^{(s)})$$

d. i.

$$\lim f_n = h^{(1)} : q.$$

Es kann die Aufgabe vorkommen, den Zähler $h^{(k)}$ wirkli zu berechnen. Sie wird durch das soeben entwickelte Verfa ren nur dann mit Sicherheit gelöst, wenn man von vor herein weifs, dafs ein rationaler Grenzwerth mit dem Nenn q ausgeschlossen ist. In einem solchen Falle mufs man na einer endlichen Anzahl von Versuchen die gewünsch Zahl $h^{(k)}$ erhalten.

Setzt man im obigen Satze $q = 1$, so erhellt, dafs dem Falle, wo die f_n nicht einen ganzzahligen Grenzwer besitzen, immer eine ganze Zahl c_0 existiren mufs, derart da

$$c_0 < f_n < c_0 + 1 \qquad (n > m_0).$$

Und wenn ein rationaler Grenzwerth mit einem Nenner v der Form e^p ausgeschlossen wird, so müssen sich gan Zahlen h_p, h_{p+1} ermitteln lassen, derart dafs

$$\frac{h_p}{e^p} < f_n < \frac{h_p + 1}{e^p} \qquad (n > m_p),$$

$$\frac{h_{p+1}}{e^{p+1}} < f_n < \frac{h_{p+1} + 1}{e^{p+1}} \qquad (n > m_{p+1}).$$

Setzt man in beiden Formeln für n einen Werth der gröfs ist als beide Zahlen m_p, m_{p+1}, so mufs man schliefsen, da

$$\frac{h_p}{e^p} < \frac{h_{p+1}+1}{e^{p+1}}, \qquad \frac{h_{p+1}}{e^{p+1}} < \frac{h_p+1}{e^p},$$

d. i.

$$-1 < h_{p+1} - eh_p < e$$

also

$$h_{p+1} = eh_p + c_{p+1} \qquad 0 \leqq c_{p+1} \leqq e-1$$

$$\frac{h_{p+1}}{e^{p+1}} = \frac{h_p}{e^p} + \frac{c_{p+1}}{e^{p+1}};$$

d. i.

$$\frac{h_1}{e} = c_0 + \frac{c_1}{e}, \qquad \frac{h_2}{e} = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2}$$

u. s. f., womit der Satz (1*) erwiesen ist.

Wir gelangen nunmehr zu folgendem Resultat. — Entweder haben die $\mathfrak{f}_n$ einen Grenzwerth von der Form

$$S_m = c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_m}{e^m},$$

oder sie haben den Grenzwerth

$$\mathfrak{c} = \left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}\right).$$

Da nämlich auch die Relation besteht (Nr. 5)

$$S_p < \mathfrak{c} < S_p + \frac{1}{e^p},$$

so folgt nach (1*)

$$|\mathfrak{c} - \mathfrak{f}_n| < \frac{1}{e^p} \qquad \text{für } n > m_p,$$

d. i.

$$\lim \mathfrak{f}_n = \mathfrak{c}.$$

Dafs neben $\mathfrak{c}$ nicht auch eine davon verschiedene Zahl Grenzwerth der $\mathfrak{f}_n$ sein kann, folgt unmittelbar nach dem 2. Corollar in Nr. 7.

Was wir hier über die $\mathfrak{f}_n$ erfahren haben, gilt selbstverständlich auch von den früher betrachteten φ_n, so dafs wir den Satz aufstellen können: „Jede irrationale (φ_n) läfst sich in systematischer Form darstellen; es ist $(\varphi_p) = (S_p)$." Bedeutet k_p eine ganze Zahl $> m_p$, so hat man nach (1*)

$$S_p < \varphi_{k_p} < S_p + \frac{1}{e^p}.$$

Nun ist leicht einzusehen, dafs k_p mit p unbegrenzt wächs Denn würde k_p kleiner bleiben als eine ganze Zahl h, s hätte man nach (1*)

$$\varphi_h = \varphi_{h+r}.$$

Da aber

$$0 < \varphi_{k_p} - S_p < \frac{1}{e^p},$$

also

$$\lim (\varphi_{k_p} - S_p) = 0$$

bei $\lim p = +\infty$ ist, so ist nach Nr. 5

$$(\varphi_p) = (\varphi_{k_p}) = (S_p).$$

12. Unvollständige Decimalzahlen. In numer schen Rechnungen wird eine irrationale Zahl $\mathfrak{a}$ durch zw rationale, zwischen welchen sie liegt, dargestellt. Der Unte schied derselben giebt die Unsicherheit an, die hinsich lich $\mathfrak{a}$ noch obwaltet. Aehnliches gilt von einer rationale Zahl, welche nicht genau bekannt ist. — Setzt man

$$\mathfrak{a} = \alpha + \mathfrak{r},$$

worin α eine gegebene rationale Zahl bezeichnet, währe man bezüglich $\mathfrak{r}$ die rationalen Grenzen $\rho\sigma$

$$\rho < \mathfrak{r} < \sigma$$

kennt, so hat man

$$\alpha + \rho < \mathfrak{a} < \alpha + \sigma;$$

es besteht somit hinsichtlich $\mathfrak{a}$ noch eine Unsicherheit, die zw den Betrag $\sigma - \rho$ nicht erreicht, ihm aber beliebig na kommt. $\mathfrak{r}$ heifst der (absolute) Fehler des Näherungswerthes

Gewöhnlich denkt man sich α als eine endliche De malzahl

$$\alpha = a_1 10^{p+m-1} + a_2 10^{p+m-2} + \cdots + a_{m-1} 10^{p+1} + a_m 1($$

worin $p \gtreqless 0$ sein kann, wenn man unter 10^0 1, unter 10^p b $p < 0$ $1 : 10^{-p}$ versteht. ρ σ werden in Theilen der Ei heit 10^p der letzten hier erscheinenden Ordnung ausgedrücl Man nimmt entweder

$$0 < \mathfrak{r} < 10^p$$

oder

$$-\tfrac{1}{2}10^p < \mathfrak{r} < \tfrac{1}{2}10^p,$$

so dafs für $\mathfrak{a}$ eine Unsicherheit bis zu dem Betrage 10^p besteht. Zumeist werden die letzteren Grenzen gebraucht. Dann enthält α, wenn

$$0 < \mathfrak{r} < \tfrac{1}{2}10^p,$$

bis zu der Ordnung 10^p einschliefslich die nämlichen Ziffern wie $\mathfrak{a}$; wenn aber

$$0 > \mathfrak{r} > -\tfrac{1}{2}10^p,$$

so ist α gleich der obenerwähnten Zahl mehr 10^p. Die Unsicherheit bezüglich $\mathfrak{a}$ sinkt auf den Betrag $\frac{1}{2}10^p$, wenn angegeben ist, ob α kleiner oder gröfser als $\mathfrak{a}$ ist. Daher deutet man durch einen unter die letzte Ziffer von α gesetzten Strich u. dgl. an, dafs α zu grofs sei. Dann besagt z. B. $\alpha' = 0 \cdot 17$, dafs der Fehler von α' zwischen 0 und 0,005; $\alpha'' = 0 \cdot 1\underline{7}$, dafs der von α'' zwischen $-0{,}005$ und 0 liegt. Will man solche Angaben auch für eine Rechnung verwerthen, so addirt man zu jeder Zahl, deren letzte Ziffer nicht unterstrichen ist, $\frac{1}{4}10^p$ und zieht von jeder, in der sie unterstrichen ist, $-\frac{1}{4}10^p$ ab. Der Fehler der so erhaltenen Näherungswerthe liegt zwischen $-\frac{1}{4}10^p$ und $\frac{1}{4}10^p$. Man würde demnach statt α' 0,1725, statt α'' 0,1675 gebrauchen.[5])

13. Die Verhältnisse stetiger relativer Gröfsen $A, B, \Gamma \ldots$ (V. 7). Unter der Voraussetzung, dafs einer Gröfse E („der Einheit") die 1, und jeder zu E commensurabelen Gröfse

$$A = \pm aM, \qquad E = bM$$

die Zahl $\pm a : b$ zugeordnet wird, bestehen die folgenden Sätze:

1.) „Jeder zu E nicht commensurabelen Gröfse B entspricht eine und nur eine irrationale Zahl $\mathfrak{b}$, welche das Verhältnifs B zu E heifst. Ist die zu E commensurabele $\alpha_1 E < B$, so ist $\alpha_1 < \mathfrak{b}$, und ist $\alpha_2 E > B$, so $\alpha_2 > \mathfrak{b}$." — B wird mit $\mathfrak{b}E$ bezeichnet, was jedoch nicht als Product aufzufassen ist.

B liegt nämlich zwischen zwei Gröfsen $c_0 E$ und (c_0+1) worin c_0 jede ganze Zahl sein kann. Es giebt ferner ei bestimmte Ziffer c_1 — $0 \leqq c_1 \leqq e-1$ — so dafs

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{e}\right) E < B < \left(c_0 + \frac{c_1+1}{e}\right) E.$$

U. s. f. Auf diese Art gelangt man zu einer unbegrenzte Reihe von Ziffern $c_1, c_2 \ldots$, so dafs nach den Bezeichnunge von Nr. 2

$$S_n E < B < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right) E,$$

wie grofs auch der Index n sein mag. Die Zahl $(S_n) =$ wird B zugeordnet. — Bedeutet α_1 eine rationale Zahl $<$ so ist $\alpha_1 E < B$, da es Werthe von n giebt, derart da $\alpha_1 < S_n$. Ist nämlich

$$0 < \varepsilon < \mathfrak{b} - \alpha_1,$$

so wird für $n > \mu$

$$\mathfrak{b} < S_n + \varepsilon,$$

also

$$S_n > \mathfrak{b} - \varepsilon > \alpha_1$$

sein. Ebenso hat man, wenn α_2 eine solche Zahl $< \mathfrak{b}$ is

$$\alpha_2 E > B.$$

2.) „Jeder irrationalen Zahl $(\psi_n) = \mathfrak{b}$ entspricht ein und nur eine Gröfse B, gröfser als alle Gröfsen $\alpha_1 E$ un kleiner als alle $\alpha_2 E$, wenn α_1 eine rationale Zahl $< \mathfrak{b}$, α eine $> \mathfrak{b}$ bezeichnet."

Der Satz folgt aus der Stetigkeit des Gröfsensystems Dürfen wir keine Gröfse B annehmen, so können wir im zu sammenhängenden Systeme αE einen Schnitt nachweisen indem wir eine Gruppe bilden aus den Gröfsen $\alpha_1 E$, w $\alpha_1 < \mathfrak{b}$, die andere aus den $\alpha_2 E$, wo $\alpha_2 > \mathfrak{b}$. Es liegen nämlich zwischen jedem α_1 und $\mathfrak{b}$, sowie zwischen jedem α_2 und $\mathfrak{b}$ noch rationale Zahlen (Nr. 5, 4).

3.) „Es sei $(\psi_n) = \mathfrak{b}$. Hat man eine Gröfse B gefun den, derart dafs zu jeder rationalen Zahl $\varepsilon > 0$ eine $\mu > 0$ gehört, so dafs für alle Werthe $n > \mu$

$$(\psi_n - \varepsilon)\, E < B < (\psi_n + \varepsilon)\, E,$$

so ist B die der Zahl $\mathfrak{b}$ entsprechende Gröfse."

Denn wenn wieder $\alpha_1 < \mathfrak{b}$, so hat man, falls ε eine positive Zahl $< \frac{1}{2}(\mathfrak{b} - \alpha_1)$ bezeichnet, bei $n > \mu$

$$\mathfrak{b} < \psi_n + \varepsilon$$

d. i.

$$\psi_n - \varepsilon > \mathfrak{b} - 2\varepsilon > \alpha_1,$$

also

$$B > \alpha_1 E.$$

Aehnlich folgt, dafs wenn wieder

$$\alpha_2 > \mathfrak{b}, \qquad B < \alpha_2 E$$

sein mufs.

Vermittelst des letzten Satzes erkennt man, dafs der Summe der Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Summe der diesen entsprechenden Gröfsen entspricht und umgekehrt:

$$\mathfrak{a}E + \mathfrak{b}E = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\, E.$$

Ferner: „Ordnet man der Gröfse $\mathfrak{a}E$ die Zahl $+1$ zu, so entspricht der Zahl $\mathfrak{b}$ die Gröfse $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\, E$ d. i.

$$\mathfrak{b}\,(\mathfrak{a}E) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\, E."$$

Setzt man

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{m}E = M,$$

so folgt dafs bei der Einheit $\mathfrak{a}E = A$ der Gröfse M die Zahl

$$\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}$$

entspricht. D. i. „das Verhältnifs $M : A$ ist gleich dem Quotienten der Verhältnisse dieser Gröfsen zu einer beliebigen dritten Gröfse E."

Zufolge der vorstehenden Bemerkungen können in allen Relationen, worin Aggregate der Gröfsen A, B, Γ ... vorkommen, diese durch ihre Verhältnisse in Bezug auf eine Gröfse E, also durch Zahlen ersetzt werden. Anstatt der Euclid'schen Verhältnisse betrachten wir nun die Quotienten von Verhältnifszahlen, wobei die schon im II. Abschnitte erwähnten Sätze auftreten.[6]) Die in VI. 4—7 vorgetragenen Sätze für die Verhältnisse im gegenwärtigen Sinne anzumerken ist ebenfalls überflüssig, da die ihnen zu Grunde liegenden

algebraischen Entwickelungen sich jeder Zeit von selbst darbieten. Ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b},$$

so ist z. B. auch

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{b} + 1,$$

d. h.

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+b}{b}$$

(l. c. 4, 6. Satz). — Hier wollen wir nur an den folgenden, nützlichen Satz erinnern. „Es ist

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n}{b_1 w_1 + b_2 w_2 + \cdots + b_n w_n},$$

wenn die $w_1, w_2 \ldots w_n$ beliebige von 0 verschiedene Zahlen bedeuten, nur so gewählt, dafs auch der letzte Nenner nicht 0 ist.“ Zum Beweise derselben bezeichne man den gemeinsamen Werth der Quotienten $\frac{a_1}{b_1} \cdots \frac{a_n}{b_n}$ mit q, so dafs

$$a_1 = b_1 q \ldots a_n = b_n q;$$

$$a_1 w_1 = b_1 w_1 q \ldots a_n w_n = b_n w_n q$$

und addire die letzten n Gleichungen.

VIII. Abschnitt.

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

1. Unter der m^{ten} Potenz einer beliebigen reellen Zahl a versteht man das Product aus m Factoren a

$$a^m = a \cdot a \ldots\ldots a \ (m\text{-mal}).$$

a heifst die Basis oder der Dignand, m der Exponent. Unter der ersten Potenz von a versteht man die Zahl a selbst ($a^1 = a$). Die zweite Potenz der Zahl a wird ihr Quadrat, die dritte ihr Cubus, die vierte ihr Biquadrat genannt. —

Insbesondere hat man

$$0^m = 0, \ (-1)^{2k} = +1, \ (-1)^{2k-1} = -1,$$

wo m, k irgend welche natürliche Zahlen bedeuten.

Aus der Definition der Potenz ergeben sich unmittelbar die folgenden Relationen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad a^m \cdot b^m = (ab)^m, \qquad \text{(I)}$$

worin a, b beliebige reelle, m n beliebige natürliche Zahlen bezeichnen. Man hat ferner, falls nur a nicht 0 ist,

$$a^m : a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n), \\ 1 : a^{n-m} & (m < n) \end{cases} \qquad \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m. \qquad \text{(II)}$$

Die Relationen (II) können auch formal aus der ersten und dritten in (I) abgeleitet werden, was hier ein für alle Male bemerkt sei. So findet man, wenn a nicht 0 und $m > n$, aus

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^m \qquad a^{m-n} = a^m : a^n \qquad 1 : a^{m-n} = a^n : a^m,$$

aus

$$a^m \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^m = b^m \qquad \left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^m}{a^m}.$$

Wichtig ist endlich der in der folgenden Relation ausgesprochene Satz, worin a b zwei verschiedene reelle Zahlen bedeuten:

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}. \qquad \text{(III)}$$

Man verificirt denselben, indem man die rechte Seite mit $a - b$ multiplicirt.

2. Ungleichungen. Es seien jetzt a, b beliebige jedoch verschiedene positive, m, n beliebige natürliche Zahlen.

1) Ist $a > b$, so hat man $a^m > b^m$.

2) Ist $m > n$, so hat man simultan mit

$$a \gtrless 1 \quad a^m \gtrless a^n.$$

3) $m(a-b)b^{m-1} < a^m - b^m < m(a-b)a^{m-1}$. $(m > 1)$.

Die Relation folgt aus (III) und zwar sowol wenn $a > b$, als auch wenn $a < b$. Setzt man hier

$$a = 1 + d \quad b = 1,$$

sodafs $-1 < d \gtrless 0$ sein mufs, so erhält man leicht

4) $1 + md < (1+d)^m < \dfrac{1}{1 - \frac{md}{1+d}}$ $(m > 1)$.

Der zweite Theil der Relation setzt jedoch voraus, dafs der Nenner positiv, somit $d < \frac{1}{m-1}$ sei.

3. Potenzen der Binome. Sind a, b beliebige reelle Zahlen, so ergiebt sich durch Ausführung der Multiplicationen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man schliefst daraus, dafs $(a+b)^m$ ein Ausdruck von der Form

$$\text{(a)} \quad (a+b)^m = a^m + m_1 a^{m-1}b + \ldots + m_r a^{m-r}b^r + \ldots + m_{m-1}ab^{m-1} + b^m$$

sein müsse, worin die Coefficienten $m_1, m_2 \ldots m_{m-1}$ ganze

positive Zahlen bedeuten. Wird nämlich diese Behauptung als richtig angenommen, wie sie es in der That für $m = 2, 3, 4$ ist, so trifft sie auch zu für

$$(a + b)^{m+1} = (a + b)^m \cdot (a + b).$$

In derselben Art kann man zeigen, dafs die Binomialcoefficienten m_r die folgenden Werthe haben müssen

(b) $$m_r = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots.r}$$

d. i.

$$m_1 = m,\ m_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}\ldots\ldots,\ m_m = 1.$$

In der That stimmen diese Formeln für $m = 2, 3, 4$. Es besteht aber — wenn wir unter m_0 1 verstehen — die allgemeine Formel

(c) $$m_{r-1} + m_r = (m+1)_r \quad (r = 1, 2\ldots\ldots m),$$

wie man durch unmittelbare Einsetzung der Ausdrücke (b) erkennt. — Angenommen nun, es sei die Formel (a) nach Einsetzung der Werthe (b) für die m_r richtig, so ergiebt sich vermöge (c) durch Ausführung der Multiplication

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m \cdot (a+b) = a^{m+1} + (m+1)_1 a^m b + \ldots\ldots$$
$$+ (m+1)_r a^{m+1-r} b^r + \ldots\ldots + (m+1)_m a b^m + b^{m+1}$$

d. i. es bewähren sich die Formeln (a) und (b) auch, wenn wir den Exponenten m durch $m + 1$ ersetzen. Diese Formeln gelten aber für $m = 2$, also auch für $m = 3, 4$ u. s. f., somit für jeden Exponenten m.

Bezeichnet man das Product aller natürlichen Zahlen von 1 bis n: $1 \cdot 2 \ldots . n$ mit $n!$, so folgt aus (b) noch

$$m_r = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}$$

und somit der Satz

(d) $$m_r = m_{m-r}.$$

Die Binomialformel ändert sich also bei Vertauschung der Zahlen a und b nicht. — NB. Man gebraucht anstatt m_r auch die Bezeichnung $\binom{m}{r}$.

Wir schliefsen hieran den **polynomischen Satz** d. die Regel, nach welcher die Glieder der Potenz

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^m$$

angeschrieben werden können, ohne dafs die successiven Mu tiplicationen auszuführen sind. „Es seien $p_0, p_1 \ldots p_n$ ganz Zahlen, deren jede alle Werthe von 0 bis m annehmen kann Der Ausdruck $(a_0 + a_1 + \ldots a_n)^m$ ist die Summe der Glieder

$$\frac{m!}{p_0!\, p_1! \ldots p_n!}\, a_0^{p_0} a_1^{p_1} \ldots\ldots a_n^{p_n},$$

die dadurch entstehen, dafs für $p_0, p_1, \ldots p_n$ alle System von Werthen gesetzt werden, deren Summe m beträgt:

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_n = m.“$$

Dabei hat man unter 0! 1 zu verstehen. — Der Satz ist fü $m = 1$ richtig. Angenommen nun, er gelte für irgend eine Werth von m, so läfst sich leicht zeigen, dafs er auch fü den Werth $(m + 1)$ besteht. Da

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)^{m+1} = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)^m (a_0 + a_1 + \ldots a_n$$

so ergeben sich dafür nur Glieder von der vorstehende Form, worin aber $p_0 + p_1 + \ldots + p_n = m + 1$. Jedes de selben entsteht aus den Gliedern

$$a_0^{p_0} a_1^{p_1} \ldots\ldots a_r^{p_r - 1} \ldots\ldots a_n^{p_n}$$

von $(a_0 + \ldots + a_n)^m$ durch Multiplication mit a_r, wobei alle jene Werthe annimmt, wofür das zugehörige p_r nicht ist — und nur aus diesen. Bezeichnen wir sie mit

$$p'_1, p'_2 \ldots p'_k \quad (k \leq n),$$

so finden wir als Coefficienten des allgemeinen Gliedes vo $(a_0 + \ldots + a_n)^{m+1}$ zufolge Voraussetzung

$$\frac{m!}{(p'_1 - 1)!\, p'_2! \ldots p'_k!} + \frac{m!}{p'_1!\, (p'_2 - 1)! \ldots p'_k!} + \ldots$$

$$+ \frac{m!}{p'_1!\, p'_2! \ldots (p'_k - 1)!} = \frac{m!}{p'_1!\, p'_2! \ldots p'_k!}\, (p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_1$$

$$= \frac{(m+1)!}{p'_1!\, p'_2! \ldots p'_k!};$$

so dafs in der That der dem Exponenten $(m + 1)$ zufolg

der Regel entsprechende Coefficient erscheint. Die Regel gilt somit allgemein.

4. Die Wurzeln.

Satz. Die Gleichung $x^m = a$, worin m eine natürliche, a eine positive reelle Zahl bedeutet, hat stets eine und nur eine positive Auflösung, welche die absolute m^{te} Wurzel aus der Zahl a heifst: $x = \sqrt[m]{a}$.[1] — Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man $\sqrt{a}$.

Beweis. Die m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen wachsen über jede endliche Zahl. Es mufs daher eine ganze Zahl $c_0 \geq 0$ geben, derart dafs entweder $c_0^m = a$ oder

$$c_0^m < a < c_0^{m+1}.$$

Im ersten Falle haben wir die Lösung $x = c_0$ unserer Gleichung gefunden; im zweiten theilen wir das Intervall $(c_0,\ c_0 + 1)$ in e (≥ 2) gleiche Theile und bilden die m^{ten} Potenzen

$$\left(c_0 + \frac{1}{e}\right)^m,\ \left(c_0 + \frac{2}{e}\right)^m \ldots\ldots \left(c_0 + \frac{e-1}{e}\right)^m.$$

Unter denselben befindet sich entweder eine rationale Zahl $c_0 + \frac{c_1}{e}$, wofür

$$0 < c_1 \leq e - 1 \qquad \left(c_0 + \frac{c_1}{e}\right)^m = a$$

oder es liegt a zwischen zwei von den bis jetzt gebildeten m^{ten} Potenzen

$$0 \leq c_1 < e - 1 \qquad \left(c_0 + \frac{c_1}{e}\right)^m < a < \left(c_0 + \frac{c_1 + 1}{e}\right)^m.$$

Im ersten Falle ist $x = c_0 + \frac{c_1}{e}$ eine Lösung unserer Gleichung; im zweiten theilen wir das Intervall

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{e},\ \ c_0 + \frac{c_1 + 1}{e}\right)$$

in e gleiche Theile, wodurch sich eine der vorstehenden analoge Disjunction ergiebt. U. s. f. Das Ergebnifs des eingeschlagenen Verfahrens wird folgendes sein:

Entweder existirt eine rationale Zahl von der Form

$$x = c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_m}{e^m},$$

welche die Gleichung $x^m = a$ befriedigt, oder man gelan zu einer unbegrenzten Reihe von ganzen Zahlen c_0, c_1, c_2. unter denen von c_1 an alle zwischen 0 und $e - 1$ lieg $(0 \leq c_r \leq e - 1)$, welche die Eigenschaft besitzt, dafs v grofs auch der Zeiger n sein mag,

(e) $$S_n^m < a < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m,$$

worin zur Abkürzung

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_n}{e^n} = S_n$$

gesetzt ist. Eben dieselbe Zahlreihe definirt eine reelle Za $(S_n) = c$, deren m^{te} Potenz, wie leicht zu zeigen ist, d Zahl a ist. Da nämlich

$$S_n < c < S_n + \frac{1}{e^n} \qquad S_n^m < c^m < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m,$$

so folgt nach (e), dafs

$$S_n^m - \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m < c^m - a < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m - S_n^m$$

d. i. nach 2. 3)

$$| c^m - a | < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m - S_n^m < m\left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{e^n}$$

Nun ist (vgl. VII. 3)

$$S_n + \frac{1}{e^n} < c_0 + 1,$$

also

$$| c^m - a | < \frac{m(c_0 + 1)^{m-1}}{e^n}.$$

Daraus erhellt, dafs $| c^m - a |$ kleiner ist als jede positi Zahl ε. Nach VII. 2 braucht man nur

$$n > \frac{m(c_0 + 1)^{m-1} - \varepsilon}{\varepsilon(e - 1)}$$

zu denken. — Somit ist zufolge VII. 7 $c^m = a$.

Dafs es nur eine Zahl $x > 0$ geben kann, wofür $x^m = a$, ist unmittelbar aus dem 1. Satze in Nr. 2 zu ersehen.

Zur genäherten Berechnung der $\sqrt[m]{a}$ ist das vorstehende Verfahren, als zu weitläufig, nicht geeignet. Man bestimmt die aufeinander folgenden Stellen derselben von der höchsten angefangen abwärts durch systematisch angelegte Versuche, wobei man sich des binomischen Satzes in Nr. 3 bedient. Erhebt man eine Zahl A, welche in die systematische Form für $e = 10$ gebracht, mit Einheiten der Ordnung 10^n ($n \gtreqless 0$ — vgl. Nr. 6) beginnt, auf die m^{te} Potenz, so fängt A^m mit Einheiten von der Ordnung mn zum mindesten, $mn + m - 1$ zum höchsten an. Umgekehrt: ist die höchste Ziffer der vorgelegten Zahl a von der Ordnung 10^p, wobei $p = mq + r$ ($0 \leqq r \leqq m - 1$) sei, so beginnt $\sqrt[m]{a}$ mit Einheiten der Ordnung 10^q.

Setzt man

$$\sqrt[m]{a} = b_0 \cdot 10^q + x \quad (0 < x < 10^q),$$

so dafs

$$a = b_0^m \cdot 10^{mq} + mx \cdot b_0^{m-1} 10^{(m-1)q} + \ldots,$$

so ergiebt sich, dafs die b_0 Einheiten der höchsten Ordnung in $\sqrt[m]{a}$ nur auf die Stellen 10^{mq} bis 10^p in a Einflufs nehmen. Es wird nun durch die Betrachtung der letztgenannten Stellen allein nicht schwer sein, eine solche Ziffer b_0 zu ermitteln, dafs $(b_0 \cdot 10^q)^m \leqq a < \{(b_0 + 1)\, 10^q\}^m$. Mit Hilfe der angenäherten Formel

$$x = \frac{a - b_0^m \cdot 10^{mq}}{m b_0^{m-1} 10^{(m-1)q}}$$

gelangt man weiter zu einer Ziffer b_1, so dafs

$$(b_0 \cdot 10^q + b_1\, 10^{q-1})^m \leqq a < (b_0 \cdot 10^q + (b_1 + 1)\, 10^{q-1})^m.$$

U. s. f. Auf diese Art gelingt es, eine rationale Zahl α von beliebig vielen (k) Ziffern zu bestimmen, so dafs

$$\alpha^m \leqq b < (\alpha + 10^{q-k+1})^m.$$

Die Gleichung $x^m = a$ hat, wenn m gerade ist, noch

die eine negative Lösung $x = -\sqrt[m]{a}$. Die Gleichung $x^m = 0$ hat die einzige Lösung $x = 0$. Die Gleichung $x^m = -a\,(a>0)$ hat, wenn m gerade ist, keine reelle Lösung; wenn m ungerade, die einzige reelle Lösung $x = -\sqrt[m]{a}$.

Die m^{te} Wurzel aus einer **ganzen positiven Zahl**, welche nicht die m^{te} Potenz einer anderen **natürlichen Zahl** ist, ist **irrational**. Denn jeder eigentliche **Bruch** liefert, zur m^{ten} Potenz erhoben, wieder einen **eigentlichen** Bruch (vgl. III. 17).

5. Sätze über die absoluten Wurzeln. — Wir verstehen im Folgenden unter den Radicanden a, b positive reelle Zahlen. Dann bestehen die folgenden **Relationen**, in denen m, n, p natürliche Zahlen > 1 bedeuten.

$$1)\ \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n} \qquad 2)\ \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n} \qquad 3)\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$4)\ \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab} \qquad 5)\ \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a:b}.$$

Der Beweis derselben bietet sich unmittelbar dar, wenn man auf die Bedeutung der Wurzeln zurückgeht. Um z. B. 2) zu zeigen, setze man $\sqrt[m]{a} = x$, so dafs $x^m = a$. Dann ist $a^n = x^{mn} = (x^n)^m$ also $x^n = \sqrt[m]{a^n}$.

Es gelten ferner die Ungleichungen:

1) Ist $a > b > 0$, so ist $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$. (Indirect nach 2. 1).

2) Ist $m > n$ so ist simultan mit $a \gtrless 1$ $\sqrt[m]{a} \lessgtr \sqrt[n]{a}$. (Indirect nach 2. 2), indem man zur Potenz mn erhebt.)

3) Ist $1 + d > 0$, d jedoch nicht Null, so hat man

$$\frac{1}{1 - \frac{d}{m(1+d)}} < \sqrt[m]{1+d} < 1 + \frac{d}{m}.$$

Man setze in Nr. 2. 3)

$$a = \sqrt[m]{1+d} \qquad b = 1,$$

so dafs sich ergiebt

$$m\left(\sqrt[m]{1+d} - 1\right) < d < m\left(\sqrt[m]{1+d} - 1\right)\left(\sqrt[m]{1+d}\right)^{m-1}$$
$$= m(1+d)\left(1 - \frac{1}{\sqrt[m]{1+d}}\right).$$

Daraus folgt die vorstehende Relation unmittelbar, wenn man bemerkt, dafs hier stets $1 - \frac{d}{m(1+d)} > 0$ sein mufs.

Anmerkung. Man kann falls $d > 0$, für den positiven Unterschied

$$x = 1 + \frac{d}{m} - \sqrt[m]{1+d} < \frac{d}{m}$$

auch eine engere obere Grenze aufstellen, als die gerade abgeleitete Relation liefert. So hat man, wenn $m = 2$,

$$\sqrt{1+d} = 1 + \frac{d}{2} - x,$$

also durch Quadrirung

$$0 = \frac{d^2}{4} - 2x\left(1 + \frac{d}{2}\right) + x^2$$

und

$$x = \frac{\frac{1}{8}d^2}{1 + \frac{1}{2}(d-x)} < \frac{1}{8}d^2, \qquad \text{indem } 0 < x < \frac{d}{2}.$$

Auf dieselbe Weise folgt für $m = 3$, in welchem Falle $0 < x < \frac{d}{3}$,

$$x < \tfrac{1}{3}d^2.$$

Umständlicher gestaltet sich hier der Nachweis des allgemeinen Satzes, dafs

$$x < \frac{m-1}{2m^2}d^2.$$

Wir werden denselben im XI. Abschnitte auf eine andere Art führen und dort auch zeigen, wie der Satz zur Verbesserung der in der vorigen Nr. ermittelten Näherungswerthe A für $\sqrt[m]{a}$ benutzt werden kann.

6. Erweiterung des Potenzbegriffes auf rationale Exponenten. Man hat schon frühzeitig bemerkt, dafs von gebrochenen rationalen Zahlen abhängige Ausdrücke gebildet werden können, welche den nämlichen Relationen (I) genügen, wie die Potenzen. Um die Entwickelung derselben systematisch vorzunehmen, legen wir uns die Aufgabe vor, einen von einer beliebigen reellen Zahl x abhängigen Ausdruck $f(x)$ aufzusuchen, welcher zunächst wenigstens die erste dieser Relationen d. i.

$$(1) \qquad f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$$

befriedigt. Hieraus folgt, wenn wir $y = 0$ setzen: $f(0) = 1$, indem die nichtssagende Annahme $f(x) = 0$ bei beliebigem x

ausgeschlossen wird. Durch successive Anwendung der Formel (1) ergiebt sich

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots f(x_n);$$

somit, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$ gesetzt wird,

$$f(nx) = [f(x)]^n; \tag{2}$$

insbesondere also

$$f(n) = [f(1)]^n, \qquad f(1) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Soll nun $f\left(\frac{1}{n}\right)$ eine reelle Zahl sein bei jedem Werthe von n, so braucht $f(1)$ nur eine positive Zahl zu sein, die wir mit a bezeichnen wollen. Wir finden somit neben

$$f(1) = a; \quad f(n) = a^n, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}. \tag{3}$$

Setzt man in (2) statt n eine andere positive ganze Zahl m und hierauf $x = \frac{1}{n}$, so folgt

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m. \tag{4}$$

Endlich schliefst man aus (1), wenn man $y = -x$ annimmt

$$f(-x) = f(0) : f(x) = \frac{1}{f(x)}, \qquad f(-n) = \frac{1}{a^n}. \tag{5}$$

Die in den Formeln (3) — (5) auf der rechten Seite befindlichen Ausdrücke kann man in der That als abhängig von Exponenten $\pm\frac{m}{n}$ bezeichnen, da zufolge ihrer Definition

$$f\left(\frac{\pm mk}{nk}\right) = f\left(\frac{\pm m}{n}\right),$$

was auch die ganze positive Zahl k sein mag. Wir verstehen somit unter $a^{\frac{m}{n}}$ die m^{te} Potenz der absoluten n^{ten} Wurzel aus a, unter a^0 1, endlich unter $a^{-\mu}$, wo μ eine beliebige positive rationale Zahl sein kann den reciproken Werth von a^μ d. i. $1 : a^\mu$. Dabei bezeichnet a irgend eine positive Zahl. Man kann auch setzen $a^{\frac{p}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$, was auch p für eine ganze Zahl sein

mag, während n eine positive ganze Zahl bedeutet. — Es soll ferner sein $0^\mu = 0$ $(\mu > 0)$.

Es läfst sich nun leicht nachweisen, dafs die genannten Ausdrücke wirklich der Relation (1) d. i.

$$a^\mu \cdot a^\nu = a^{\mu+\nu} \tag{6}$$

und auch den übrigen in (1) verzeichneten Relationen

$$(a^\mu)^\nu = a^{\mu\nu} \qquad (ab)^\mu = a^\mu \cdot b^\mu \tag{7}$$

Genüge leisten, so dafs in denselben jetzt μ, ν irgend welche rationale Zahlen sein können. Man nehme zuerst an, es seien μ, ν beide positiv, also

$$\mu = \frac{m}{n} \qquad \nu = \frac{p}{q}.$$

Dann hat man

$$a^\mu = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \qquad a^\nu = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}},$$

somit

$$a^\mu \cdot a^\nu = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\mu+\nu}.$$

Man findet ferner

$$(a^\mu)^\nu = \sqrt[q]{(a^\mu)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mp}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\mu\nu}.$$

U. s. f. Sind die Gleichungen (6) (7) für positive rationale Exponenten erwiesen, so hat es keine Schwierigkeit, ihre Giltigkeit für beliebige rationale zu zeigen. Man hat dabei folgende Fälle zu unterscheiden: 1) es sei einer der Exponenten μ, ν Null, 2) $\mu>0$ $\nu<0$, 3) $\mu<0$, $\nu>0$, 4) $\mu<0$, $\nu<0$. So findet man z. B. im letzten Falle

$$a^\mu \cdot a^\nu = \frac{1}{a^{-\mu}} \cdot \frac{1}{a^{-\nu}} = \frac{1}{a^{-(\mu+\nu)}} = a^{\mu+\nu}$$

$$(a^\mu)^\nu = \left(\frac{1}{a^{-\mu}}\right)^\nu = (a^{-\mu})^{-\nu} = a^{\mu\nu} \qquad \text{u. s. f.}$$

7. Ungleichungen für Potenzen mit rationalen Exponenten. a) Für positive rationale Exponenten. Es seien a, b beliebige positive Zahlen.

1) Ist $a > b$, so ist $a^\mu > b^\mu$.

2) Ist $\mu > \nu > 0$, so ist simultan mit $a \gtrless 1$ $a^\mu \gtrless a^\nu$

3) α. „Ist $1 + d > 0$, $(d \gtrless 0)$ so hat man

$$(8) \qquad 1 + \frac{\mu d}{1+d} < (1+d)^\mu < \frac{1}{1-\mu d}.$$

Der zweite Theil der Relation ist nur richtig, wenn $d < \frac{1}{\mu}$

Es sei $\mu = \frac{m}{n}$. Nach Nr. 5 hat man

$$(9) \qquad \frac{1}{1 - \frac{d}{n(1+d)}} < \sqrt[n]{1+d} < 1 + \frac{d}{n}$$

und da wegen $1 - \omega^2 < 1$ $1 \pm \omega < 1 : (1 \mp \omega)$, so lang $1 \mp \omega > 0$, auch

$$1 + \frac{d}{n(1+d)} < \sqrt[n]{1+d} < \frac{1}{1 - \frac{d}{n}}.$$

Dabei mufs $d < n$ sein. Erhebt man zur m^{ten} Potenz, ab unter der Voraussetzung, dafs $1 + \frac{d}{n(1+d)} > 0$ sei, so fol

$$\left\{1 + \frac{d}{n(1+d)}\right\}^m < (1+d)^\mu < \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{n}\right)^m},$$

woraus wegen $(1 + d_1)^m > 1 + m d_1$ sofort Formel (8) g wonnen wird. Der erste Theil derselben ist, falls

$$1 + \frac{d}{n(1+d)} < 0,$$

selbstverständlich, da auch $1 + \frac{\mu d}{1+d} < 0$.

β. Es ist von Interesse neben (8) noch eine andere R lation kennen zu lernen, in der die $(1+d)^\mu$ einschliefsend Grenzen näher an diese Zahl herantreten. Die Formel (ist ein specieller Fall davon.

„Man hat simultan mit $\mu \lesseqgtr 1$

$$(10) \qquad \frac{1}{1 - \frac{\mu d}{1+d}} \lesseqgtr (1+d)^\mu \lesseqgtr 1 + \mu d.$$

Dabei mufs, wenn $\mu > 1$, im ersten Theile der Relatio $d < \frac{1}{\mu - 1}$ sein."

Wenn $\mu > 1$, so hat man nach (8)

$$(11)\quad \begin{aligned}(1+d)^\mu &= (1+d)(1+d)^{\mu-1} > (1+d)\left(1+\frac{(\mu-1)d}{1+d}\right)\\ &= 1+\mu d.\end{aligned}$$

Und ebenso

$$(1+d)^\mu < \frac{1+d}{1-(\mu-1)d} = \frac{1}{1-\frac{\mu d}{1+d}},$$

wenn nur der Nenner positiv ist.

Wenn $\mu < 1$, so folgt aus (11), da $\frac{1}{\mu} > 1$,

$$(12)\quad (1+\mu d)^{\frac{1}{\mu}} > 1+d \quad \text{also} \quad 1+\mu d > (1+d)^\mu.$$

Setzt man endlich

$$1+d = \frac{1}{1-\frac{d}{1+d}},$$

so erhält man aus (12)

$$(1+d)^\mu > \frac{1}{1-\frac{\mu d}{1+d}},$$

da der Nenner positiv ist.

b) Für negative rationale Exponenten. Die hierauf bezüglichen Formeln folgen unmittelbar aus den in a).

1) Ist

$$a > b > 0 \qquad \mu < 0$$

so ist $a^\mu < b^\mu$.

2) Sind μ, ν beliebige rationale Zahlen und $\mu > \nu$, so ist simultan mit $a \gtrless 1$

$$a^\mu \gtrless a^\nu.$$

Denn es ist $a^{\mu-\nu} \gtrless 1$, da $\mu - \nu > 0$.

3) Unmittelbar aus (8) und (10) folgen für $\mu < 0$, $1+d > 0$, $d \gtrless 0$

$$\alpha)\qquad 1+\mu d < (1+d)^\mu < \frac{1}{1-\frac{\mu d}{1+d}}.$$

Der zweite Teil der Relation ist nur richtig, falls

$$d > \frac{1}{\mu - 1}.$$

β) Simultan mit $0 > \mu \gtrless -1$ hat man die genauere Formeln

$$\frac{1}{1-\mu d} \gtrless (1+d)^{\mu} \gtrless 1 + \frac{\mu d}{1+d}.$$

Der erste Theil der Relation ist für $\mu < -1$ nur richti wenn

$$d > \frac{1}{\mu}.$$

8. Potenzen mit irrationalen Exponenten.

1. Satz. „Ist eine irrationale Zahl $\mathfrak{m} = (\varphi_n)$ vorgeleg wo die Reihe $\varphi_0, \varphi_1 \ldots$ aus rationalen Zahlen besteht, un a eine beliebige positive Zahl, so existirt für die Pote a^{φ_n} ein positiver Grenzwerth bei $\lim n = +\infty$. Un wenn auch $(\psi_n) = \mathfrak{m}$, so hat a^{ψ_n} bei $\lim n = +\infty$ der selben Grenzwerth. Diesen bei allen Darstellungen d irrationalen Zahl $\mathfrak{m} = (\varphi_n)$ sich ergebenden Grenzwerth b zeichnet man mit $a^{\mathfrak{m}}$. — Wenn $\mathfrak{m} > 0$, so findet m ebenso $0^{\mathfrak{m}} = 0$.“

Beweis. Zufolge Annahme erfüllen die φ_n folgend Bedingung. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\mu >$ derart dafs

$$|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < \varepsilon \qquad n > \mu \qquad (r = 1, 2 \ldots).$$

Setzt man $a^{\varphi_n} = \Phi_n$, so ist zu untersuchen nach VII. 11

$$\Phi_{n+r} - \Phi_n = a^{\varphi_n + r} - a^{\varphi_n} = a^{\varphi}\{a^{\xi} - 1\}$$

worin

$$\xi = \varphi_{n+r} - \varphi_n.$$

Es sei zunächst $a > 1$, sodafs wenn $a = 1 + d$ g setzt wird, $d > 0$. Nach Nr. 7 hat man mit $\xi \gtrless 0$

$$0 \lesseqgtr (1+d)^{\xi} - 1 \lesseqgtr \xi d,$$

wobei die positiven Werthe von ξ jedoch die Grenze 1 nich erreichen dürfen. Es ist demnach

$$|(1+d)^{\xi} - 1| < d\,|\xi|.$$

Nach VII. 4 giebt es von 0 verschiedene rationale Zahle $\varrho\,\sigma$, derart, dafs wenn nur n über einer bestimmten Zah

liegt — wir können sagen $n > \mu$ — $\sigma < \varphi_n < \varrho$, somit $a^{\varphi_n} < a^{\varrho}$. Man findet demnach, daſs

$$|\Phi_{n+r} - \Phi_n| < a^{\varrho} d |\xi|$$

somit kleiner als eine gegebene Zahl $\varepsilon' > 0$, falls man

$$|\xi| < \varepsilon' : a^{\varrho} d$$

nimmt. Es gehört also zu jeder Zahl $\varepsilon' > 0$ eine Zahl $\mu' > 0$, derart daſs

$$|\Phi_{n+r} - \Phi_n| < \varepsilon' \text{ für } n > \mu' \quad (r = 1, 2 \ldots)$$

d. h. die Φ_n nähern sich bei unbegrenzt wachsendem n einem endlichen Grenzwerthe. Daſs er positiv und nicht etwa 0 ist, folgt daraus, daſs

$$\Phi_n > a^{\sigma} \text{ für } n > \mu.$$

Ist auch $(\psi_n) = \mathfrak{m}$ und $a^{\psi_n} = \Psi_n$ so findet man durch ähnliche Entwickelung $(\Phi_n) = (\Psi_n)$. Man braucht nur anzusetzen

$$\Psi_n - \Phi_n = a^{\psi_n} - a^{\varphi_n} = a^{\varphi_n} (a^{\psi_n - \varphi_n} - 1)$$

und zu bemerken, daſs für $n > \mu$

$$|\Psi_n - \Phi_n| < a^{\varrho} d \, |\psi_n - \varphi_n|,$$

worin nach VII. 4

$$|\psi_n - \varphi_n| < \varepsilon.$$

Wenn $a < 1$ ist, so beachte man, daſs

$$a^{\varphi_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\varphi_n}.$$

Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck gehört zu den soeben betrachteten.

Es folgt weiter:

„Ist $\mathfrak{m} > 0$ so ist $a^{\mathfrak{m}} \gtrless 1$ simultan mit $a \gtrless 1$; ist $\mathfrak{m} < 0$, so ist simultan mit $a \gtrless 1$

$$a^{\mathfrak{m}} \lessgtr 1.“$$

Denn wenn $\mathfrak{m} > 0$, so ist die oben eingeführte Zahl $\sigma > 0$, somit neben $a > 1$

$$\Phi_n > a^\sigma > 1,$$

also

$$(\Phi_n) > 1.$$

U. s. f.

Man hat noch hervorzuheben den

2. Satz. „Wenn die Zahlen $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots$ einen tionalen Grenzwerth α besitzen, so haben auch die einen Grenzwerth bei $\lim n = +\infty$ und zwar ist

$$(a^{\varphi_n}) = a^\alpha.$$"

Z. B. ist

$$\lim_{n=+\infty} \varphi_n = 0,$$

so ist

$$\lim_{n=+\infty} a^{\varphi_n} = 1.$$

Aus der Gleichung

$$a^\alpha - a^{\varphi_n} = a^{\varphi_n}(a^{\alpha-\varphi_n} - 1)$$

folgt der Satz durch die im Vorstehenden angewand Schlüsse.

Die Bezeichnung a^m für $\lim a^{\varphi_n}$ ist völlig gerechtfert denn es übernimmt diese Zahl durchaus die Rolle der bis definirten Potenzen. Denn es gelten für beliebige re Exponenten die Sätze:

1.) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Beim Beweise unterscheide man, ob einer oder kei der Exponenten m, n rational ist. Im letzteren Falle l man $m = (\varphi_n)$, $m = (\psi_n)$,

$$a^m = \lim a^{\varphi_n}, \qquad a^n = \lim a^{\psi_n} \quad (\lim n = +\infty),$$

also nach VII. Note 4)

$$a^m \cdot a^n = \lim a^{\varphi_n} \cdot a^{\psi_n} = \lim a^{\varphi_n + \psi_n}.$$

Andererseits ist

$$(\varphi_n) + (\psi_n) = (\varphi_n + \psi_n)$$

und daher

$$\lim a^{\varphi_n + \psi_n} = a^{m+n}.$$

(Für $\mathfrak{n} = -\mathfrak{m}$ finden wir daher, dafs auch hier

$$a^{-\mathfrak{m}} = 1 : a^{\mathfrak{m}}.)$$

Ist $\mathfrak{m}$ irrational, $\mathfrak{n}$ rational und $= \nu$, so folgt bei $\lim n = +\infty$

$$a^{\mathfrak{m}} \cdot a^{\nu} = \lim a^{\varphi_n} \cdot a^{\nu} = \lim a^{\varphi_n + \nu} = a^{\mathfrak{m} + \nu}.$$

2.) $$a^{\mathfrak{m}} \cdot b^{\mathfrak{m}} = (ab)^{\mathfrak{m}},$$

wo auch $b > 0$ sein soll. Wird ähnlich wie (13) gezeigt.

3.) $$(a^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{n}} = a^{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}.$$

Beweis. Es sei $\mathfrak{n}$ zunächst rational und zwar $= \frac{p}{q}$ worin q eine positive, p eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Setzt man

$$(a^{\mathfrak{m}})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^{\mathfrak{m}})^{p}} = \sqrt[q]{a^{\mathfrak{m}p}} = y,$$

so ist

$$y^q = a^{\mathfrak{m}p}.$$

Ebenso folgt aus

$$z = a^{\frac{\mathfrak{m}p}{q}} \qquad z^q = a^{\mathfrak{m}p}.$$

Daher ist $y = z$ (Nr. 4) oder

$$(a^{\mathfrak{m}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{\mathfrak{m}p}{q}}.$$

Ist nun auch $\mathfrak{n}$ irrational und zwar $= (\psi_n)$, so hat man

$$(a^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{n}} = \lim_{n=+\infty} (a^{\mathfrak{m}})^{\psi_n} = \lim_{n=+\infty} a^{\mathfrak{m}\psi_n}$$

nach dem soeben erwiesenen Satze. Und da

$$(\mathfrak{m}\psi_n) = \mathfrak{m}\mathfrak{n},$$

so ergiebt sich endlich

$$(a^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{n}} = a^{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}.$$

Auch die Ungleichungen in Nr. 7 behalten Giltigkeit, wenn die darin vorkommenden Exponenten μ, ν reelle Zahlen überhaupt bedeuten, und zwar in a) positive, in b) negative oder auch beliebige reelle Zahlen. Einer näheren Ausführung wird nur der Beweis von (8) d. i. der Relation

$$1 + d > 0 \qquad d \gtrless 0$$

(14) $\quad (\mathfrak{m} > 0) \quad 1 + \frac{\mathfrak{m} d}{1 + d} < (1 + d)^{\mathfrak{m}} < \frac{1}{1 - \mathfrak{m} d}$

bedürfen, da (10) und b) 3) daraus durch Schlüsse abgeleitet sind, die von der Natur des Exponenten μ unabhängig sind. Der zweite Theil von (14) ist jedoch nur richtig, wenn

$$1 - \mathfrak{m} d > 0.$$

Es sei wieder $\mathfrak{m} = (\varphi_n)$. Man hat nun, da für $n > \mu$

$$\varphi_n > \varrho > 0,$$

nach (8)

$$1 + \frac{\varphi_n d}{1 + d} < (1 + d)^{\varphi_n} < \frac{1}{1 - \varphi_n d};$$

daraus folgt aber nach dem 3. Corollar in VII. 5 (vgl. dazu Note 4) nur

(15) $$1 + \frac{\mathfrak{m} d}{1 + d} \leqq (1 + d)^{\mathfrak{m}} \leqq \frac{1}{1 - \mathfrak{m} d}.$$

Man weifs nun nach (10), dafs wenn $\mathfrak{m} < 1$, somit auch φ_n schliefslich < 1 ist,

$$\frac{1}{1 - \frac{\varphi_n d}{1 + d}} < (1 + d)^{\varphi_n} < 1 + \varphi_n d.$$

Somit ergiebt sich

$$\frac{1}{1 - \varphi_n d} - (1 + d)^{\varphi_n} > \frac{1}{1 - \varphi_n d} - (1 + \varphi_n d)$$

$$= \frac{\varphi_n^2 d^2}{1 - \varphi_n d} > \frac{\mathfrak{m}'^2 d^2}{1 - \mathfrak{m}' d},$$

$$(1 + d)^{\varphi_n} - \left(1 + \frac{\varphi_n d}{1 + d}\right) > \frac{1}{1 - \frac{\varphi_n d}{1 + d}} - \left(1 + \frac{\varphi_n d}{1 + d}\right)$$

$$= \frac{\varphi_n^2 d^2}{(1 + d)\,[1 + (1 - \varphi_n) d]},$$

also

$$> \frac{\mathfrak{m}'^2 d^2}{(1 + d)\,[1 + (1 - \mathfrak{m}') d]},$$

wenn $0 < \mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$ und $d > 0$. [Für $d < 0$ müfste in den Nennern der letzten Glieder statt φ_n eine Zahl $\mathfrak{m}'' > \mathfrak{m}$ gesetzt werden.] Daraus ist nun ersichtlich, dafs in (15) die unteren Zeichen (=) unmöglich sind. — Wenn $\mathfrak{m} > 1$, also schliefslich $\varphi_n > 1$, ergiebt sich mit Benutzung von (10)

$$\frac{1}{1-\varphi_n d} - (1+d)^{\varphi_n} > \frac{1}{1-\varphi_n d} - \frac{1}{1-\frac{\varphi_n d}{1+d}}$$

$$= \frac{\varphi_n d^2}{(1-\varphi_n d)\,[1+(1-\varphi_n)\,d]},$$

$$(1+d)^{\varphi_n} - \left(1+\frac{\varphi_n d}{1+d}\right) > 1 + \varphi_n d - \left(1+\frac{\varphi_n d}{1+d}\right)$$

$$= \frac{\varphi_n d^2}{1+d},$$

woraus man denselben Schlufs wie oben ableiten kann. Vorher ist jedoch noch zu bemerken, dafs in des ersteren Formel $1 - d\,(\varphi_n - 1)$ stets positiv ist. Dies versteht sich von selbst, wenn $d < 0$; ist aber $d > 0$, so hat man

$$1 - d\,(\varphi_n - 1) > 1 - \varphi_n d,$$

was in der genannten Formel immer als positiv anzusehen ist.

9. Die Logarithmen.

Satz. „Wenn a und b positive Zahlen bedeuten, die erstere von 1 verschieden, so giebt es stets eine und nur eine Zahl x, welche der Gleichung $a^x = b$ genügt.

Beweis. Es sei zuerst $a > 1$. Dann wächst a^x zugleich mit x und zwar über jede endliche Zahl, denn nach der vorigen Nummer ist

$$a^x > 1 + x\,(a-1)$$

für $x > 1$. Daraus folgt, dafs es eine ganze Zahl c_0 geben mufs, derart, dafs entweder $a^{c_0} = b$ oder

$$a^{c_0} < b < a^{c_0+1}.$$

Im ersten Falle ist $x = c_0$ eine Auflösung der Gleichung $a^x = b$. Im zweiten Falle bilde man, unter e eine positive ganze Zahl ≥ 2 verstanden, die Potenzen

$$a^{c_0+\frac{1}{e}}, \quad a^{c_0+\frac{2}{e}} \ldots a^{c_0+\frac{e-1}{e}}.$$

Sodann ergiebt sich, dafs eine ganze Zahl c_1

$$0 \leqq c_1 \leqq e-1$$

existiren mufs, derart dafs entweder

$$a^{c_0+\frac{c_1}{e}} = b$$

oder

$$a^{c_0+\frac{c_1}{e}} < b < a^{c_0+\frac{c_1+1}{e}}.$$

Im ersten Falle ist eine Auflösung, nämlich

$$x = c_0 + \frac{c_1}{e},$$

unserer Gleichung gefunden. Im zweiten theilen wir das Intervall $\frac{1}{e}$ neuerdings in e gleiche Theile, wodurch eine ähnliche Disjunction zu Tage tritt. U. s. f. Das Ergebnis dieser Betrachtung wird folgendes sein. Entweder existirt eine rationale Zahl von der bestimmten Form

$$x = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_m}{e^m},$$

welche die Gleichung $a^x = b$ befriedigt, oder wir erhalten eine unbegrenzte Reihe von ganzen Zahlen $c_0, c_1, c_2 \ldots$ worin von c_1 an alle Ziffern sind, d. i. zwischen 0 und e liegen, von der Eigenschaft, dafs, wie grofs auch der Zeiger n sein mag, stets

$$a^{S_n} < b < a^{S_n+\frac{1}{e^n}}.$$

Dabei ist

$$S_n = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}.$$

Und es ist leicht zu zeigen, dafs für die Zahl

$$x = (S_n) \qquad a^x = b$$

ist. Da jetzt

$$S_n < x < S_n + \frac{1}{e^n},$$

also

$$a^{S_n} < a^x < a^{S_n + \frac{1}{e^n}},$$

so hat man

$$|a^x - b| < a^{S_n + \frac{1}{e^n}} - a^{S_n} = a^{S_n}\left(a^{\frac{1}{e^n}} - 1\right),$$

also

$$|a^x - b| < b\,(a-1)\,\frac{1}{e^n};$$

somit ist $|a^x - b|$ kleiner als jede positive Zahl ε d. i.

$$a^x = b.$$

Dafs es nur eine Zahl x geben kann, wofür $a^x = b$, folgt daraus, dafs für $x' \gtrless x$ simultan $a^{x'} \gtrless a^x$. — x ist positiv, wenn $b > 1$; negativ, wenn $b < 1$. Die Gleichung $a^x = 1$ hat nur die Lösung $x = 0$.

Ist $0 < a < 1$, so ist $\frac{1}{a} > 1$, also existirt eine und nur eine Zahl x_1, derart, dafs

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} = b,$$

somit

$$a^{-x_1} = b.$$

Man hat also für $x = -x_1$

$$a^x = b.$$

Man nennt die der Gleichung $a^x = b$ genügende Zahl x den Logarithmus der positiven Zahl b in Beziehung auf die Basis a:

$$x = {}^a\log b.$$

Hierbei reicht es jedoch aus, der Basis einen bestimmten positiven, von 1 verschiedenen Werth B zu ertheilen. Denn hat man die Zahlen ${}^B\log a$, ${}^B\log b$ ermittelt, so folgt aus

$$\text{(a)} \quad b = a^x = B^{x\,{}^B\log a} \quad x\,{}^B\log a = {}^B\log b \quad x = \frac{{}^B\log b}{{}^B\log a}.$$

Für B sind gegenwärtig nur zwei Annahmen üblich. Entweder setzt man $B = 10$ als der Basis des dekadischen Zahlensystemes oder nimmt für B die in VII. 5 eingeführte

irrationale Zahl e, die mit den Stellen 2,7182818284 beginn Die zur Basis 10 gehörigen Logarithmen heifsen gemei oder nach ihrem ersten Berechner Briggische Logarithme die zur Basis e gehörigen natürliche oder Neperische Logarithmen. Wir gebrauchen für die ersteren die Abkü zung log, für die letzteren l, so dafs

$$10^{\log b} = b \qquad e^{lb} = b.$$

Aus (a) folgt

$$x = {}^a\log b = \frac{lb}{la} = Mlb,$$

worin die Constante $M = 1 : la$ als Modulus des zur B sis a gehörigen Logarithmensystemes bezeichnet wi Man hat also

$$e^{\frac{1}{M}} = a,$$

oder

$$e = a^M,$$

somit auch

$$M = {}^a\log e.$$

Wenn die Basis eines Logarithmensystemes > 1 i wie wir stets annehmen, so ist sein Modulus positiv.

Wenn die Decimalzahl b nicht eine ganze Potenz v 10 ist, so besteht ihr gemeiner Logarithmus aus der ganz Zahl c_0 — der Charakteristik — und einem positiv echten Decimalbruche, Mantisse genannt. Ist $b > 1$, ist c_0 gleich der um 1 verminderten Anzahl der Ziffern v dem Komma; ist $b < 1$, der Anzahl der Nullen vor der erst geltenden Ziffer. Die gemeinen Logarithmen der natürliche Zahlen, welche nicht Potenzen von 10 sind, sind irrationa da jede gebrochene Potenz von 10 irrational ist.

Briggs berechnete die gemeinen Logarithmen der n türlichen Zahlen b nach dem oben angegebenen Verfahre $a = 10$ $e = 2$ gesetzt. Hierbei kommt man mit succe siven Ausziehungen von Quadratwurzeln aus:

$$\sqrt{10} = w_1, \qquad \sqrt{w_1}\ \sqrt{10w_1},$$

u. s. f.[3]) Einfacher gestaltet sich die Arbeit, wenn m zunächst durch fortgesetztes Ausziehen der Quadratwurzel

$$\sqrt{10},\quad \sqrt[4]{10},\quad \sqrt[8]{10}\ldots$$

berechnet und b auf das Intervall (0,10) einschränkend, vermittelst aufeinander folgender Divisionen die Ziffern $c_1, c_2\ldots$ bestimmt. Ist z. B. $\sqrt{10} < b < 10$, also $c_1 = 1$, so dividire man b durch $\sqrt{10}$. Je nachdem der Quotient kleiner oder gröfser als $\sqrt[4]{10}$, hat man $c_2 = 0$ oder 1 u. s. f. — Schneller kommt man vorwärts mittelst einer Tafel der Potenzen von 10 zu den Exponenten

$$\frac{1}{10^n},\quad \frac{2}{10^n},\ldots\frac{9}{10^n}\ (n = 1, 2\ldots).^{4})$$

10. Allgemeine Eigenschaften der Logarithmen.

1) Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe der Logarithmen der Factoren.

Ist

$$P = b_1 b_2 \ldots b_p$$

und

$$B^{x_r} = b_r \qquad (r = 1, 2\ldots p),$$

so hat man

$$x_r = {}^B\log b_r$$

und

$$P = B^{x_1 + x_2 + \cdots + x_p},$$

somit

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_p = {}^B\log P.$$

2) Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz: Logarithmus des Zählers weniger Logarithmus des Nenners.

Ist

$$P = b : c, \qquad B^x = b, \qquad B^y = c,$$

so folgt

$$P = B^{x-y} \qquad {}^B\log P = x - y = {}^B\log b - {}^B\log c.$$

3) Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Producte des Logarithmus der Basis mit dem Exponenten.

Für $P = b^c$ folgt $P = B^{xc}$, also

$${}^B\log P = xc = c \cdot {}^B\log b.$$

4) Zur gröfseren von zwei positiven Zahlen ge-

hört der gröfsere Logarithmus, wenn die Basis $B >$ — Ist $b > c > 0$, so hat man

$$^{B}\log b > {}^{B}\log c;$$

denn wäre

$$^{B}\log b \leqq {}^{B}\log c,$$

so würde, da $B > 1$, folgen

$$b \leq c.$$

IX. Abschnitt.

Die reellen Veränderlichen und ihre Functionen.

1. Unter einer reellen Veränderlichen versteht man eine Zahl, die unbegrenzt viele reelle Werthe annehmen kann, deren jeder völlig bestimmt sein mufs. Die Gesammtheit dieser Werthe heifst der Bereich der Veränderlichen.

Hierbei sind zunächst nur zwei Fälle denkbar. Entweder liegen, algebraisch gesprochen, sämmtliche Werthe der Veränderlichen (d. i. jeder einzelne derselben) unter einer bestimmten Zahl, oder die Veränderliche nimmt Werthe an, gröfser als jede gegebene positive Zahl. Im letzteren Falle sagt man, die Veränderliche habe die obere Grenze oder den Grenzwerth $+\infty$ (unendlich) oder sie wird unendlich; denn einen gröfsten Werth giebt es für sie nicht. Aber auch im ersten Falle mufs man sich hüten zu glauben, dafs die Veränderliche einen gröfsten Werth annehmen müsse. So giebt es z. B. unter den echten Brüchen $1 - \frac{1}{n}$, worin n jede natürliche Zahl (1, 2 ...) sein kann, keinen gröfsten. In jedem solchen Falle läfst sich zunächst nur Folgendes behaupten.

Satz. Liegen sämmtliche Werthe einer Veränderlichen x unter einer endlichen Zahl A, so giebt es eine und nur eine Zahl g von der Eigenschaft, dafs keiner der Werthe x sie überschreitet, dafs aber mindestens ein Werth von x vorhanden ist, dessen Unterschied von g weniger beträgt, als eine gegebene, sonst beliebige positive Zahl ε.[1]) g heifst die obere Grenze der Veränderlichen x.

Beweis. Es sei x_0 ein bestimmter Werth von x. Dann giebt es zwei ganze Zahlen p, q, so dafs

$$p < x_0 < A \leqq q.$$

Betrachtet man die Intervalle

$$(p, p+1), \quad (p+1, p+2) \ldots (q-1, q),$$

so mufs eines von ihnen das letzte sein, welches überhaupt noch Werthe von x enthält, und zwar in dem Sinne, dafs seine obere Grenze keinesfalls von einem Werthe der Veränderlichen x gebildet ist. Dasselbe sei mit (c_0, c_0+1) bezeichnet. Ist c_0 der einzige Werth von x_1 der darin vorkommt, so ist c_0 der gröfste Werth, den x überhaupt annehmen kann, so dafs man $g = c_0$ setzen kann. Kommen aber innerhalb des Intervalles (c_0, c_0+1) Werthe von x vor, so theile man dasselbe in e gleiche Theile $(e \geqq 2)$

$$\left(c_0, c_0+\tfrac{1}{e}\right), \left(c_0+\tfrac{1}{e}, c_0+\tfrac{2}{e}\right) \ldots \left(c_0+\tfrac{e-1}{e}, c_0+1\right),$$

worauf man denselben Schlufs wiederholen kann. Es giebt ein letztes Intervall

$$\left(c_0+\tfrac{c_1}{e}, \; c_0+\tfrac{c_1+1}{e}\right) \qquad 0 \leqq c_1 \leqq e-1,$$

in dem überhaupt noch Werthe von x vorkommen, wieder in obigem Sinne. Beschränken sich dieselben auf den Werth $c_0+\frac{c_1}{e}$, so bildet er die verlangte Zahl g; in dem andern Falle theile man das eben erwähnte Intervall neuerdings in e Theile. U. s. f. Auf diese Weise gelangt man zur Einsicht, dafs entweder g eine Zahl von der Form

$$c_0+\frac{c_1}{e}+\frac{c_2}{e^2}+\ldots+\frac{c_m}{e^m}$$

sein mufs, unter $c_1, c_2 \ldots c_m$ Ziffern verstanden, oder dafs eine Zahl

$$c = \left(c_0+\frac{c_1}{e}+\ldots+\frac{c_n}{e^n}\right)$$

existiren mufs von der Eigenschaft, dafs in jedem Intervalle

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_n}{e^n},\ c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_n + 1}{e^n}\right),$$

wie grofs auch die ganze positive Zahl n sein mag, Werthe von x zu finden sind,

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_n + 1}{e^n}$$

aber bereits gröfser ist als jeder Werth von x. Daraus folgt, dafs, wenn x einen bestimmten dieser Werthe bedeutet, $\mathfrak{c} \geqq x$ (VII. 5, 2. Cor.), dafs aber, indem

$$\mathfrak{c} < c_0 + \frac{c_1}{e} + \ldots + \frac{c_n + 1}{e^n},$$

Werthe x_1 von x vorhanden sind, wofür

$$\mathfrak{c} - x_1 < \frac{1}{e^n},$$

d. i. kleiner sein kann als irgend eine gegebene Zahl $\varepsilon > 0$. Die Zahl $\mathfrak{c}$ ist somit die im Satze angekündigte Zahl g. Dafs es nur eine solche Zahl g geben kann, folgt aus der Relation $g \geqq x$, $g - x_1 < \varepsilon$ durch einen indirecten Beweis nach VII. 7.

Gehört g zu den Werthen von x, so ist es der gröfste derselben; die Veränderliche erreicht ihre obere Grenze. Im anderen Fall ist g ein Grenzwerth der Veränderlichen im eigentlichen Sinne ($\lim x = g$) d. i. ein Werth gröfser als alle der Veränderlichen ertheilten Werthe, dem sie jedoch beliebig nahe kommen. So ist in dem oben gebrachten Beispiele $x = 1 - \frac{1}{n}$ die obere Grenze $g = 1$ ein eigentlicher Grenzwerth.

Die vorstehende Entwickelung dient nur dazu, um die Existenz der Zahl g festzustellen, keineswegs aber, um dieselbe zu berechnen. Die letztere Aufgabe läfst sich nicht so einfach behandeln, sie erfordert vielmehr in jedem einzelnen Falle besondere Kunstgriffe. Ebensowenig ist bisher ein allgemeines Verfahren bekannt geworden, um durch eine endliche Anzahl von Operationen zu entscheiden, ob

die obere Grenze einen Veränderlichen endlich oder unendlich ist.

Wendet man die obige Erörterung auf die Veränderliche $-x$ an, so gelangt man zur Festsetzung der unteren Grenze von x. Nimmt die Veränderliche Werthe an, kleiner als jede gegebene negative Zahl, so sagt man, ihre untere Grenze sei $-\infty$ oder sie habe den Grenzwerth $-\infty$. „Liegen aber sämmtliche Werthe der Veränderlichen x über einer bestimmten Zahl B, so existirt eine und nur eine Zahl k, unter welche kein Werth derselben sinkt; es giebt jedoch mindestens einen Werth x_2 von x, derart, dafs $x_2 - k$ gröfser ist als eine gegebene, sonst beliebige positive Zahl ε. k heifst die untere Grenze der Veränderlichen." Man hat demnach $x \geqq k$, aber $x_2 > k + \varepsilon$.

Endlich heifst eine Veränderliche, deren jeder Werth zwischen denselben Zahlen liegt.

2. Die Veränderliche x heifst in dem endlichen Intervalle (a, b) stetig, wenn sie alle reellen Werthe $a \leqq x \leqq b$ annimmt. Sie heifst im Intervalle (a, b) allenthalben überalldicht, wenn in jedem aus dem Intervalle (a, b) herausgehobenen Intervalle (a', b') — $a \leqq a' < b' \leqq b$ — mindestens ein Werth derselben vorkommt.

3. Ein- und mehrdeutige Functionen einer reellen Veränderlichen. Wenn jedem Werthe x einer genau definirten Veränderlichen ein und nur ein Werth y zugeordnet ist, so heifst y eine eindeutige Function der unabhängigen Veränderlichen x, in abgekürzter Schreibweise $y = f(x)$. Da der Bereich der letzteren unbegrenzt viele bestimmte Werthe umfafst, so kann eine solche Zuordnung nur durch eine arithmetische Vorschrift erfolgen, welche lehrt, wie zu irgend einem Werthe von x das zugehörige y berechnet werden kann.[2]) Werden in derselben Art jedem Werthe der unabhängigen Veränderlichen x zwei oder mehrere Werthe y zugeordnet, so nennt man y eine zwei- oder mehrdeutige Function von x. — Die unabhängige Veränderliche x heifst auch das Argument der Function.

Ein Polynom aus einer endlichen Anzahl von Gliedern

der Form $a_r x^r$, worin a_r eine Constante, r eine ganze positive Zahl oder Null bedeutet, d. i.

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \qquad (a_n \gtrless 0),$$

heifst eine ganze rationale Function von x und zwar vom n^{ten} Grade in x. Durch diesen Ausdruck wird jedem endlichen Werthe x ein Werth $y = F(x)$ zugeordnet. Der Quotient zweier ganzen Functionen $F(x)$, $G(x)$ bildet eine rationale Function von x. $G(x) : F(x)$ liefert zu allen jenen Werthen von x, wodurch $F(x)$ nicht zu Null gemacht wird, einen Werth $y = G(x) : F(x)$. — Es ist zweckmäfsig, die zuletzt gegebenen Begriffe sogleich auf mehrere unabhängige Veränderliche $x_1, x_2 \ldots x_m$ auszudehnen. Ein Aggregat von Gliedern der Form

$$a_{r_1, r_2 \ldots r_m} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_m^{r_m},$$

worin der erste Factor eine Constante, die $r_1, r_2 \ldots r_m$ ganze positive Zahlen oder Null bezeichnen, in endlicher Anzahl heifst eine ganze rationale Function der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$. Hat die Summe der Exponenten $r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ in allen Gliedern einen und denselben Werth N, so sagt man, die Function sei homogen und von der Dimension N in $x_1, x_2 \ldots x_m$. Wenn diese Summe verschiedene Werthe besitzt, so sei N der gröfste derselben: der ganzen Function wird dann die Dimension N in den $x_1, x_2 \ldots x_m$ beigelegt. Der Quotient zweier ganzen Functionen in $x_1, x_2 \ldots x_m$ bildet eine rationale Function dieser Veränderlichen. — Setzt man eine ganze Function gleich 0, so erhält man eine algebraische Gleichung.

Der VIII. Abschnitt bietet neue Beispiele von Functionen dar. Wir haben die Potenz a^x $(a > 0)$ nacheinander definirt für positive ganzzahlige, für rationale, für irrationale Werthe des Exponenten x. Im ersten Falle war

$$a^x = a \cdot a \ldots a \ (x \text{ mal});$$

im zweiten

$$x = \frac{m}{n} \qquad a^x = (\sqrt[n]{a})^m,$$

im dritten

$$x = (\varphi_n) \qquad a^x = \lim a^{\varphi_n} \qquad (\lim n = +\infty).$$

So wurde jedem reellen Werthe von x ein Werth a^x zugeordnet, also für die Gesammtheit der reellen Werthe von x eine eindeutige Function definirt, die wir fortan die Exponential-Function nennen werden. — Beschränken wir die Variabele x auf positive Werthe, so definirt x^μ, wo μ eine beliebige reelle Zahl aufser 0 sein kann, die Potenzfunction, welcher, falls $\mu > 0$ für $x = 0$, der Werth 0 zukommt. Desgleichen definirt die Gleichung $B^y = x$ für positive Werthe von x eine eindeutige Function von x, den B-Logarithmus $y = {}^B\log x$.

Es hindert nichts, das Gesetz der Zuordnung zwischen je zwei Zahlen x, y nach Willkür anzunehmen. Ordnet man z. B. jedem rationalen Werthe des Intervalles $(0, 1)$ den Werth $y = 0$, jedem irrationalen desselben den Werth $y = 1$ zu, so bilden diese Werthe y eine eindeutige Function, definirt für alle Werthe x: $0 \leqq x \leqq 1$.

Den rationalen Functionen von x gegenüber bieten die nachher aufgeführten Functionen einen wesentlichen Unterschied dar. Die ganze Function $y = F(x)$ ist ein Ausdruck, der gestattet, y für alle Werthe von x unmittelbar zu berechnen. Es sind nur mit der Zahl x gewisse Multiplicationen vorzunehmen und die so erhaltenen Glieder hinterher zu addiren. Auch wenn y durch den Grenzwerth eines in x rationalen Ausdruckes definirt ist, etwa $y = \lim \varphi_n(x)$ bei $\lim n = +\infty$, so kann die Zahl y aus x unmittelbar berechnet werden. In einem solchen Falle, d. i. wenn ein einziger analytischer Ausdruck gegeben ist, welcher die Berechnung der Zahl $y = f(x)$ aus jedem der der unabhängigen Veränderlichen x beigelegten Werthe ermöglicht, sagen wir die Function sei für diesen Bereich von x analytisch dargestellt. Die oben gegebene Definition der Exponentialfunction ist nicht von dieser Art. Dagegen sind analytische Darstellungen derselben in den folgenden Definitionen enthalten

$$= e^x \lim_{n=+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

$$e^x = \lim_{n=+\infty} \left\{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right\}.$$

Ebensowenig haben wir bisher eine analytische Darstellung der Potenzfunction x^μ, falls μ keine ganze Zahl ist, kennen gelernt.

Setzt man fest, dafs zwischen zwei Veränderlichen x, y eine algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ bestehe, so wird die eine derselben als eine algebraische Function der anderen als unabhängig vorausgesetzten betrachtet. Dabei kann sie (selbstverständlich bei alleiniger Berücksichtigung von reellen Werthen) eine mehrdeutige Function der anderen sein.

Wenn eine irgendwie definirte Function von x weder durch einen in x rationalen Ausdruck dargestellt werden kann, noch für alle der unabhängigen Veränderlichen x beigelegten Werthe einer und derselben algebraischen Gleichung Genüge leistet, so heifst sie transcendent. Solche Functionen sind die Exponentialfunction, die Potenzfunction bei irrationalem Exponenten, der Logarithmus. Der Beweis, dafs keine von ihnen eine algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ identisch erfüllt, kann hier nicht geliefert werden.

Zusammengesetzt heifst eine eindeutige Function z von x, wenn die Zuordnung des Werthes z zu jedem Werthe von x in der Art bewerkstelligt ist, dafs einem solchen zuerst ein bestimmter Werth y und diesem dann ein Werth z zugeordnet wird. Die abgekürzte Bezeichnung hierfür ist $z = \varphi\{f(x)\}$. Zwischen x und z können auch zwei oder mehrere Zwischenglieder eingeschoben werden.

4. Eine eindeutige Function kann für alle Werthe von x in dem Intervalle (a, b) definirt sein, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl derselben. Dies tritt z. B. bei gebrochenen rationalen Functionen ein, wenn das Intervall Werthe von x enthält, wofür der Nenner 0 ist. So ist $y = 1 : x$ für alle x im Intervalle $(-1, +1)$ definirt, ausgenommen $x = 0$. Für $x = 0$ hat y keinen Sinn, dagegen kann man $1 : y$ 0 sein lassen. Man sagt in dem Falle, dafs $f(x)$ für einen bestimmten Werth $x = a$ nicht definirt, dem reciproken Werthe $1 : f(x)$ aber für $x = a$ der Werth 0 beigelegt ist, die Function $f(x)$ sei für $x = a$ unendlich: $f(a) = \infty$. In dieser Formel hat das Symbol ∞

kein Vorzeichen, während es in Nr. 1 mit einem versehen ist. Man wird auch, wenn, wie es üblich ist, statt $+\infty$ „∞" gesetzt wird, die doppelte Bedeutung des Unendlichen in der Functionentheorie leicht auseinander halten.[3])

Betrachtet man an Stelle von $f(x)$ die zusammengesetzte Function von y

$$f(1:y) = \varphi(y),$$

so ist dieselbe für $y = 0$ durch $f(x)$ nicht definirt. Setzt man aber fest, dafs $\varphi(0) = b$ sei, so sagt man $f(x)$ sei für den Werth $x = \infty$ (ohne Vorzeichen) definirt: $f(\infty) = b$. Man kann auch annehmen, es sei für $y = 0$ $\varphi(y)$ nicht definirt, dagegen $1 : \varphi(y) = 0$. Dann heifst es, $f(x)$ ist für den Werth $x = \infty$ unendlich: $f(\infty) = \infty$. — So werden zu $f(x) = x^{-\mu}$ $(\mu > 0)$ die Werthe

$$f(0) = \infty, \qquad f(\infty) = 0,$$

zu $f(x) = x^{\mu}$ $f(\infty) = \infty$ gezogen; 0^{μ} ist nach VIII. § 0.

5. Grenzwerthe der Functionen einer Veränderlichen. Nehmen wir an, es sei die eindeutige Function $y = f(x)$ definirt für unbegrenzt viele Werthe x in dem Intervalle $(a, a + d)$ — $d > 0$ —, welche sich dem Grenzwerthe a beliebig nähern, sodafs zu jeder Zahl $\delta > 0$ mindestens ein Werth x_1 von x gehört, derart, dafs $a < x_1 < a + \delta$. Dabei genügt es anzunehmen, dafs x dem Werthe a fallend sich nähere, also $x - a > 0$ sei; was kurz durch die Formel $\lim x = a + 0$ ausgedrückt wird. Ob $f(x)$ für $x = a$ selbst definirt ist oder nicht, kommt hier nicht in Betracht. Man wird nun fragen, was sich aus dieser Annahme für die Werthe von $f(x)$ ergiebt. Darauf können wir jetzt noch keine Antwort ertheilen, sondern müssen uns auf die Aufzählung einiger besonderen Fälle beschränken.

Man sagt, die Function $y = f(x)$ besitze, während x in der angegebenen Weise dem Werthe a sich nähert, einen endlichen Grenzwerth b d. h. es bestehe die Formel

$$\lim_{x=a+0} f(x) = b \tag{1}$$

dann und nur dann, wenn jeder positiven Zahl ε eine

positive Zahl δ zugeordnet werden kann, derart, dafs der absolute Betrag von $f(x) - b$ kleiner ist als ε für jeden der Veränderlichen x zufolge ihrer Definition zukommenden Werth, der zwischen a und $a + \delta$ liegt.[4]) D. i.

$$a < x < a + \delta \qquad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Und ferner: Es ist

$$\lim_{x=a+0} f(x) = +\infty \quad \text{(bez. } -\infty\text{)}, \tag{2}$$

wenn jeder positiven (negativen) Zahl G eine positive Zahl δ zugeordnet werden kann, derart, dafs $f(x) > G$ (bez. $< G$) für jeden der Veränderlichen x zufolge ihrer Definition zukommenden Werth, der zwischen a und $a + \delta$ liegt.

Wenn $f(x)$ selbst weder den Grenzwerth $+\infty$, noch $-\infty$ jedoch $\lim |f(\alpha)| = +\infty$ bei $\lim x = a + 0$ ist, so spricht man manchmal von „Unbestimmt-unendlich Werden" von $f(x)$, ein Ausdruck, den man fallen lassen kann, da sich dieses Verhalten von $f(x)$ in anderer Weise charakterisiren läfst (vgl. Nr. 7, IV).

In ähnlicher Weise wird man Formeln, wie

$$\lim_{x=a-0} f(x) = b$$

erklären, wobei angenommen ist, dafs die unabhängige Veränderliche x sich steigend dem Grenzwerthe a nähert, d. h. dafs jeder positiven Zahl δ mindestens ein Werth x_2 von x entspricht, derart, dafs

$$a - \delta < x_2 < a.$$

Die Formel

$$\lim_{x=a} f(x) = b$$

endlich bedeutet, dafs jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ zugeordnet werden kann, derart, dafs

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

für alle der Veränderlichen x gemäfs ihrer Definition zukommenden Werthe, welche der Bedingung Genüge leisten:

$$|x - a| < \delta.$$

Ist eine eindeutige Function $y = f(x)$ für Werthe von x erklärt, die jede positive Zahl überschreiten, so kann, wie wir schon im VII. Abschnitte erfahren haben, $f(x)$ sich einem endlichen Grenzwerthe b nähern, auch kann sie den Grenzwerth $+\infty$ oder $-\infty$ haben. Die Formel

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = b$$

bedeutet, dafs jeder positiven Zahl ε eine Zahl $G>0$ zugeordnet werden kann, derart, dafs

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

für alle der Veränderlichen x gemäfs ihrer Definition zukommenden Werthe, welche $> G$ sind. Den Sinn der Formeln

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{oder} \quad = -\infty,$$

kann man unmittelbar aus den Angaben von VII. 2 entnehmen. Ebensowenig wird es einer Schwierigkeit begegnen, sich die Bedeutung von Formeln, wie

$$\lim_{x=-\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x=\infty} f(x) = b,$$

klar zu machen. Die letztere besagt, dafs zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $G > 0$ gehört, derart, dafs

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

wenn nur $|x| > G$.

Die ausdrückliche Berücksichtigung aller im Vorstehenden aufgezählten Grenzübergänge der unabhängigen Veränderlichen x würde die folgenden Erörterungen weitläufig gestalten. Sie ist aber nicht nöthig, da man das über einen Grenzübergang Gesagte unmittelbar auf alle anderen übertragen kann. Durch lineare Substitutionen für x läfst sich die Zurückführung der Grenzübergänge auf einander systematisch herstellen. So reducirt man alle einseitigen Grenzübergänge auf den Fall

$$\lim x' = a' + 0$$

durch eine der Substitutionen

$$x = -x', \quad x' = \frac{1}{x - a'}, \quad x' = \frac{1}{a' - x}$$ (vgl. Nr. 9. III).

Ist $f(x)$ erklärt für alle x im Intervalle $a < x \leq a + d$ und bei $\lim x = a + 0$ ein Grenzwerth von $f(x)$ vorhanden, so bezeichnet man denselben oft mit $f(a + 0)$. Aehnlich versteht man unter $f(a - 0)$ $\lim f(x)$ bei $x = a - 0$, unter $f(+\infty)$ $\lim f(x)$ bei $x = +\infty$, unter $f(-\infty)$ $\lim f(x)$ bei $x = -\infty$.

Beispiele. 1.) „Beim stetigen Grenzübergange $\lim x = +\infty$ ist $\lim a^x = +\infty$ oder 0, je nachdem $a \gtrless 1$." — Wenn $a > 1$, setze man $a = 1 + d$ $(d > 0)$ und bemerke nach VIII. 8, dafs $a^x > 1 + xd$. Man hat somit $a^x > G$ wenn $x > (G - 1) : d$, was auch die positive Zahl G sein mag. — Wenn $0 < a < 1$, setzt man $a = 1 : (1 + d)$ $(d > 0)$ und findet $a^x < 1 : (1 + xd)$, so dafs $a^x < \varepsilon$, wenn

$$x > (1 - \varepsilon) : d\varepsilon.$$

Mit diesem Satze identisch ist der folgende: „Beim stetigen Grenzübergange $\lim x = -\infty$ ist $\lim a^x = 0$ oder $+\infty$, je nachdem $a \gtrless 1$."

2.) Bei $\lim x = +\infty$ ist $\lim x^\mu = +\infty$ oder 0, je nachdem $\mu >$ oder < 0. Bei $\lim x = 0$ ist $\lim x^\mu = 0$ oder $+\infty$, je nachdem $\mu >$ oder < 0.

3.) Es ist

$$\lim_{x=+\infty} {}^B\log x = +\infty, \quad \lim_{x=+0} {}^B\log x = -\infty.$$

Denn für $x > B^G$ ist $\log x > G$, für $0 < x < B^{-G}$ ist

$$\log x < -G.$$

Im Anschlusse an diese Formeln ist festgesetzt worden:

$${}^B\log 0 = \infty, \qquad {}^B\log \infty = \infty.$$

Der Sinn der Definitionen ist in Nr. 4 angegeben; ihre Begründung läfst sich hier nicht vollständig anführen, indem die Function ${}^B\log x$ bisher nur für positive x erklärt ist. Man pflegt nämlich sonst $f(a) = \infty$ zu setzen, wenn

$$\lim |f(x)| = +\infty$$

bei

$$\lim x = a \pm 0;$$

$f(\infty) = b$ (endlich), wenn

$$\lim f(x) = b \text{ bei } \lim x = \infty,$$

$f(\infty) = \infty$, wenn

$$\lim |f(x)| = +\infty \quad \text{bei} \quad \lim x = \infty.$$

6. Der wichtigste Fall, in welchem die Existenz eines Grenzwerthes unmittelbar sich ergiebt, ist in dem folgenden Satze ausgesprochen.

Satz. „Wenn die eindeutige Function $f(x)$, während x fallend oder steigend sich dem Grenzwerthe a nähert, ohne ihn je zu erreichen, niemals abnimmt (zunimmt), jedoch nicht beständig derselben Zahl gleich bleibt, so existirt für $f(x)$ immer ein Grenzwerth beim Grenzübergange

$$\lim x = a \pm 0.$$

Und zwar ist die obere (untere) Grenze der Veränderlichen $y = f(x)$ dieser Grenzwerth. Er ist also $+\infty$ $(-\infty)$, wenn $f(x)$ Werthe annehmen kann, gröfser (kleiner) als irgend eine gegebene positive (negative) Zahl. Wenn aber alle Werthe von $f(x)$ unter (über) einer bestimmten Zahl A liegen, so ist er endlich und gröfser (kleiner) als jeder derselben."

Beweis. Wir nehmen an, die der unabhängigen Veränderlichen ertheilten Werthe liegen im Intervalle

$$(a, a + d) \qquad d > 0.$$

Nach Nr. 1 haben die ihnen zugehörigen Werthe von $f(x)$, welche bei abnehmenden x nicht zunehmen sollen, eine obere Grenze. Ist sie $+\infty$, so giebt es zu jeder Zahl $G > 0$ mindestens einen Werth x_1, derart, dafs $f(x_1) > G$. Und da neben $a < x < x_1$

$$f(x) \geqq f(x_1) > G,$$

so folgt

$$\lim_{x=a+0} f(x) = +\infty.$$

Wenn aber sämmtliche $f(x) < A$, so ist ihre obere Grenze eine Zahl g, hier offenbar gröfser als jeder Werth von $f(x)$. Zugleich entspricht jeder Zahl $\varepsilon > 0$ mindestens ein Werth x_1, derart, dafs

$$f(x_1) > g - \varepsilon.$$

Daraus folgt, wegen $f(x) \geqq f(x_1)$ für $a < x < x_1$,

$$0 < g - f(x) < \varepsilon$$

für alle $a < x < x_1$, d. i.

$$\lim f(x) = g,$$

bei

$$\lim x = a + 0.$$

Beispiel. „Ist

$$f_1 = \sqrt{a}, \qquad f_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$$

und

$$f_{n+1} = \sqrt{a + f_n} \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

worin a und sämmtliche Wurzeln positiv, so existirt für f_n bei $\lim n = +\infty$ ein endlicher Grenzwerth b." Denn die f_n wachsen mit n. Es ist

$$f_1 < f_2$$

und wenn

$$f_{n-1} < f_n,$$

so ist

$$a + f_{n-1} < a + f_n,$$

also

$$f_n < f_{n+1}.$$

Dabei ist

$$f_n < 1 + \sqrt{a}.$$

Das ist richtig für $n = 1$. Setzen wir nun die Relation auch als bestehend voraus, so folgt

$$a + f_n < 1 + \sqrt{a} + a < (1 + \sqrt{a})^2,$$

also auch

$$f_{n+1} < 1 + \sqrt{a}.$$

Somit ist $\lim f_n$ bei $\lim n = +\infty$ eine endliche Zahl $b > f_n$, welche wir in Nr. 12 bestimmen werden.

Weitere Beispiele für die Anwendung dieses Satzes s. X. 4, 12.

7. Der vorstehende Satz gestattet uns, die oben aufgeworfene Frage zu beantworten, was wir in jedem Falle über die Werthe einer eindeutigen Function $f(x)$ aussagen können, wenn sie für solche Werthe von x definirt ist, die einem Grenzwerthe z. B. fallend sich nähern. Es sei also $f(x)$ definirt für Werthe von x im Intervalle $(a, a + d)$ die sich dem Werthe a unbegrenzt nähern: $a < x < a + d$. x_0 bedeute einen beliebigen Werth innerhalb $(a, a + d)$. Die Veränderliche $y = f(x)$ hat im Intervalle $a < x < x_0$

eine obere Grenze, wobei nur zwei Fälle eintreten können. Entweder ist sie, wie nahe auch x_0 an a gewählt wird, stets $+\infty$ oder x_0 kann so angesetzt werden, dafs sie eine endliche Zahl $g(x_0)$ ist. Im letzteren Falle mufs, wie aus der Definition der oberen Grenze unmittelbar hervorgeht, auch in jedem Intervalle $(a, x'_0) - a < x'_0 < x_0$ — die obere Grenze von y endlich sein und zwar kann sie unmöglich gröfser als $g(x_0)$ sein.[5]) Denken wir uns x_0 veränderlich, so müssen wir nun schliefsen

$$g(x'_0) \leq g(x_0) \qquad a < x'_0 < x_0.$$

Die Function $g(x_0)$ nimmt also bei abnehmenden x_0 niemals zu, hat somit nach Nr. 6 beim Grenzübergange $\lim x_0 = a + 0$ einen Grenzwerth, der eine endliche Zahl O oder $-\infty$ sein kann. Wir müssen nun nachsehen, wie in den bisher unterschiedenen drei Fällen die Werthe von $f(x)$ selbst sich verhalten. In dem ersten gehört zu jeder positiven Zahl G eine Zahl $\delta > 0$, derart, dafs es in jedem Intervalle (a, x_0), wo $a < x_0 < a + \delta$, mindestens einen Werth x_1 von x giebt, wofür $f(x_1) > G$. Im zweiten Falle wissen wir, dafs jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ entspricht, derart, dafs

$$O + \varepsilon > g(x_0) \geq O,$$

wenn nur

$$a < x_0 < a + \delta.$$

Daneben hat man für $a < x < x_0$

$$g(x_0) \geq f(x),$$

jedoch für mindestens einen Werth x innerhalb des Intervalles (a, x_0)

$$f(x_1) > g(x_0) - \varepsilon.$$

Man schliefst daraus: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\delta > 0$ derart, dafs

$$f(x) < O + \varepsilon,$$

wenn nur

$$a < x < a + \delta;$$

dafs es jedoch in jedem Intervalle (a, x_0), wo

$$a < x_0 < a + \delta,$$

mindestens einen Werth von $x = x_1$ giebt, wofür

$$f(x_1) > O - \varepsilon.$$

Man wird sogleich bemerken, dafs wenn überhaupt eine Zahl O von der angegebenen Beschaffenheit existirt, es nur eine geben kann. Denn hätte O' die nämlichen Eigenschaften wie O, so würde unmittelbar folgen $|O - O'| < 2\varepsilon$, was auch $\varepsilon > 0$ sein mag, d. i. $O = O'$ (VII. 7). Im dritten Falle, wo $\lim g(x_0) = -\infty$, gehört zu jeder Zahl $-G < 0$ eine Zahl $\delta > 0$, derart, dafs

$$g(x_0) < -G$$

für alle

$$a < x_0 < a + \delta.$$

Man findet somit auch

$$f(x) < -G$$

für

$$a < x < a + \delta;$$

also ist hier

$$\lim_{x=a+0} f(x) = -\infty.$$

Es erhellt unmittelbar, dafs aus dem Verhalten von $f(x)$ nach den drei angegebenen Fällen, aufser denen andere nicht möglich sind, auf das von $g(x_0)$ zurückgeschlossen werden kann. Auf diese Art gelingt es oft, O zu bestimmen.

Ganz ähnlich wäre die Untersuchung verlaufen, wenn wir an Stelle der oberen Grenze $g(x_0)$ von y die untere $k(x_0)$ betrachtet hätten. Es würden sich dann folgende Fälle herausgestellt haben. Entweder

1) Es gehört zu jeder Zahl $-G > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, derart, dafs in jedem Intervalle (a, x_0), wo $a < x_0 < a + \delta$, mindestens ein Werth x_1 von x vorkommt, wofür

$$f(x_1) < -G.$$

Oder

2) Es existirt eine Zahl U von der folgenden Eigenschaft. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\delta > 0$, derart, dafs

$$f(x) > U - \varepsilon$$

für alle

$$a < x < a + \delta,$$

dafs es jedoch in jedem Intervalle (a, x_0), wo

$$a < x_0 < a + \delta,$$

mindestens einen Werth x_1 von x giebt, wofür

$$f(x_1) > U + \varepsilon.$$

Oder

3) Es ist

$$\lim_{x=a+0} f(x) = +\infty.$$

Wir finden zunächst: Wenn die Zahlen O und U einander gleich sind, so hat $f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ einen endlichen Grenzwerth und zwar ist es der gemeinsame Werth derselben. Und umgekehrt: Ist $\lim f(x) = b$ (endlich) bei $\lim x = a + 0$, so sind

$$O = U = b$$

zu setzen. Beide Sätze ergeben sich unmittelbar.

Scheiden wir die Fälle, in denen $f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ einen Grenzwerth besitzt, als etwas bereits Bekanntes aus, so bleiben noch vier andere übrig, in denen nach dem Vorstehenden ein solcher nicht vorhanden sein kann.

I. $f(x)$ ist für alle Werthe von x, welche in das Intervall $(a, a + d)$ fallen, zwischen zwei gegebenen Zahlen gelegen $(A > f(x) > B)$ und es existiren zwei Zahlen

$$A \geqq O > U \geqq B,$$

welche die oben erwähnten Eigenschaften haben. Nach dem Vorschlage des Entdeckers derselben, P. du Bois-Reymond,[5] mögen sie die Unbestimmtheitsgrenzen von $f(x)$ beim Grenzübergange $\lim x = a + 0$ und zwar O die obere, U die untere heifsen. $O - U$ wird als der Sprung von $f(x)$ für $\lim x = a + 0$ bezeichnet.

II. (III.) Die Werthe von $f(x)$ sind in keinem Intervalle $(a, x_0) - a < x_0$ — endlich. Wenn jedoch für

$$a < x \leqq a + d \qquad f(x) > B \qquad (< A),$$

so existirt eine bestimmte untere (obere) Unbestimmtheitsgrenze

$$U \geqq B \qquad (O \leqq A) \quad \text{bei} \quad \lim x = a + 0.$$

Der Gleichförmigkeit wegen sagt man nun, es sei die obere (untere) Unbestimmtheitsgrenze bei

$$\lim x = a + 0 \qquad + \infty\ (-\infty).$$

IV. In jedem Intervalle (a, x_0) ist die obere Grenze von $f(x)$ $+\infty$, die untere $-\infty$. Man sagt dann, es sei bei $\lim x = a + 0$ die obere Unbestimmtheitsgrenze $+\infty$, die untere $-\infty$. — Hierher gehört namentlich der Fall des „Unbestimmt-unendlich-werdens" von $f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ (s. Nr. 5).

Nach Einführung der unendlichen Unbestimmtheitsgrenzen kann man ohne Beschränkung behaupten: „Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Grenzwerthes $\lim f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ ist das Zusammenfallen der Unbestimmtheitsgrenzen für $\lim x = a + 0$."

Ein einfaches Beispiel des Falles I. bietet dar die Function

$$f(n) = (-1)^n \left\{1 + \frac{1}{n}\right\},$$

wo n jede ganze positive Zahl sein kann. Hier sind die Unbestimmtheitsgrenzen bei $\lim n = +\infty$ $+1$ und -1. Für die Function $(-1)^n n$ sind sie bei dem nämlichen Grenzübergange $+\infty$ und $-\infty$. Für

$$f(n) = n\,(1 + (-1)^n)$$

endlich sind eben dieselben $+\infty$ und 0.

8. Wir gehen nun zur Untersuchung der Bedingung über, unter welcher die eindeutige Function $f(x)$ bei einem bestimmten Grenzübergange der unabhängigen Veränderlichen, etwa bei $\lim x = a + 0$, einen endlichen Grenzwerth b besitzt. Da nun zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gehört, derart, dafs

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{wenn nur} \quad a < x < a + \delta,$$

so schliefsen wir, wie in VII. 3, dafs

$$|f(x') - f(x)| < 2\varepsilon$$

sein mufs für alle der Veränderlichen x zukommenden Werthe, die der Relation $a < x' < x < a + \delta$ genügen.

Satz. „Die notwendige und hinreichende Bedingung, dafs $f(x)$ beim Grenzübergange $\lim x = a + 0$ einen endlichen Grenzwerth besitze, besteht in Folgendem. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ mufs sich eine Zahl $\delta > 0$ bestimmen lassen, derart, dafs für alle der unabhängigen Veränderlichen zukommenden Werthe x, x' innerhalb des Intervalles $(a, a + \delta)$

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$"

Dabei möge x' den kleineren der beiden Werthe bezeichnen. Aehnlich lautet die Bedingung für andere Grenzübergänge der unabhängigen Veränderlichen. Einen Fall, wo $\lim x = + \infty$, haben wir VII. 3 und 11 angeführt.[7])

Dafs die genannte Bedingung auch hinreichend sei, ergiebt sich aus der Erörterung VII. 11, wo die Existenz des Grenzwerthes durch Entwickelung desselben in die systematische Form nachgewiesen wurde.

Im Anschlusse an die vorige Nummer können wir den Beweis auch so führen, dafs wir zeigen, dafs in dem vorliegenden Falle die Unbestimmtheitsgrenzen O, U von $f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ endlich und einander gleich sein müssen. Dafs sie endliche Zahlen seien, erhellt sofort. Es entspricht aber jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, so dafs für alle $a < x < a + \delta$

$$U - \varepsilon < f(x) < O + \varepsilon$$

und wenn x_0 irgend einen Werth innerhalb des Intervalles $(a, a + \delta)$ bedeutet, so mufs es zwei Zahlen x_1, x_2 innerhalb (a, x_0) geben, wofür

$$f(x_1) > O - \varepsilon; \qquad f(x_2) < U + \varepsilon.$$

Da nun zufolge Voraussetzung auch angenommen werden kann, dafs für $a < x' < x < a + \delta$

$$f(x) - \varepsilon < f(x') < f(x) + \varepsilon;$$

so folgt, wenn nach Fixirung von x_0 zuerst x_1 für x, dann ein im Intervalle (a, x_1) vorkommender Werth x_3 von derselben Beschaffenheit wie das obige x_2 für x' eingesetzt wird:

$$f(x_1) - \varepsilon < f(x_3)$$

und

$$O - 2\varepsilon < U + \varepsilon$$

also

$$0 \leqq O - U < 3\varepsilon,$$

d. i.

$$O = U \qquad \text{(VII. 7)}.$$

9. In der Praxis gilt der Satz der vorigen Nummer als das äufserste Mittel, um sich von der Existenz eines endlichen Grenzwerthes zu überzeugen. In der That kommt man oft mit einfacheren Sätzen durch. Aufser dem Satze in Nr. 6 sind zunächst noch die folgenden zu erwähnen.

I. „Hat $f(x)$ bei irgend einem Grenzübergange der unabhängigen Veränderlichen x einen endlichen Grenzwerth b, so haben die Functionen $f(x) + k$, $kf(x)$ (wo k eine von Null verschiedene Constante bezeichnet) beim nämlichen Grenzübergange von x bez. den Grenzwerth $b + k$, kb. — Ist $\lim f(x)$ unendlich, so haben die genannten Functionen auch einen unendlichen Grenzwerth."

„Die Function $1 : f(x)$ hat, wenn b nicht Null ist, den Grenzwerth $1 : b$. Ist $b = 0$, jedoch in der Art, dafs die Werthe von $f(x)$ schliefslich dasselbe Vorzeichen besitzen (d. i. wenn $\lim f(x) = +0$ oder -0), so ist $\lim (1 : f(x))$ unendlich. Wenn $|f(x)|$ einen unendlichen Grenzwerth hat, so ist $\lim (1 : f(x)) = 0$."

„Hat bei demselben Grenzübergange von x, wie oben, auch die Function $g(x)$ einen endlichen Grenzwerth c, so nähern sich die Functionen $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ bezüglich den Grenzwerthen $b + c$, bc. — Die Function $f(x) + g(x)$ hat einen unendlichen Grenzwerth, wenn einer der Grenzwerthe $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ endlich, der andere unendlich ist und wenn diese beiden Grenzwerthe entweder $+\infty$ oder $-\infty$ sind. Die Function $f(x) \cdot g(x)$ hat einen unendlichen Grenzwerth, wenn einer der Grenzwerthe $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ unendlich, der andere nicht Null ist."

Diese Sätze ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen in Nr. 5. Einige sind für einen speciellen Grenzübergang von x schon in VII. 4 gezeigt, die Beweise gelten

indefs auch für den allgemeinen Fall. — Wir schliefsen daraus weiter:

„Die Function $g(x) : f(x)$ hat einen Grenzwerth, wenn die Grenzwerthe $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ nicht zugleich Null oder zugleich unendlich sind. Wird diese Annahme ausgeschlossen, so kann man behaupten: es ist

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{c}{b},$$

falls b nicht 0 ist; er ist 0, wenn $\lim f(x)$ unendlich; dagegen unendlich wenn $\lim g(x)$ unendlich ist, oder $\lim f(x)$ Null ist und zwar in der Art, dafs $f(x)$ schliefslich ein bestimmtes Vorzeichen hat."

Aus dem Vorstehenden kann man entnehmen, dafs das Verhalten von $f(x) + g(x)$ bei einem Grenzübergange von x, der für diese Functionen entgegengesetzt unendliche Grenzwerthe liefert, Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein mufs. Dasselbe gilt für $f(x) \cdot g(x)$, wenn der eine der beiden Grenzwerthe $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ unendlich, der andere 0 ist — und endlich für den Quotienten $g(x) : f(x)$, falls die genannten Grenzwerthe entweder beide 0, oder beide unendlich sind.

Man leitet ferner ohne Mühe den Satz ab:

„Für einen und denselben Grenzübergang der unabhängigen Veränderlichen x sollen die Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ $\ldots f_m(x)$ bezüglich die endlichen Grenzwerthe $b_1, b_2 \ldots b_m$ besitzen. Es sei ferner $R(y_1, y_2 \ldots y_m)$ eine rationale Function der Veränderlichen $y_1, y_2 \ldots y_m$. Dann hat man beim genannten Grenzübergang von x

$$\lim R\,(f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)) = R(b_1, b_2, \ldots b_m),$$

wenn der Nenner von R durch die Substitution $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2 \ldots y_m = b_m$ nicht den Werth 0 annimmt." — Wird der Nenner durch die genannte Substitution Null, der Zähler aber nicht, und erhält der erstere schliefslich gleichbezeichnete Werthe, so ist $\lim R\,(f_1(x) \ldots)$ unendlich.

II. Wir schliefsen an das obige zwei Sätze über endliche Grenzwerthe, die uns in specialisirter Fassung in VII. 5 als Definitionen begegnet sind.

1. „Es ist $\lim f(x)$ (z. B. für den Grenzübergang $\lim x = a + 0$) gröfser (kleiner) als eine bestimmte Zahl k, wenn eine positive (negative) Zahl ϱ existirt, derart, dafs für alle der Veränderlichen x zukommenden Werthe, die in einem bestimmten Intervalle $(a, a + d) - d > 0$ — liegen:

$$f(x) - k > \varrho \qquad (< \varrho)$$

ist.“

„Weifs man, dafs für alle hierher gehörigen x

$$a < x < a + d \qquad f(x) > k \ (< k),$$

so kann man, falls $\lim f(x)$ existirt, nur schliefsen:

$$\lim f(x) \geqq k \ (\leqq k).“$$

2. „Es ist $\lim f(x) > \lim g(x)$ (beide Grenzwerthe auf denselben Grenzübergang von x bezogen), falls eine positive Zahl ϱ existirt, derart, dafs für alle hierher gehörigen x

$$a < x < a + d \qquad f(x) - g(x) > \varrho$$

ist.“

„Weifs man, dafs für die nämlichen Werthe von x

$$f(x) > g(x),$$

so kann man, die Existenz der Grenzwerthe vorausgesetzt, nur schliefsen:

$$\lim f(x) \geqq \lim g(x).“$$

Die Sätze ergeben sich unmittelbar. Ist

$$\lim f(x) = b, \qquad \lim g(x) = c$$

bei demselben Grenzübergange $\lim x = a + 0$, so hat man zu jedem $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\varrho$ ein $\delta > 0$, derart dafs

$$a < x < a + \delta \qquad f(x) < b + \varepsilon \qquad g(x) > c - \varepsilon,$$

also

$$\varrho < f(x) - g(x) < b - c + 2\varepsilon,$$

somit

$$0 < b - c.$$

U. s. w.

III. Aus einer Grenzwerthformel kann man durch Substitution für die unabhängige Veränderliche neue Formeln ableiten nach dem folgenden Satze:

„Es sei bei einem bestimmten Grenzübergange von y z. B. $\lim y = b + 0$, $\lim \varphi(y)$ vorhanden. Ordnet man die soeben benutzten Werthe von y einer neuen Veränderlichen x zu, sodafs y als eindeutige Function $f(x)$ von x erscheint, und zwar in der Art, dafs $\lim f(x) = b$ etwa für $\lim x = a + 0$; so besteht die Relation

$$\lim_{y=b+0} \varphi(y) = \lim_{x=a+0} \varphi\{f(x)\}.“$$

Beweis. Es sei z. B. $\lim \varphi(y)$ eine endliche Zahl c. Nach Voraussetzung gehört zu jeder Zahl $\eta > 0$ eine Zahl $\varepsilon > 0$, derart, dafs

$$|c - \varphi(y)| < \eta$$

für diejenigen Werthe $b < y < b + \varepsilon$, die vermöge der Definition von y in Betracht kommen. Aber es ist auch $0 < y - b < \varepsilon$, wenn nur $a < x < a + \delta$. Man hat somit

$$|c - \varphi\{f(x)\}| < \eta,$$

wenn nur $a < x < a + \delta$, womit der Satz bewiesen ist.

Beispiele für die Anwendung des Satzes s. Nr. 10. I. – Häufig gebraucht man einen speciellen Fall desselben, vgl. Nr. 12.

10. Einige Bedingungen, unter welchen in den in der vorigen Nummer aufgeführten Ausnahmefällen Grenzwerthe existiren. Es handelt sich also um das Verhalten von Differenzen $f(x) - g(x)$, in denen beide Glieder gleichbezeichnete unendliche Grenzwerthe haben, und von Quotienten $f(x) : g(x)$, in denen Zähler und Nenner entweder beide den Grenzwerth 0, oder beide einen unendlichen Grenzwerth haben. Der a. a. O. miterwähnte Fall über ein Product $f(x) \cdot g(x)$ läfst sich sofort auf den zuletzt genannten zurückführen.

I. Ist der erwähnte Ausdruck $f(x) - g(x)$, $f(x) : g(x)$ eine algebraische Function von x, so existirt bei jedem einseitigen Grenzübergange der unabhängigen Veränderlichen x ein Grenzwerth für ihn. Der Nachweis des allgemeinen Satzes liegt aufserhalb des Rahmens dieser Vorlesungen. Man gelangt dazu durch Umformung des gege-

benen Ausdruckes — er sei $F(x)$ und zu betrachten bei $\lim x = a + 0$ — in dem Sinne, dafs für alle $a < x < a + d$ $F(x) = G(x)$ gesetzt werden kann.[8]) Einige Beispiele mögen diesen Gedanken erläutern.

1) Es sei

$$F(x) = \sqrt{x^2 + a} - x,$$

(die Wurzel absolut genommen) und $\lim x = +\infty$. Da für endliche x

$$\sqrt{x^2 + a} - x = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a} + x},$$

so folgt nach Nr. 9

$$\lim_{x = +\infty} F(x) = 0.$$

2) $F(x) = \dfrac{x^m - a^m}{x - a}$ für $\lim x = a \pm 0$, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet. Da nach VIII. 1 für $x \gtrless a$

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} a + x^{m-2} a^2 + \ldots + a^{m-1},$$

so ergiebt sich nach Nr. 9 unmittelbar:

(a) $$\lim_{x = a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = m a^{m-1}.$$

Mittelst dieser Formel kann nach III. in Nr. 9 der Grenzwerth von

$$\left(x^{\frac{m}{n}} - a^{\frac{m}{n}} \right) : (x - a)$$

bei $\lim x = a$ berechnet werden, unter a eine positive und unter m, n ganze positive Zahlen verstanden. Setzt man hier

$$x = y^n \qquad a = b^n,$$

so geht der Ausdruck in

$$(y^m - b^m) : (y^n - b^n)$$

über. Nun folgt aus (a) unmittelbar

$$\lim_{y = b} \frac{y^m - b^m}{y^n - b^n} = \lim_{y = b} \left\{ \frac{y^m - b^m}{y - b} : \frac{y^n - b^n}{y - b} \right\} = \frac{m}{n} b^{m-n}$$

und hieraus durch die Substitution $y = \sqrt[n]{x}$, $b = \sqrt[n]{a}$, indem

$$\lim_{x = a} \sqrt[n]{x} = b$$

nach Nr. 12,

$$\lim_{x = a} \frac{x^{\frac{m}{n}} - a^{\frac{m}{n}}}{x - a} = \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n} - 1}.$$

Man hat somit für rationale Werthe von μ die Formel

(b) $$\lim_{x=a} \frac{x^\mu - a^\mu}{x - a} = \mu a^{\mu-1} \qquad (a > 0);$$

denn sie gilt, wie sich unmittelbar ergiebt, auch für negative μ. – Nimmt man $a = 1$ und setzt $x = 1 + \xi$, so findet man aus (b)

(c) $$\lim_{\xi=0} \frac{(1+\xi)^\mu - 1}{\xi} = \mu.$$

Bezeichnen $F(x)$, $G(x)$ ganze Functionen von x vom m^{ten} bez. n^{ten} Grade

$$F(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m, \quad G(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b^n,$$

so hat man

(3) $$\lim_{x=+\infty} F(x) = +\infty, \quad \lim_{x=-\infty} F(x) = +\infty \text{ oder } -\infty,$$

je nachdem m gerade oder ungerade.

(4) $$\lim_{x=+\infty} [F(x) : G(x)] = +\infty,\ 1,\ 0$$

je nachdem $m >, =, < n$ ist.

Die Formeln ergeben sich unmittelbar durch die Umformungen:

$$F(x) = x^m \left\{1 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_m}{x^m}\right\}, \quad G(x) = x^n \left\{1 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n}\right\}.$$

Man wird aus den vorstehenden Beispielen entnehmen, dafs es bei Untersuchung eines Functionsquotienten $f(x) : g(x)$ überhaupt von Vortheil sein kann, denselben in folgender Art umzuwandeln:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) : f_1(x)}{g(x) : g_1(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

worin die Functionen $f_1(x)$ und $g_1(x)$ so gewählt sind, dafs bei dem in Betracht gezogenen Grenzübergang von x die Quotienten $f(x) : f_1(x)$, $g(x) : g_1(x)$ je einen von 0 und $\pm\infty$ verschiedenen Grenzwerth besitzen.

II. Ein allgemeines Verfahren, auf die Existenz eines Grenzwerthes z. B. bei $\lim x = a + 0$ zu schliefsen, bietet der folgende Satz dar:

„Gelingt es, zwei Functionen $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ zu finden, so dafs für alle $a < x < a + d$ $(d > 0)$

$$\Phi(x) < F(x) < \Psi(x)$$

und es ist

$$\lim \Phi(x) = \lim \Psi(x) = b$$

(endliche Zahl) für $\lim x = a + 0$, so ist auch $\lim F(x) = b$. — Hat man $\Phi(x) < F(x)$ und $\lim \Phi(x) = +\infty$, so ist auch $\lim F(x) = +\infty$, und wenn $F(x) < \Psi(x)$ gefunden ist und $\lim \Psi(x) = -\infty$, so ist auch $\lim F(x) = -\infty$."

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus der Relation

$$\Phi(x) - b < F(x) - b < \Psi(x) - b.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\delta > 0$, so daſs für

$$a < x < a + \delta \quad | \Phi(x) - b | < \varepsilon$$

und $| \Psi(x) - b | < \varepsilon$, also auch $| F(x) - b | < \varepsilon$ ist. U. s. w.

Nach dieser Methode läſst sich die Formel (c) für beliebige reelle Exponenten μ erweisen. Man hat nach VIII. 8, falls $\mu > 0$

$$1 + \frac{\mu\xi}{1+\xi} < (1+\xi)^{\mu} < \frac{1}{1-\mu\xi}$$

(wenn nur $\xi < 1 : \mu$, was hier immer angenommen werden darf). Daraus folgt simultan

$$\frac{\mu}{1+\xi} \lessgtr \frac{(1+\xi)^{\mu} - 1}{\xi} \lessgtr \frac{\mu}{1-\mu\xi} \quad \xi \gtrless 0.$$

Da nun

$$\lim_{\xi=0} \frac{\mu}{1+\xi} = \lim_{\xi=0} \frac{\mu}{1-\mu\xi} = \mu,$$

so ergiebt sich

(d) $$\lim_{\xi=0} \frac{(1+\xi)^{\mu} - 1}{\xi} = \mu.$$

Falls $\mu < 0$, geht man ebenso an der Relation vor:

$$1 + \mu\xi < (1+\xi)^{\mu} < \frac{1}{1 - \frac{\mu\xi}{1+\xi}}.$$

Durch die Substitution $\xi = \frac{x-a}{a}$ in (d) gelangt man zur analogen Verallgemeinerung von (b).

Ein anderes Beispiel in Nr. 12.

11. Fortsetzung.

III. Satz. „1) Es sei n eine ganze positive Zahl, die unbegrenzt wächst. Wenn die eindeutige Function $\varphi(n)$ von einem Werthe $n = n_1$ an mit n beständig wächst (abnimmt), somit bei $\lim n = +\infty$ nach Nr. 6 einen Grenzwerth hat,

der unendlich sein soll, so folgt aus der Existenz des Grenzwerthes

$$\lim_{n=+\infty} \frac{f(n+1)-f(n)}{\varphi(n+1)-\varphi(n)} = K,$$

worin $f(n)$ ebenfalls eine eindeutige Function von n bedeutet, — dafs auch für den Bruch $f(n):\varphi(n)$ ein Grenzwerth bei $\lim n = +\infty$ vorhanden sei und zwar, dafs er gleich K sei."

„2) Derselbe Satz gilt, wenn die eindeutigen Functionen $f(n)$, $\varphi(n)$ für $\lim n = +\infty$ je den Grenzwerth 0 haben und $\varphi(n)$ von $n = n_1$ an mit n beständig wächst (abnimmt).

Beim Beweise genügt es anzunehmen, dafs $\varphi(n)$ mit n beständig wachse und dafs K nicht das Zeichen — habe. Dann sind für den ersten Satz, auf den wir die folgende Entwickelung beschränken, zwei Fälle zu unterscheiden.

a) $K \geqq 0$. Nach Voraussetzung gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl G, derart dafs

$$\left| \frac{f(n+1)-f(n)}{\varphi(n+1)-\varphi(n)} - K \right| < \varepsilon \qquad n > G.$$

Daraus schliefst man, da $\varphi(n+1) > \varphi(n)$,

$$(K-\varepsilon)\,[\varphi(n+1)-\varphi(n)] < f(n+1)-f(n) < (K+\varepsilon)\,[\varphi(n+1)-\varphi(n)].$$

Nun sei m eine bestimmte ganze Zahl $> G$, so dafs wir in dieser Relation nach einander $n = m,\ m+1,\ \ldots\ m+r-1$ setzen können. Addirt man die so erhaltenen r Ungleichungen, so folgt

$$(K-\varepsilon)\,[\varphi(m+r)-\varphi(m)] < f(m+r)-f(m) < (K+\varepsilon)\,[\varphi(m+r)-\varphi(m)]$$

und

$$-\varepsilon[\varphi(m+r)-\varphi(m)] < f(m+r)-f(m)-K[\varphi(m+r)-\varphi(m)] < \varepsilon[\varphi(m+r)-\varphi(m)].$$

Da $\varphi(m)$ und $\varphi(m+r)$ als positiv vorausgesetzt werden können, so finden wir noch:

$$-\varepsilon\,\varphi(m+r) < f(m+r)-f(m)-K[\varphi(m+r)-\varphi(m)] < \varepsilon\,\varphi(m+r),$$

$$-\varepsilon < \frac{f(m+r)}{\varphi(m+r)} - K - \frac{f(m-K\varphi(m)}{\varphi(m+r)} < \varepsilon.$$

Wie grofs auch die Zahl m sein mag, so läfst sich doch wegen $\lim \varphi(n) = +\infty$ eine Zahl $\varrho > 0$ finden, derart dafs

$$\text{(a)} \qquad \frac{|f(m) - K\varphi(m)|}{\varphi(m+r)} < \varepsilon \quad \text{für } r > \varrho.$$

Man hat demnach

$$\text{(b)} \qquad \left| \frac{f(m+r)}{\varphi(m+r)} - K \right| < 2\varepsilon$$

oder $|f(n) : \varphi(n) - K| < 2\varepsilon$ für alle $n > m + \varrho$. Nun ist in der That der Zahl 2ε, die jede positive Zahl sein kann, die Zahl $m + \varrho$ zugeordnet, denn zunächst ergiebt sich m aus ε und mittelst m aus ε die Zahl ϱ. Somit hat man

$$\lim f(n) : \varphi(n) = K$$

für $\lim n = +\infty$.

b) $K = +\infty$. Es sei $0 < H < H'$. Zufolge Voraussetzung gehört zu $H' > 0$ eine Zahl G' derart, dafs für $n > G'$

$$f(n+1) - f(n) > H'\{\varphi(n+1) - \varphi(n)\},$$

woraus wie oben gefunden wird — $m > G'$ —

$$\text{(c)} \qquad f(m+r) - f(m) > H'\{\varphi(m+r) - \varphi(m)\}$$

$$\frac{f(m+r)}{\varphi(m+r)} > H' + \frac{f(m) - H'\varphi(m)}{\varphi(m+r)}.$$

Nun läfst sich eine Zahl $\varrho > 0$ angeben, so dafs

$$r > \varrho \qquad |f(m) - H'\varphi(m)| : \varphi(m+r) < H' - H;$$

demnach ist für alle $n > m + \varrho$

$$\frac{f(n)}{\varphi(n)} > H' - (H' - H) = H \quad \text{d. i.} \quad \lim \frac{f(n)}{\varphi(n)} = +\infty.$$

Zugleich sieht man aus (c), dafs $\lim f(n) = +\infty$, so dafs man auch so schliefsen könnte: Nach Satz (a) ist

$$\lim\{\varphi(n) : f(n)\} = 0,$$

also, da $\varphi(n) : f(n) > 0$,

$$\lim\{f(n) : \varphi(n)\} = +\infty.$$

Die vorstehenden Sätze lassen sich auf den Fall ausdehnen, dafs die unabhängige Veränderliche stetig über alle Grenzen wächst.

Satz 1.*). „Es seien zwei eindeutige Functionen $F(x$ $\Phi(x)$ für jeden endlichen Werth von $x \geq x_1$ definirt; d erstere sei in jedem Intervalle $(x_1, x_2) - x_2 > x_1$ — endlic während die letztere von $x = x_1$ an mit x zugleich b ständig wächst (abnimmt) und daher bei $\lim x = +$ einen Grenzwerth hat, der unendlich sein soll. Da folgt aus der Existenz des Grenzwerthes

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x+h) - F(x)}{\Phi(x+h) - \Phi(x)} = K,$$

worin h eine von 0 verschiedene Constante bedeutet, — da auch $F(x) : \Phi(x)$ bei $\lim x = +\infty$ einen Grenzwerth, u zwar gerade K, besitzt."

2.*) „Derselbe Satz gilt, wenn $F(x)$ und $\Phi(x)$ f $\lim x = +\infty$ beide dem Grenzwerthe 0 sich näher und $\Phi(x)$ von $x = x_1$ an mit x beständig wächst (a nimmt)." [9])

Der Beweis läfst sich mit Hilfe der oben gegebene Entwickelung liefern, wobei wir annehmen können, dafs $\Phi($ mit x beständig zunehme, K nicht das Vorzeichen — ha und $h > 0$ sei. Es sei x_0 eine beliebige Zahl: $h > x_0 \geq$ Man setze

$$f(n) = F(x_0 + nh) \qquad \varphi(n) = \Phi(x_0 + nh).$$

Beschränken wir uns wieder auf den ersteren Satz, wobei auch genügen wird, den Fall eines endlichen K näher zu b trachten. Wir finden sofort aus Satz 1., dafs

$$\lim_{n=+\infty} \frac{F(x_0 + nh)}{\Phi(x_0 + nh)} = K;$$

was aber nicht völlig ausreichen würde, um die Form

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x)}{\Phi(x)} = K$$

als richtig hinzustellen. Man hat vielmehr noch Folgend hinzuzufügen. Nach Voraussetzung gehört zu jeder Za $\varepsilon > 0$ eine Zahl $G > 0$, derart dafs

$$\text{(d)} \qquad \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{\Phi(x+h) - \Phi(x)} - K \right| < \varepsilon \qquad \text{für } x > G$$

Für $x = x_0 + nh$ ergiebt sich hieraus

$$\left| \frac{f(n+1) - f(n)}{\varphi(n+1) - \varphi(n)} - K \right| < \varepsilon,$$

wenn $x_0 + nh > G$, also was auch x_0 weiter sein mag, wenn $k > G : h$. Wir wählen nun die ganze Zahl $m > G : h$ und die in (a) vorkommende Zahl ϱ folgendermafsen. $f(m)$ nimmt, während x_0 das Intervall $(0, h)$ durchläuft, die Werthe $F(mh)$ bis $F(mh + h)$ an, welche nach Voraussetzung sämmtlich zwischen zwei endlichen Zahlen A_m, B_m liegen:

$$A_m < f(m) < B_m.$$

Somit ist wegen

$$\Phi(mh + h) > \varphi(m) > \Phi(mh)$$

$$A_m - K\Phi(mh + h) < f(m) - K\varphi(m) < B_m - K\Phi(mh).$$

Bezeichnet man mit P den gröfseren der absoluten Beträge der äufseren, von x_0 unabhängigen Glieder dieser Ungleichung, so ist

$$\frac{|f(m) - K\varphi(m)|}{\varphi(m + r)} < \frac{P}{\Phi(mh + rh)}.$$

Wählen wir nun die Zahl $\varrho > 0$ so, dafs für

(e) $$r > \varrho \quad 0 < \frac{P}{\Phi(mh + rh)} < \varepsilon;$$

so folgt zunächst wieder (b) d. i.

$$\left| \frac{f(n)}{\varphi(n)} - K \right| < 2\varepsilon \quad \text{für } n > m + \varrho.$$

Aber es ist auch

(f) $$\left| \frac{F(x)}{\Phi(x)} - K \right| < 2\varepsilon,$$

wenn nur $x > h(m + \varrho + 1)$. Ist nämlich x' ein Werth über der Zahl $h(m + \varrho + 1)$, und man setzt

$$x' = kh + x_0 \quad (0 \leq x_0 < h)$$

so mufs die ganze Zahl $k > m + \varrho$ sein. Da nun durch ε vermöge (d) die Zahl G, hierauf m durch die Forderung $m > G : h$, und endlich ϱ vermöge (e) durch ε und m bestimmt ist; so haben wir in (f) der beliebigen Zahl $2\varepsilon > 0$

die Zahl $h(m + \varrho + 1)$ zugeordnet. Nun erst sind wir rechtigt, die Formel anzusetzen:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x)}{\Phi(x)} = K.$$

Das vorstehende Beispiel ist besonders geeignet zu zei mit welcher Vorsicht man zu Werke zu gehen hat, um Existenz eines Grenzwerthes mit Sicherheit nachzuweise

Anwendung des Satzes 1*. Handelt es sich um Untersuc des Quotienten $\log x : x$ bei $\lim x = +\infty$, so setze man

$$F(x) = \log x, \quad \Phi(x) = x.$$

Da nun

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{\Phi(x+h) - \Phi(x)} = \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

für $\lim x = +\infty$, wie bald ersichtlich werden wird, den Gr werth 0 hat, so folgt, dafs auch $\log x : x$ bei $\lim x = +\infty$ e Grenzwerth hat. Und zwar ist

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

Man kann diese wichtige Formel auch durch einfachere Betrachtu ableiten. Sie ist nämlich identisch mit der folgenden:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty \quad (a > 1).$$

Läfst man x zunächst eine natürliche Zahl n sein, so hat $(a = 1 + d)$

$$a^n > 1 + nd + \frac{n(n-1)}{2} d^2, \quad \frac{a^n}{n} > \frac{n-1}{2} d^2,$$

woraus folgt

$$\lim_{n=+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

Und ist $n < x < n + 1$, so hat man

$$\frac{a^x}{x} > \frac{a^n}{n+1} = \frac{a^n}{n} : \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{m}{m+1} \cdot \frac{a^n}{n},$$

wenn $n > m > 1$. Nach dem Vorstehenden gehört zu jeder Z $G > 0$ eine Zahl $\mu > 0$, so dafs für $n > \mu$

$$\frac{m}{m+1} \frac{a^n}{n} > G,$$

so dafs für alle $x > \mu + 1$ $\quad \frac{a^x}{x} > G.$

Aus (h) ergiebt sich nach Nr. 9. III. wegen

$$\frac{a^x}{x^\mu} = \left\{\frac{\left(\frac{1}{a^\mu}\right)^x}{x}\right\}^\mu$$

$$\lim_{x=+\infty} \frac{a^x}{x^\mu} = +\infty \quad (a > 1, \quad \mu > 0). \tag{i}$$

Aus (g) leitet man durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$ ab:

$$\lim_{y=+0} y \log y = 0. \tag{k}$$

12. Stetige Functionen.

Definition: Die eindeutige Function $f(x)$, definirt für le Werthe x eines Intervalles $(a - d,\ a + d) - d > 0$ —, ifst für den endlichen Werth $x = a$ stetig, wenn i stetigem Grenzübergange

$$\lim x = a \pm 0 \quad \lim f(x) = f(a),$$

h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ mufs eine Zahl $\delta > 0$ ge-)ren, derart dafs

$$) \qquad |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

enn nur $|x - a| < \delta$.[10])

Es ist somit eine Vorbedingung der Stetigkeit von $f(x)$ r $x = a$, dafs $f(x)$ für $x = a$ definirt sei. Unstetig $f(x)$ für den Werth $x = a$ entweder, wenn die Function r $x = a$ nicht definirt ist (vgl. Nr. 4) oder im Falle dafs a) festgesetzt ist, wenn $f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ oder $a - 0$ inen Grenzwerth oder einen solchen besitzt, der von $f(a)$ rschieden ist. Unstetig für $x = a$ ist $f(x)$ also stets, enn $\lim f(x)$ bei $\lim x = a + 0$ oder $a - 0$ unendlich ist.[11]) an pflegt jedoch, falls wenigstens für

$$\lim x = a + 0 \ (a - 0) \quad \lim f(x) = f(a),$$

e Function $f(x)$ als stetig auf einer Seite des Werthes $= a$ zu bezeichnen. — Die hier erwähnten Grenzübergänge)n x sind sämmtlich als stetige zu verstehen. Insbesondere achte man, dafs die Stetigkeit von $f(x)$ für $x = a$ er-eischt, dafs die Relation (1) bestehe für alle Werthe von x ı Intervalle $(a - \delta,\ a + \delta)$, nicht etwa blofs für einen

Theil derselben. — Man kann $f(x)$ für $x = \infty$ (Nr. 4) stetig nennen, wenn $f(\infty)$ endlich und bei stetigem Grenzübergang

$$\lim x = \infty \qquad \lim (fx) = f(\infty)$$

ist.

Aus den Sätzen I. III. in Nr. 9 ergeben sich unmittelbar die folgenden:

„Ist $f(x)$ für $x = a$ stetig, so auch die Functionen $f(x) + k$, $kf(x)$. Die Function $1 : f(x)$ ist für $x = a$ dann und nur dann stetig, wenn $f(a)$ nicht Null ist."

„Ist auch $g(x)$ für $x = a$ stetig, so sind die Functionen $f(x) + g(x)$, $f(x)\,g(x)$ ebenfalls für $x = a$ stetig; die Function $g(x) : f(x)$ dann und nur dann, wenn $f(a)$ nicht Null ist."

Allgemein: „Jede rationale Function $R(y_1, y_2 \ldots y_n)$, worin für y_r eine für $x = a$ stetige Function $f_r(x)$ eingesetzt wird ($r = 1, 2 \ldots m$), ist selbst eine für $x = a$ stetige Function von x, wenn ihr Nenner durch die Substitution $y_r = f_r(a)$ nicht Null wird." — Insbesondere ist eine ganze rationale Function von x für jeden endlichen Werth des Argumentes stetig, eine gebrochene rationale Function von x sicher für jeden solchen Werth von x, durch den ihr Nenner nicht Null wird.

„Wenn $f(x)$ für $x = a$ stetig ist und $\varphi(y)$ für den Werth $y = f(a)$ ebenfalls stetig ist, so ist auch die Function $\varphi\{f(x)\}$ für $x = a$ stetig."

Wir bemerken ferner noch die speciellen Sätze:

1) Die Exponential-Function a^x ist für jeden endlichen Werth $x = x_0$ stetig. Es genügt $a > 1$ vorauszusetzen. Zunächst hat man

$$a^{x_0 + \xi} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\xi} - 1).$$

Nach VIII. 8 bestehen simultan die Relationen ($a = 1 + d$):

$$\xi \gtrless 0 \quad (1 + d)^{\xi} \lesseqgtr \frac{1}{1 - \xi d},$$

so daſs

$$(1 + d)^{\xi} - 1 \lesseqgtr \frac{\xi d}{1 - \xi d}$$

und

$$|(1 + d)^{\xi} - 1| < \frac{d \cdot |\xi|}{1 - d \cdot |\xi|}.$$

Man hat somit

$$|a^{x_0+\xi} - a^{x_0}| < \varepsilon;$$

wenn

$$\frac{d|\xi|}{1-d|\xi|} < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} \quad \text{d. i.} \quad |\xi| < \frac{\varepsilon}{d(a^{x_0}+\varepsilon)}.$$

2) Die logarithmische Function ${}^B\log x$ ist für jeden positiven Werth $x = x_0$ stetig. Man hat

$${}^B\log(x_0+\xi) - {}^B\log x_0 = {}^B\log\left(1+\frac{\xi}{x_0}\right).$$

Setzt man, wenn $\xi > 0$,

$$\frac{\xi}{x_0} < B^{\varepsilon} - 1;$$

wenn $\xi < 0$,

$$\frac{\xi}{x_0} > B^{-\varepsilon} - 1$$

voraus, so ergiebt sich immer

$$|{}^B\log(x_0+\xi) - {}^B\log x_0| < \varepsilon.$$

3) Die Potenzfunction x^{μ}, wo μ keine ganze Zahl sein soll, ist für jeden positiven Werth von x stetig und falls $\mu > 0$ auch für $x = 0$. Letzteres zufolge Nr. 5. Für $x > 0$ braucht man nur zu setzen:

$$x^{\mu} = B^{\mu \log x}.$$

Bei Bestimmung von Grenzwerthen wird oft der aus Nr. 9. III. abzuleitende Satz gebraucht: „Es sei die eindeutige Function $\varphi(y)$ für den endlichen Werth $y = b$ stetig und bei irgend einem Grenzübergange von x $\lim f(x) = b$, so ist bei ebendemselben

$$\lim \varphi\{f(x)\} = \varphi(b).“$$

Anwendungen des letzten Satzes.

1) Mit Hilfe desselben können wir den Grenzwerth $b = \lim_{n=+\infty} f_n$ im Beispiele zu Nr. 6 bestimmen. Da

$$f_{n+1} = \sqrt{a+f_n}$$

und $\sqrt{a+y}$ für $y = b$ stetig ist, so folgt aus dieser Gleichung bei $\lim n = +\infty$

$$b = \sqrt{a+b} \quad \text{d. i.} \quad b^2 = a+b, \quad (b-\tfrac{1}{2})^2 = a+\tfrac{1}{4}.$$

Man erhält somit, da b positiv sein muſs,

$$b = \tfrac{1}{2} + \sqrt{a+\tfrac{1}{4}}.$$

2) Über das Verhalten der Function $f(x)^{\varphi(x)}$ bei irg einem Grenzübergange der unabhängigen Veränderlicher bei welchem beide Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ Grenzwert haben, kann man Folgendes bemerken. Setzt man

$$f(x)^{\varphi(x)} = B^{\varphi(x)\log f(x)} \qquad (B > 1),$$

so ergiebt sich aus der Stetigkeit der Exponentialfunct B^y für jeden endlichen Werth von y, dafs wenn

$$\lim \varphi(x)\,{}^{B}\log f(x)$$

eine endliche Zahl b ist,

$$\lim f(x)^{\varphi(x)} = B^b.$$

Und wenn

$$\lim \varphi(x)\,{}^{B}\log f(x) = +\infty\,(-\infty),$$

so hat man nach Nr. 9. III.

$$\lim f(x)^{\varphi(x)} = +\infty\,(0).$$

Nach Nr. 9 hat das Product $\varphi(x)\log f(x)$ stets einen Gr werth, wenn nicht der eine der Factoren den Grenzwert der andere den Grenzwerth $+\infty$ oder $-\infty$ besitzt. Verhalten der Function $f(x)^{\varphi(x)}$ bei dem in Rede stehen Grenzübergange von x wird daher Gegenstand einer be deren Untersuchung sein müssen, wenn

(1) $\lim f(x) = 1, \quad \lim \varphi(x)$ unendlich;

(2) $\lim f(x) = +\infty, \quad \lim \varphi(x) = 0;$

(3) $\lim f(x) = +0, \quad \lim \varphi(x) = 0.$

Z. B. Aus

$$x^x = e^{x\,lx}$$

folgt nach der Formel (k) in Nr. 12, dafs

$$\lim_{x=+0} x^x = 1.$$

Der Grenzwerth von f^φ ist aber im 3. Falle nicht imme wie schon das Beispiel

$$x^{\frac{1}{lx}} = e, \qquad \lim_{x=+0} x^{\frac{1}{lx}} = e$$

zeigt.

Eine der wichtigsten der hier berührten Untersuchungen ist in der Formel enthalten

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad (l)$$

wo e wie gewöhnlich die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Wir erinnern zuerst an die aus VII. 5 folgende Formel

$$\lim_{x=+\infty} \varphi_n = e,$$

$$\varphi_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \qquad (m)$$

wo n eine natürliche Zahl. Man hat nach VIII. 3

$$\psi_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + n_2\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + n_n\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

woraus sofort folgt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \varphi_n. \qquad (n)$$

Da ferner für $r = 3, 4, \ldots n$ (vgl. X. 12)

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)$$

$$> 1 - \frac{1}{n}\{1 + 2 + \ldots + r - 1\} = 1 - \frac{(r-1)\,r}{2n},$$

so ergiebt sich

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(1-\frac{2\cdot 3}{2n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{(n-1)\,n}{2n}\right)$$

d. h.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \varphi_n - \frac{1}{2n}\varphi_{n-2} > \varphi_n\left(1-\frac{1}{2n}\right). \qquad (o)$$

Aus den Formeln (m) bis (o) schliefst man nach Nr. 10, II. die Formel

$$\lim_{n=+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (p)$$

Lassen wir nun x den stetigen Grenzübergang

$$\lim x = +\infty$$

ausführen. Ist x so gewählt dafs

$$n \leqq x < n+1,$$

somit

$$1+\tfrac{1}{n} \geqq 1+\tfrac{1}{x} > 1+\tfrac{1}{n+1},$$

so folgt

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n},$$

d. i.

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\psi_n > \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x} > \psi_{n+1} : \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right).$$

Nach (p) haben das erste und dritte Glied dieser Relation kurz mit f_n und g_n bezeichnet, bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth e d. h. zu $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\mu > 0$, sodafs für alle Werthe $n > \mu$ sowohl $|f_n - e| < \varepsilon$, als auch $|g_n - e| < \varepsilon$. Daher ist für alle Werthe $x > \mu + 1$

$$\left|\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x} - e\right| < \varepsilon,$$

oder

$$\lim_{x=+\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x} = e. \qquad (q)$$

Endlich sei $\lim x = -\infty$, wobei $x < -1$ anzunehmen ist. Setzt man $x = -x'$, so ergiebt sich

$$\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\tfrac{1}{x'}\right)^{-x'} = \left(1+\tfrac{1}{x'-1}\right)^{x'}$$

$$= \left(1+\tfrac{1}{x'-1}\right)^{x'-1}\cdot\left(1+\tfrac{1}{x'-1}\right);$$

somit nach (q) bei $\lim x' = +\infty$

$$\lim_{x=-\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x} = e,$$

womit die vorgelegte Formel vollständig erwiesen ist.

Aus (l) ergiebt sich für $x = 1 : y$

$$\lim_{y=\pm 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e,$$

und wenn man den Logarithmus nimmt

$$\lim_{y=0} \frac{{}^{B}\log(1+y)}{y} = {}^{B}\log e = M, \qquad (r)$$

worin M der Modulus des Logarithmensystemes. Insbesondere hat man

$$\lim_{y=0} \frac{l(1+y)}{y} = 1. \qquad (s)$$

13. Wenn eine für alle Werthe von x im endlichen Intervalle (a, b) — $a \leqq x \leqq b$ — eindeutig definirte Function $f(x)$ auch für jeden derselben stetig ist und $f(a)$, $f(b)$ ungleich sind, so giebt es mindestens einen Werth 0 zwischen a und b derart, dafs $f(c)$ gleich ist einem gegebenen Werthe h zwischen $f(a)$ und $f(b)$. — An den Grenzen a, b braucht die Stetigkeit von $f(x)$ nur einseitig zu sein. — Der Satz ergiebt sich aus dem folgenden besonderen Falle desselben.

Ist $f(x)$ für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$ eindeutig und stetig, und die Werthe $f(a)$ und $f(b)$ haben entgegengesetzte Vorzeichen, so giebt es wenigstens einen Werth c innerhalb des Intervalles (a, b): $a < c < b$, wofür $f(c) = 0$.[12])

Beweis. Es sei $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Wegen der Stetigkeit von $f(x)$ für $x = a$ gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass für alle $a < x < a + \delta$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

also

$$f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Wählt man hier $\varepsilon < -f(a)$, so folgt dafs $f(x) < 0$ für alle $a < x < a + \delta$. Man kann somit eine Veränderliche x' durch die Forderung definiren, dafs für alle $x < x'$ $f(x) < 0$ sei. x' mufs eine obere Grenze $c > a$ haben, wofür ebenfalls die Relation gilt:

$$x < c \qquad f(x) < 0. \qquad (1)$$

Das ist selbstverständlich, wenn x' den Werth c erreicht. Will man diese Annahme nicht machen, so mufs man doch zugeben, dafs innerhalb eines jeden Intervalles (x_1, c) — $x_1 < c$ — mindestens ein Werth x_1' von x' liege; sodafs $f(x) < 0$ für $x < x_1'$. Also ist $f(x_1) < 0$ wenn nur $x_1 < c$.

Wir sagen nun, $f(c)$ kann weder eine negative, noch eine positive Zahl sein. Wäre $f(c) < 0$, so gäbe es nach dem oben Bemerkten noch Werthe $x' > c$, also könnte c nicht die obere Grenze von x' sein. Wäre aber $f(c) > 0$, so müfsten Werthe von $x < c$ vorhanden sein, so dafs $f(x) > 0$. Denn wegen der Stetigkeit von $f(x)$ für $x = c$ gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, derart, dafs $f(x) > f(c) - \varepsilon$ für $c - \delta < x < c$; nimmt man nun $\varepsilon < f(c)$, so würde für alle die genannten x $f(x) > 0$ sein, gegen (1). Somit mufs $f(c) = 0$ und daher $c < b$ sein.

In ähnlicher Weise würde man, von $f(b)$ ausgehend, auf einen Werth $d \geqq c$ gestofsen sein, wofür $f(d) = 0$; während für $b > x > d$ $f(x) > 0$. Ist $d = c$, so giebt es im Intervalle (a, b) nur eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Der Eingangs erwähnte Satz folgt durch Anwendung des vorstehenden auf die Function $f(x) - h$, wo h irgend eine zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegene Zahl bedeutet, so dafs simultan

$$f(a) - h \lesseqgtr 0, \qquad f(b) - h \gtreqless 0.$$

Demnach existirt innerhalb des Intervalles (a, b) sicher ein Werth c, wofür $f(c) - h = 0$.

Die in diesem Satze ausgesprochene Eigenschaft kommt jedoch keineswegs ausschliefslich solchen Functionen zu, die für alle Werthe des Intervalles (a, b) stetig sind, — so dafs sie nicht als Definition derselben aufgestellt werden könnte.

Anmerkung. Aus dem speciellen Satze ergiebt sich zufolge Nr. 10, I. unmittelbar, dafs jede algebraische Gleichung

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

von ungeradem Grade mindestens eine reelle Auflösung $x = c$ haben mufs. Denn es ist

$$F(G) > 0, \qquad F(-G) < 0,$$

wenn nur die positive Zahl G hinlänglich grofs angenommen wird.

14. Die umgekehrte Function.

Satz. „Wenn $x = f(y)$ für alle Werthe von y des endlichen Intervalles (c, d) — $c < d$ — stetig ist und bei

wachsendem y stets zunimmt (abnimmt), so hat die Gleichung $x = f(y)$ für alle x im Intervalle $(f(c), f(d))$ eine und nur eine Wurzel, so dafs für den erwähnten Bereich von x eine eindeutige Function $y = \varphi(x)$ existirt, welche der Gleichung $x = f(y)$ Genüge leistet. Diese Function, gewöhnlich die umgekehrte gegenüber der Function $f(y)$ genannt, ist für alle Werthe x im Intervalle $(f(c), f(d))$ stetig und nimmt bei wachsendem x entweder beständig zu oder beständig ab."

Zusatz. Ist $\lim f(y) = +\infty\,(-\infty)$ für $\lim y = d - 0$, während $f(y)$ in jedem Intervalle (c, d') — $c < d' < d$ — die angegebenen Eigenschaften besitzt, so ist $\lim \varphi(x) = d$ für $\lim x = +\infty\,(-\infty)$.

Beweis. Es sei $f(c) = a$, $f(d) = b$ und $b > a$. Ferners wird angenommen, falls $c \leqq y' < y'' \leqq d$, $f(y') < f(y'')$. Daraus folgt unmittelbar, dafs die Gleichung $x = f(y)$ — $a \leqq x \leqq b$ — nur eine Wurzel y zwischen den Grenzen (c, d) haben kann. Dafs aber eine solche existirt, verbürgt der Satz von Nr. 13. Nun ist zu zeigen, dafs für alle $a \leqq x \leqq b$ $\varphi(x)$ stetig ist; an den Grenzen $x = a$, $x = b$ zum mindesten einseitig. Es sei $a < x_0 < b$, $x_0 = f(y_0)$ und $\varepsilon > 0$ vorgelegt, jedoch so klein angenommen, dafs das Intervall $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ nicht zum Theil aufserhalb (c, d) fällt. Ferner sei $x_0 - \delta_1 = f(y_0 - \varepsilon)$, $x_0 + \delta_2 = f(y_0 + \varepsilon)$, worin δ_1 δ_2 positive Zahlen bedeuten, von denen δ die kleinere sei. Giebt man x irgend einen Werth des Intervalles $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, so mufs die ihm entsprechende Lösung der Gleichung $x = f(y)$ zwischen $y_0 - \varepsilon$ und $y_0 + \varepsilon$ liegen. D. i. es ist $|y - y_0| < \varepsilon$ für alle x, wofür $|x - x_0| < \delta$. — Auf ähnliche Art wird der Zusatz erwiesen.

Vermöge des vorstehenden Satzes erhellt sofort, dafs die im VIII. Abschnitte betrachteten Gleichungen

$$x = y^m \ (m > 0), \qquad x = B^y \ (B > 1),$$

in welchem die rechte Seite mit y beständig wächst, und zwar von 0 bis $+\infty$ (in der ersten, wenn y von 0 zu $+\infty$; in der zweiten, wenn y von $-\infty$ zu $+\infty$ übergeht), eindeutige und für alle positiven Werthe von x stetige Functionen

$$y = \sqrt[m]{x}, \qquad y = {}^B\log x$$

als Umkehrungen bezüglich der Potenz mit ganzen positiven Exponenten und der Exponentialfunction bestimmen — Sätze, die in den vorhergehenden Nummern durch besondere Beweise gezeigt worden sind.

15. Satz. „Ist $f(x)$ eindeutig definirt und stetig für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$, so hat die Veränderliche $f(x)$ eine endliche obere Grenze g und eine endliche untere Grenze k. Es giebt ferner mindestens einen Werth c — $a \leqq c \leqq b$ —, wofür $f(c) = g$ und mindestens einen Werth d — $a \leqq d \leqq b$ —, wofür $f(d) = k$." Oder: Jede im Intervalle (a, b) mit Einschluſs der Grenzen stetige Function erreicht sowol ihre obere, als auch ihre untere Grenze: sie hat einen gröfsten und einen kleinsten Werth.[15])

Der Beweis dieses wichtigen Satzes stützt sich auf den folgenden

Hilfssatz. „Ist $y = f(x)$ eindeutig definirt für unendlich viele Werthe von x in dem endlichen Intervalle (a, b) und g die obere Grenze von $f(x)$, so existirt mindestens ein Werth c — $a \leqq c \leqq b$ —, derart, daſs in jedem Intervalle $(c - \varepsilon,\ c + \varepsilon)$ — $\varepsilon > 0$ — die obere Grenze von $f(x)$ g ist." — Ein ähnlicher Satz gilt für die untere Grenze von $f(x)$.

Beweis. Wir bemerken zunächst, daſs die obere Grenze g' von $f(x)$ für die Werthe von x in irgend einem Intervalle (a', b'), das innerhalb (a, b) liegt, nicht gröfser als g sein kann, g und g' als endlich vorausgesetzt, und daſs, wenn $g' = +\infty$ ist, auch $g = +\infty$ sein muſs. Das folgt aus dem Begriffe der oberen Grenze unmittelbar. Wäre im ersten Falle $g' > g$, so gäbe es im Intervalle (a, b) Werthe x', wofür $f(x') > g' - \varepsilon$ d. i. $f(x') > g$, so daſs g nicht obere Grenze für die $f(x)$ im Intervalle (a, b) von x sein könnte. — Ebenso einfach folgt, daſs wenn das Intervall (a, b) durch Einschaltung eines Werthes h — $a < h < b$ — in zwei (a, h), (h, b) getheilt wird, die obere Grenze von $f(x)$ mindestens für die in eines dieser Intervalle fallenden Werthe von x wieder g sein muſs. Ist g eine endliche Zahl, so müssen auch die oberen Grenzen g_1, g_2 von $f(x)$ in den Intervallen von x (a, h), bez. (h, b) endlich sein und umgekehrt. Ist dann $g_1 = g_2$, so ist g ihnen gleich, sonst aber ist g die gröfsere

der beiden Zahlen. In der That, wenn z. B. $g_1 \geqq g_2$, so hat man ja für $a \leqq x \leqq b$ $f(x) \leqq g_1$, aber zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ mindestens ein x' in (a, b), wofür $f(x') > g_1 - \varepsilon$. Ist g aber $+\infty$, so mufs, nach dem gerade Bemerkten, mindestens eine der oberen Grenzen g_1, $g_2 + \infty$ sein.

Dieses vorausgesetzt, theilen wir das Intervall $b - a = D$ in $e (\geq 2)$ gleiche Theile. Sodann mufs mindestens für die Werthe von x in einem der Intervalle

$$\left(a,\ a + \frac{D}{e}\right),\ \left(a + \frac{D}{e},\ a + \frac{2D}{e}\right) \ldots \left(a + \frac{(e-1)D}{e},\ b\right)$$

die obere Grenze von $f(x)$ wieder g sein. Es sei

$$\left(a + \frac{c_1 D}{e},\ a + \frac{(c_1 + 1)D}{e}\right) \qquad (0 \leqq c_1 \leqq e - 1)$$

das erste unter den genannten Intervallen, das diese Eigenschaft besitzt. Wir theilen dasselbe in e gleiche Theile und finden wieder ein erstes Intervall

$$\left[a + \left(\frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e}\right) D,\quad a + \left(\frac{c_1}{e} + \frac{c_2 + 1}{e^2}\right) D\right],$$

$$(0 \leqq c_2 \leqq e - 1),$$

derart, dafs für die in demselben vorkommenden Werthe von x die obere Grenze von $f(x)$ g ist. U. s. f. Auf diese Weise gelangen wir zu einer Zahl

$$c = a + D \cdot (S_n), \qquad S_n = \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \ldots + \frac{c_n}{e^n},$$

$$(0 \leqq c_n \leqq e - 1),$$

welche die Eigenschaft hat, dafs für die in jedes Intervall

$$\left[a + S_n D,\quad a + \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right) D\right]$$

fallenden Werthe von x die obere Grenze von $f(x)$ stets g ist. Nimmt man n so grofs dafs

$$D : e^n < \varepsilon,$$

so folgt

$$c - \varepsilon < a + S_n D < c < a + \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right) D < c + \varepsilon.$$

Und es ist im Intervalle von x $(c - \varepsilon,\ c + \varepsilon)$ die obere Grenze von $f(x)$ auch g. Wenn $g = +\infty$, so erhellt dies unmittelbar. Ist g endlich, so kann die zuletzt erwähnte obere Grenze weder kleiner, noch gröfser als g sein, ist also g selbst.

Mit Hilfe des vorstehenden Satzes ergiebt sich nun zunächst, dafs die obere (untere) Grenze g der für alle

$$a \leqq x < b$$

stetigen Function $f(x)$ endlich ist. Denn wäre $g = +\infty$, so müfste es mindestens einen Werth $a \leqq c \leqq b$ geben, derart, dafs in jedem Intervalle $(c - \varepsilon,\ c + \varepsilon)$ die obere Grenze von $f(x)$ $+\infty$ ist. Aus der Stetigkeit von $f(x)$ für $x = c$ folgt aber, dafs bei gegebenem $\varepsilon' > 0$ ein $\delta' > 0$ existirt, sodafs $|f(x) - f(c)| < \varepsilon'$, wenn nur $|x - c| < \delta'$. Also kann g nicht $+\infty$ sein. — Die soeben gemachte Bemerkung ist keineswegs selbstverständlich. Wenn auch $f(x)$ für jedes x $(a \leqq x \leqq b)$ einen endlichen Werth hat, so braucht g nicht endlich zu sein. Z. B. Es sei $f(x)$ in folgender Weise definirt

$$f(a) = 0, \qquad (a < x \leqq b), \qquad f(x) = \frac{1}{x - a}.$$

Wir finden endlich, dafs $f(c) = g$ sein mufs. Denn im Intervalle $(c - \delta',\ c + \delta')$ giebt es mindestens einen Werth x', wofür

$$g > f(x') > g - \varepsilon'.$$

Daneben ist

$$|f(x') - f(c)| < \varepsilon',$$

somit

$$|g - f(c)| < 2\varepsilon',$$

also

$$g = f(c)$$

nach VII. 7.

Als Anwendung möge der zur Beurtheilung des Sinnes, in welchem eine für $a \leqq x \leqq b$ stetige Function $f(x)$ sich ändert, oft

unentbehrliche Satz dienen: „Wenn für alle $a \leqq x < b$ eine positive Zahl $\Delta(x)$ existirt, so dafs für

$$0 < \xi < \Delta(x) \qquad f(x+\xi) - f(x) \gtrless 0,$$

so ist entsprechend

$$f(b) \gtrless f(a).“$$

Die Function

$$\varphi(x) = f(x) - f(a),$$

wofür $\varphi(a) = 0$, ist zugleich mit $f(x)$ stetig, hat im Falle des oberen Zeichens eine obere Grenze $\gamma > 0$ und erreicht sie für einen Werth $x = c$. Wäre $a < c < b$, so müfste

$$\varphi(c+\xi) \leqq \varphi(c) \quad (\xi > 0),$$

also

$$f(c+\xi) \leqq f(c)$$

sein, gegen die Voraussetzung. Demnach mufs $c = b$ und $f(b) - f(a) = \gamma > 0$ sein.

16. Satz. „Ist $f(x)$ eindeutig und stetig für alle Werthe des Intervalles (a, b), die Grenzen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen, so kann jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta_0 > 0$ derart zugeordnet werden, dafs $|f(x') - f(x'')|$ stets kleiner als ε ist, wenn nur x', x'' Werthe im Intervalle (a, b) bezeichnen, deren Unterschied dem absoluten Betrage nach kleiner als δ_0 ist.“[14])

Beweis. Gemäfs Voraussetzung gehört zu $\frac{1}{2}\varepsilon$ eine Zahl $\delta > 0$ derart, dafs $|f(x') - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle Werthe x', genügend der Relation $|x' - x| < \delta$. Dabei kann x jeder Werth: $a \leqq x \leqq b$ sein. Ist nun x'' ein zweiter Werth, wofür $|x'' - x| < \delta$, so ergiebt sich $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Innerhalb des Intervalles $(x - \delta,\ x + \delta)$ ist somit die Schwankung von $f(x)$, d. i. der Unterschied ihrer oberen und unteren Grenze, kleiner als ε. Definirt man ferner eine Veränderliche $\xi > 0$ durch die Bedingung, dafs die Schwankung von $f(x)$ innerhalb des Intervalles $(x - \xi,\ x + \xi)$ unter ε liegen soll, so hat sie eine obere Grenze $\Delta(x) > 0$, von der nach einem in Nr. 13 angegebenen Verfahren gezeigt werden kann, dafs im Intervalle $(x - \Delta(x),\ x + \Delta(x))$ die Schwankung ebenfalls noch kleiner als ε ist. Ist $\xi > \Delta x$ so mufs in dem Intervalle $(x - \xi,\ x + \xi)$ die Schwankung von $f(x)$ die Zahl ε übersteigen. — Auf diese Weise ist für

alle Werthe $a < x \leq b$ eine Function $\Delta(x)$ eindeutig definirt, die überall positiv ist. Ihre untere Grenze Δ_0 kann ≥ 0 sein. Wenn sich aber nachweisen läfst, dafs $\Delta(x)$ für alle soeben erwähnten Werthe von x stetig ist, so mufs $\Delta_0 > 0$ sein; denn es giebt nach Nr. 15 einen Werth d im Intervalle (a, b), wofür $\Delta(d) = \Delta_0$. — Wenn man x', x'' beliebig im Intervalle (a, b) wählt, nur so, dafs

$$|x' - x''| < \Delta_0,$$

so ist gewifs

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Man kann also $\delta_0 < \Delta_0$ setzen.

Die Stetigkeit von $\Delta(x)$ für irgend einen Werth $a < x \leq b$ läfst sich leicht zeigen. Es sei x_1 irgend ein von x verschiedener Werth im Intervalle

$$(x - \Delta(x), \quad x + \Delta(x)).$$

Ist $x < x_1 < x + \Delta(x)$, so ist

$$x_1 - \{x + \Delta(x) - x_1\} > x - \Delta(x),$$

so dafs unmittelbar erhellt, dafs $\Delta(x_1) \geq x + \Delta(x) - x_1$ sein mufs. Sonst würde nämlich das Intervall $(x_1 - \Delta(x_1), x_1 + \Delta(x_1))$ vollständig innerhalb $(x - \Delta(x), x + \Delta(x))$ liegen. Wenn aber $x - \Delta(x) < x_1 < x$, so ist

$$x_1 + \{x_1 - x + \Delta(x)\} < x + \Delta(x),$$

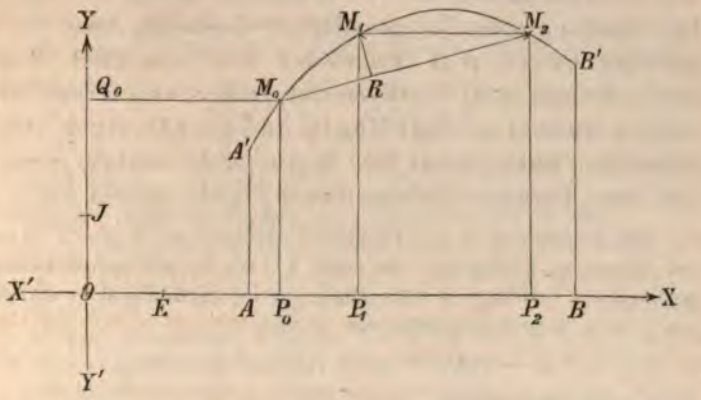
so dafs nun $\Delta(x_1) \geq x_1 - x + \Delta(x)$. Man hat also allgemein $\Delta(x_1) \geq \Delta(x) - |x_1 - x|$. Vertauscht man hier x und x_1, so folgt $\Delta(x) \geq \Delta(x_1) - |x_1 - x|$, d. i.

$$\Delta(x_1) \leq \Delta(x) + |x_1 - x|.$$

Demnach findet man $|\Delta(x_1) - \Delta(x)| < |x_1 - x|$. Und wenn σ irgend eine positive Zahl bedeutet, so hat man für alle x_1, wofür $|x_1 - x| < \sigma$ $|\Delta(x_1) - \Delta(x)| < \sigma$, q. e. d.

17. Geometrische Darstellung der Functionen einer Veränderlichen. Werden durch einen Punkt O der Ebene zwei Gerade XX', YY' — die Axen — gezogen, so können von O aus auf der ersten die Werthe der Function $y = f(x)$ aufgetragen werden. Hierzu ist notwendig, dafs

auf jeder der Geraden eine positive Richtung OX, bez. OY angenommen und eine Strecke OE, bez. OJ der Einheit zugeordnet werde. Gewöhnlich läfst man $OJ = OE$,



sowie $OY \perp OX$ sein. Dieses auch hier vorausgesetzt, findet man jedem Werthe x_0 entsprechend eine Strecke (Abscisse) $x_0 = OP_0$ und ähnlich $f(x_0) = y_0$ entsprechend eine Strecke (Ordinate) $y_0 = OQ_0$. Zieht man hierauf durch P_0, Q_0, Parallele, bez. zu OY, OX, so betrachtet man ihren Schnittpunkt M_0 als Repräsentanten des Werthsystemes $x_0 y_0$. Ist $f(x)$ eindeutig definirt für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$, so kann man auf diese Art zu beliebig vielen Punkten der Strecke AB — $OA = a$, $OB = b$ — auf der Abscissen-Axe die zugehörigen Functionswerthe $y = f(x)$ als Ordinaten construiren, wobei wir von der unvermeidlichen Ungenauigkeit geometrischer Constructionen absehen. Insbesondere sei $AA' = f(a)$, $BB' = f(b)$. — Wenn $f(x)$ für alle Werthe x des Intervalles (a, b) eindeutig und stetig ist, so sagt man, dafs die Endpunkte der Ordinaten $P_0 M_0$ eine stetige Linie $A'B'$ in der Ebene bilden. Es fragt sich nun, unter welchen Umständen wir uns ein geometrisches Bild davon machen können. Natürlich müssen diejenigen Punkte, deren Kenntnifs uns zur Beurtheilung des Verlaufes einer Linie notwendig erscheint, in endlicher Anzahl vorhanden sein. Hierzu rechnen wir zunächst die höchsten und tiefsten Punkte, die

Wendepunkte, Ecken und Spitzen. Ferner darf die Li
mit jeder Geraden, jedem Kreise und jeder anderen aus d
Geometrie bekannten Curve höchstens eine endliche Anz
von Punkten gemein haben. Demnach können wir die s
tige Function $y = f(x)$ geometrisch darstellen, wenn die
gehörige Curve $A'B'$ entweder ein convexer Bog
ohne Ecken und Spitzen ist, oder aus einer en
lichen Anzahl solcher Bögen und geradliniger Stüc
besteht. Dabei heifst ein Bogen $A'B'$ convex, wenn
mit einer Geraden höchstens zwei Punkte gemein hat.

Der Function $y = f(x)$ entspricht ein convexer Bogen $A'B'$ un
der folgenden Bedingung. Es seien x_0, x_1, x_2 drei aufeinander f
gende, sonst beliebige Werthe von x im Intervalle (a, b) — die Gr
zen $x = a$, $x = b$ eingeschlossen — und

$$y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad y_2 = f(x_2).$$

Dann mufs der Ausdruck

$$y_0 (x_2 - x_1) + y_1 (x_0 - x_2) + y_2 (x_1 - x_0)$$

(1) $$(a \leq x_0 < x_1 < x_2 \leq b)$$

von 0 verschieden und gleichbezeichnet sein, wie auch x_0, x_1, x_2
genommen werden. Denn bekanntlich drückt er den doppelten F
cheninhalt des Dreieckes $M_0\ M_1\ M_2$ aus, versehen mit dem Zeich
$+$ oder $-$, je nachdem M_1 auf der positiven oder negativen Se
der Richtung $M_0 M_2$ liegt, d. h. je nachdem der rechte Win
$M_2 R M_1$ durch Drehung eines beweglichen Halbstrahles um R
dem Schenkel RM_2 aus in gleichem oder in entgegengesetztem Sin
beschrieben wird, wie der rechte Winkel XOY von dem Schen
OX aus. Wenn aber der Bogen $A'B'$ convex ist, so mufs ein Pu
M_1, irgendwo auf ihm zwischen zwei beliebigen Punkten $M_0 M_2$ d
selben gewählt, immer auf derselben Seite der Richtung M_0
liegen. — Lassen wir P_1 die Mitte von $P_0 P_2$ sein und setzen demn

$$x_0 = x_1 - \xi, \qquad x_2 = x_1 + \xi, \qquad (\xi > 0),$$

so ist mit (1) gleichbezeichnet der Ausdruck

(2) $$f(x_1 + \xi) + f(x_1 - \xi) - 2f(x_1),$$

so dafs auch er stets dasselbe Zeichen haben mufs, wenn nur d
Werthe x_1, $x_1 - \xi$, $x_1 + \xi$ im Intervalle (a, b) liegen. Es läfst si
nun leicht das Folgende nachweisen: „Wenn zu jedem Punkte x_1 zw
schen a und b eine positive Zahl $\Delta(x_1)$ gehört, so dafs, wenn
$0 < \xi < \Delta(x_1)$, der Ausdruck (2) stets dasselbe Zeichen hat, so g
das Nämliche vom Ausdrucke (1), wie auch x_0, x_1, x_2 angenomm

werden, und zwar stimmt das Zeichen des letzteren mit dem des ersteren überein." Wir denken uns x_0, x_2 fest und x_1 zwischen den Grenzen $x_0 x_2$ veränderlich. Dividiren wir (1) durch $x_2 - x_0$, wodurch sich das Zeichen nicht ändert, und ersetzen x_1 durch x, so geht (1) über in

$$y_0 + \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}(x - x_0) - f(x) = \varphi(x) \qquad (x_0 < x < x_2),$$

so daſs

$$\varphi(x_0) = 0, \qquad \varphi(x_2) = 0.$$

Da

$$\varphi(x + \xi) + \varphi(x - \xi) - 2\varphi(x) = -\{f(x + \xi) + f(x - \xi) - 2f(x)\},$$

so folgt, daſs wenn (2) für $\xi < \Delta(x)$ stets etwa positiv ist,

$$\varphi(x + \xi) + \varphi(x - \xi) - 2\varphi(x) < 0$$

für

$$0 < \xi < \Delta(x).$$

Nun ist $\varphi(x)$ eine stetige Function von x für alle $x_0 \leq x \leq x_2$; es giebt also nach Nr. 15 mindestens einen Werth $d - x_0 \leqq d \leq x_2$, so daſs $\varphi(d)$ gleich der unteren Grenze von $\varphi(x)$ für die genannten Werthe von x. Es kann aber d nicht innerhalb des Intervalles (x_0, x_2) liegen, da, wie klein auch ξ sein mag,

$$\varphi(d + \xi) - \varphi(d) \geqq 0, \qquad \varphi(d - \xi) - \varphi(d) > 0,$$

somit

$$\varphi(d + \xi) + \varphi(d - \xi) - 2\varphi(d) \geq 0$$

sein müſste. Somit ist $d = x_0 = x_2$ und die untere Grenze von $\varphi(x)$ Null, so daſs für $x_0 < x < x_2$ $\varphi(x) > 0$ sein muſs. — „Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, daſs die für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$ eindeutige und stetige Function $y = f(x)$ bei der geometrischen Darstellung durch rechtwinklige Coordinaten einen convexen Bogen liefere, besteht darin, daſs zu jedem Werthe $a < x < b$ eine Zahl $\Delta(x) > 0$ gehören muſs derart, daſs für alle $0 < \xi < \Delta(x)$

$$f(x + \xi) + f(x - \xi) - 2f(x)$$

von Null verschieden und gleichbezeichnet ist."

Wenn der convexe Bogen $A'B'$ vollständig auf einer Seite der x-Axe liegt, so kehrt er, wie aus der Figur unmittelbar ersichtlich ist, der x-Axe seine convexe oder concave Seite zu, je nachdem für $a < x < b$ und $0 < \xi < \Delta(x)$

$$f(x)\{f(x + \xi) + f(x - \xi) - 2f(x)\}$$

beständig positiv oder negativ ist.

Wir können ferner zeigen, daſs, „wenn für einen Werth $a < x < b$

$$\lim_{\xi = 0} \frac{1}{\xi}\left\{f(x + \xi) + f(x - \xi) - 2f(x)\right\} = 0, \tag{3}$$

die Unbestimmtheitsgrenzen des Bruches

$$\{f(x+\xi)-f(x)\} : \xi, \tag{4}$$

bei $\lim \xi = -0$ dieselben sein müssen wie bei $\lim \xi = +0$, w geometrisch bekanntlich soviel besagt, als dafs der Bogen $A'B'$ wed Ecken noch Spitzen haben kann. Nach Nr. 7 kann die obe Unbestimmtheitsgrenze bei $\lim \xi = +0$ entweder $+\infty$, eine endlic Zahl O oder $-\infty$ sein. Nach (3) gehört nun zu $\varepsilon > 0$ eine Za $\delta > 0$, so dafs für $0 < \xi < \delta$

$$-\varepsilon < \frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi} - \frac{f(x-\xi)-f(x)}{-\xi} < +\varepsilon. \tag{5}$$

Daraus folgt im ersten Falle, wo jeder Zahl $G > 0$ eine Zahl $\delta >$ entspricht, derart, dafs, wenn $0 < \xi < \delta$, ein Werth $\xi_1 < \xi$ vorha den ist, wofür

$$\{f(x+\xi_1)-f(x)\} : \xi_1 > G,$$

auch

$$\frac{f(x-\xi_1)-f(x)}{-\xi_1} > G-\varepsilon.$$

Da $G-\varepsilon$ jede positive Zahl sein kann, so ist die obere Unbestimm heitsgrenze von (4) bei $\lim \xi = -0$ auch $+\infty$. — Im zweiten Fall gehört zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, so dafs wenn $0 < \xi < \delta$

$$\frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi} < O+\varepsilon, \quad \frac{f(x+\xi_1)-f(x)}{\xi_1} > O-\varepsilon,$$

wobei ξ_1 $(< \xi < \delta)$ einen bestimmten Werth bedeutet. Aus (5) findet man aber

$$\frac{f(x-\xi)-f(x)}{-\xi} < O+2\varepsilon, \quad \frac{f(x-\xi_1)-f(x)}{-\xi_1} > O-2\varepsilon,$$

d. h. die obere Unbestimmtheitsgrenze von (4) bei $\lim \xi = -0$ ist O — Im dritten Falle gehört zu $g > 0$ eine Zahl δ, so dafs, wenn $0 < \xi < \delta$

$$\frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi} < -G,$$

somit nach (5)

$$\frac{f(x-\xi)-f(x)}{-\xi} < -(G-\varepsilon),$$

also die in Rede stehende Unbestimmtheitsgrenze von (4) $-\infty$ ist. — Aehnliche Schlüsse gelten bezüglich der unteren Unbestimmtheitsgrenze.

Man untersuche mit Hilfe der vorstehenden und eines Satzes in X. 23 die folgenden Curven:

1) $y = x^m$ (m natürliche Zahl).

2) $y = x^{-m}$.

3) $y^2 = x^3$.
4) $y^2 - x^2 + x^3 = 0$.
5) $y^2 + x^2 - x^3 = 0$.
6) $y = a^x$.
7) $y = {}^B\log x$.

18. Functionen von zwei und mehreren unabhängigen Veränderlichen. Wenn jeder der in bestimmter Anzahl vorgelegten Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$ ein gewisser Bereich vorgeschrieben ist und einem jeden Systeme von Werthen $x_1, x_2 \ldots x_m$, worin x_1 irgend einer aus den dieser Veränderlichen beizulegenden Werthen, x_2 irgend einer aus den der zweiten Veränderlichen beizulegenden Werthen u. s. f., eine Zahl y zugeordnet wird, so heifst y eine eindeutige Function der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$. — Es ist jedoch, wie G. Cantor zuerst nachgewiesen hat,[15]) der soeben gebildete Begriff nicht wesentlich verschieden von dem einer eindeutigen Function einer Veränderlichen x. Wenn jede der Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$ stetig ist, d. i. x_1 alle Werthe eines endlichen Intervalles (a_1, b_1), x_2 alle Werthe eines endlichen Intervalles (a_2, b_2), $\ldots x_m$ alle Werthe eines endlichen Intervalles (a_m, b_m) annehmen kann, und wenn x eine andere Veränderliche mit dem Spielraum $0 \leqq x \leqq 1$ ist; so ist es möglich die eine Veränderliche x den hier in Betracht kommenden Werthsystemen $x_1, x_2 \ldots x_m$ so zuzuordnen, dafs zu jedem bestimmten Werthe von x ein bestimmtes Werthsystem $x_1, x_2 \ldots x_m$ und umgekehrt zu jedem bestimmten Werthsysteme $x_1, x_2 \ldots x_m$ ein gewisser Werth von x gehört. Somit erscheint die obige Veränderliche y als eindeutige Function der einen Veränderlichen x. — Diese höchst bemerkenswerthe Thatsache wird uns jedoch nicht abhalten, den Begriff „Function von zwei und mehreren Veränderlichen“ überall anzuwenden, wo ein concretes Gesetz der Zuordnung zwischen Systemen $x_1, x_2 \ldots x_m$ und Zahlen vorliegt. So haben wir schon in Nr. 3 die rationalen Functionen der Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$ eingeführt.

19. Gleichmäfsige Convergenz der Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen zu den dadurch

sich ergebenden Grenzwerthen, dafs sich eine der Veränderlichen einem und demselben Grenzwerthe auf dieselbe Art nähert.

Zu den Grenzwerthen von Functionen mehrerer Veränderlichen übergehend, begegnet uns zunächst die folgende Untersuchung.

Es sei $f(x, y)$ eine eindeutige Function von x, y, wobei für x solche von y unabhängige Werthe vorgeschrieben sind, die einen Grenzübergang zu einem constanten Grenzwerthe bilden (z. B. $a < x \leq a + D$ — D constant — und $\lim x = a + 0$), für y entweder Werthe in einem endlichen Intervalle (c, d) mit Einschlufs dieser Grenzen, oder Werthe innerhalb eines beliebigen (endlichen oder unendlichen) Intervalles mit Ausschlufs der Grenzen. Für jeden der genannten Werthe y besitze $f(x, y)$ entsprechend dem obigen Grenzübergange der Veränderlichen x einen endlichen Grenzwerth $\varphi(y)$, z. B.

$$\lim_{x=a+0} f(x, y) = \varphi(y),$$

d. h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\delta > 0$, derart, dafs

$$|f(x, y) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

für alle hier in Betracht kommenden $a < x < a + \delta$. Die Zahl δ ist zufolge dieser Definition nicht völlig bestimmt, sie kann durch jede kleinere positive Zahl ersetzt werden. Es fragt sich nun, ob man sie für alle Werthe, die der Veränderlichen y zugewiesen werden können, ohne Ausnahme, durch eine Constante $\delta_0 > 0$ ersetzen kann. Um diese Frage zu entscheiden, wollen wir uns an Stelle von δ eine Zahl Δ denken, welche in folgender Art definirt ist. Für $a < x < a + \Delta$ ist

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

in jedem Intervalle $(a + \Delta, a + \Delta + \alpha)$ aber, wie klein auch die positive Zahl α sein mag, soll mindestens ein Werth x' von x vorhanden sein, wofür

$$|f(x', y) - \varphi(y)| > \varepsilon.$$

Δ wird nun nicht allein von ε, was sich von selbst versteht, sondern auch von y abhängen, so dafs wir dafür $\Delta(y)$ schreiben wollen. Während y die ihm zukommenden Werthe (z. B. $c \leqq y \leqq d$) ertheilt werden, hat die Veränderliche $\Delta(y)$ die stets positiv ist, eine untere Grenze $\Delta_0 \geqq 0$. Im Falle dafs $\Delta_0 > 0$, findet man wegen $\Delta(y) \geqq \Delta_0$, dafs für alle $a < x < a + \Delta_0$

$$|f(x, y) - \varphi(y)| < \varepsilon,$$

was auch immer y für einen unter der ihm beigelegten Werthe annehmen mag. Es existirt somit hier eine Zahl δ_0, nämlich $\delta_0 \leqq \Delta_0$. Umgekehrt, ist eine solche Zahl δ_0 vorhanden, so hat man $\Delta(y) \geqq \delta_0$, somit kann Δ_0 nicht Null sein.

Die Functionen $f(x, y)$ können nun bei einem solchen Grenzübergange wie $\lim x = a + 0$ ein doppeltes Verhalten zeigen. Entweder ist $\Delta_0 > 0$ oder gleich 0. Im ersten Falle sagt man: „Die Function $f(x, y)$ nähert sich bei

$$\lim x = a + 0$$

dem Grenzwerthe $\varphi(y)$ gleichmäfsig für alle dem y beigelegten Werthe," d. h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\delta_0 > 0$, derart, dafs

$$|f(x, y) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

für alle hierher gehörigen $a < x < a + \delta_0$, welchen der ihr zugewiesenen Werthe auch die Veränderliche y annehmen mag. — Im zweiten Falle ist die Annäherung von $f(x, y)$ an $\varphi(y)$ ungleichmäfsig: wie klein wir auch δ_0 annehmen mögen, so giebt es doch mindestens ein Werthsystem $x'y'$ $(a < x' < a + \delta_0)$, derart, dafs

$$|f(x', y') - \varphi(y')| \geqq \varepsilon.$$

Leicht ist es, die Thatsache der ungleichmäfsigen Convergenz nachzuweisen. Nach Nr. 5 ist

$$\lim_{x=+\infty} y^x = 0 \qquad (0 < y < 1).$$

Wir haben

$$y^x \lesseqgtr \varepsilon,$$

je nachdem

$$x \log y \gtreqless \log \varepsilon,$$

d. i.

$$x \gtreqless \frac{\log \varepsilon}{\log y},$$

so dafs

$$\Delta(y) = \log \varepsilon : \log y.$$

Läfst man y alle Werthe des Intervalles (0, 1) mit Ausschlufs der Grenzen annehmen, so ergiebt sich

$$\lim_{y=1-0} \Delta(y) = +\infty.$$

Wie grofs man auch eine Zahl $G > 0$ annehmen mag, niemals wird für alle $0 < y < 1$

$$y^x < \varepsilon$$

sein, wenn nur $x > G$.

Wir wollen sogleich bemerken: „Für alle $c \leqq y \leqq d$ sei $f(x, y)$ bei constantem x — $a < x \leqq a + D$ — eine stetige Function von y und $f(x, y)$ convergire bei

$$\lim x = a + 0$$

für $c \leqq y \leqq d$ gleichmäfsig zum Grenzwerthe $\varphi(y)$, so ist für eben dieselben Werthe von y $\varphi(y)$ eine stetige Function von y.“ — Man hat nämlich neben einander, wenn $c \leqq y_0 \leqq d$,

$$a < x < a + \delta_0, \qquad |\varphi(y_0) - f(x, y_0)| < \varepsilon,$$
$$|\varphi(y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Bezeichnet ferner x' einen bestimmten Werth: $a < x' < a + \delta_0$, so gehört zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta' > 0$, derart, dafs

$$|f(x', y) - f(x', y_0)| < \varepsilon,$$

für

$$|y - y_0| < \delta'.$$

Demnach ist für alle $|y - y_0| < \delta'$

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < 3\varepsilon.$$

D. h. nach Nr. 12 $\varphi(y)$ ist für den Werth $y = y_0$ stetig. An den Grenzen $y = c$, $y = d$ ist die Stetigkeit von $\varphi(y)$

mindestens einseitig. — Man darf nicht umgekehrt aus der Stetigkeit von $\varphi(y)$ für alle $c \leqq y \leqq d$ auf die gleichmäfsige Convergenz von $f(x, y)$ zu $\varphi(y)$ für die genannten y schliefsen (vgl. X. 21).

Da im obigen Beispiele $\lim\limits_{x=+\infty} y^x$ für $y = 1$ auch 1 ist, so hätten wir zufolge des soeben erwiesenen Satzes sofort schliefsen können, dafs y^x bei $\lim x = +\infty$ nicht gleichmäfsig für alle $0 \leqq y \leqq 1$ zum Grenzwerthe 0 bez. 1 convergirt, somit auch nicht für alle $0 < y < 1$.

Setzt man in dem obigen Satze die gleichmäfsige Convergenz nur voraus für alle $c < y < d$, so folgt notwendig die Existenz endlicher Grenzwerthe

$$\lim_{y=c+0} \varphi(y), \qquad \lim_{y=d-0} \varphi(y).$$

Denn schreibt man oben statt y_0, y bezüglich

$$c + \eta, \qquad c + \eta', \qquad (0 < \eta' < \eta),$$

so folgt wegen der einseitigen Stetigkeit von $f(x, y)$ für

$$y = c \qquad |\varphi(c + \eta') - \varphi(c + \eta)| < 3\varepsilon$$

für alle $0 < \eta < \delta'$, wodurch nach Nr. 8 die zuletzt ausgesprochene Behauptung gerechtfertigt erscheint. — In dem vorstehenden Beispiele ist $\lim \varphi(y) = 0$ für $\lim y = 1 - 0$; es erhellt daraus, dafs man sie nicht umkehren darf.

Die Unterscheidung zwischen gleichmäfsiger und ungleichmäfsiger Convergenz in der angegebenen Weise ist von fundamentaler Bedeutung. Sie wurde von L. Seidel in der Theorie der unendlichen Reihen zuerst aufgestellt vgl. X. 21.

Anmerkung. Es ist wesentlich, dafs der Spielraum der Veränderlichen x für alle Werthe von y derselbe sei oder doch auf einen solchen Bereich zurückgeführt werden kann. Man vergleiche das folgende Beispiel. Es sei $f(x)$ für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$ eindeutig definirt und stetig. Nach Nr. 12 hat man für jeden Werth $a \leqq x < b$

$$\lim f(x + \xi) = f(x) \quad \text{für} \quad \lim \xi = +0.$$

Nehmen wir dazu den Satz in Nr. 16, so können wir unmittelbar behaupten, dafs $f(x + \xi)$ bei $\lim \xi = +0$ gleichmäfsig für alle Werthe $a \leqq x \leqq c$ zum Grenzwerthe $f(x)$ convergirt, unter c

irgend einen Werth zwischen a und b verstanden. Denn für die genannten Werthe von x kann ξ alle Werthe $0 < \xi \leqq b - c$ durchlaufen. Es hätte jedoch keinen Sinn zu behaupten, dafs der obige Grenzübergang gleichmäfsig erfolge für alle Werthe $a \leqq x < b$.

20. Nunmehr wären bezüglich der eindeutigen Functionen von zwei und mehreren unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$, für deren jede irgend ein Grenzübergang zu einem constanten Werthe festgesetzt ist, ähnliche Betrachtungen anzustellen, wie wir sie hinsichtlich der Functionen einer Veränderlichen in Nr. 5—7 vorführten. Wir wollen uns jedoch hier darauf beschränken zu erklären, was man unter dem Grenzwerthe einer solchen Function unter der Voraussetzung zu verstehen habe, dafs die $x_1, x_2 \ldots x_m$ je zu einem constanten Grenzwerthe $a_1, a_2 \ldots a_m$ convergiren und dabei unabhängig von einander verbleiben. D. h. schreiben wir der x_1 irgend welche Werthe x'_1 vor, wofür $\lim x'_1 = a_1$; der x_2 irgendwelche Werthe x'_2, wofür $\lim x'_2 = a_2$ u. s. f., so soll $f(x_1, x_2 \ldots x_m)$ für jedes Werthsystem $x'_1, x'_2 \ldots x'_m$ definirt sein und jeder dieser Werthe von f in den folgenden Relationen verwendet werden können. Es seien z. B. die $a_1, a_2 \ldots a_m$ endliche Zahlen und

$$\lim x_1 = a_1 + 0, \qquad \lim x_2 = a_2 + 0 \ldots,$$

$$\lim x_m = a_m + 0;$$

ebenso sei auch b eine bestimmte Zahl. Unter diesen Voraussetzungen drücken wir durch die Formel

$$\lim_{x_1 = a_1 + 0 \ldots x_m = a_m + 0} f(x_1 \ldots x_m) = b$$

kurz folgendes Verhalten der Function f aus. Jeder Zahl $\varepsilon > 0$ können positive Zahlen $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m$ zugeordnet werden in der Art, dafs für jedes System von Werthen, die den Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$ zufolge ihrer Definition zukommen und dabei die Bedingungen erfüllen

$$a < x_1 < a + \delta_1, \qquad a < x_2 < a + \delta_2 \ldots,$$

$$a < x_m < a + \delta_m,$$

einer Veränderlichen, wovon wir einen besonderen Fall am Schlusse von Nr. 12 anführten.

Satz.[17]) Ist die eindeutige Function $\varphi(y_1, y_2 \ldots y_m)$ an der Stelle

$$y_1 = b_1,\ y_2 = b_2 \ldots y_m = b_m$$

stetig und haben die Functionen

$$f_1(x),\ f_2(x) \ldots f_m(x)$$

bei einem und demselben Grenzübergange der unabhängigen Veränderlichen x bez. die endlichen Grenzwerthe $b_1, b_2 \ldots b_m$, so ist für den nämlichen Grenzübergang von x

$$\lim \varphi\{f_1(x),\ f_2(x) \ldots f_m(x)\} = \varphi(b_1, b_2 \ldots b_m).$$

Beweis. Es sei z. B. $\lim x = a + 0$. Zunächst weifs man, dafs zu $\varepsilon > 0$ positive Zahlen $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_m$ gehören in der Art, dafs für alle

$$|y_1 - b_1| < \eta_1,\quad |y_2 - b_2| < \eta_2 \ldots |y_m - b_m| < \eta_m,$$
$$\varphi(y_1, y_2 \ldots y_m) - \varphi(b_1, b_2 \ldots b_m)| < \varepsilon.$$

Ferner giebt es Zahlen $\delta_r > 0$, so dafs für die hierher gehörigen

$$a < x < \delta_r,\qquad |f_r(x) - b_r| < \eta_r,\qquad (r = 1, 2 \ldots m).$$

Somit ist, wenn δ die kleinste der Zahlen $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m$ bedeutet,

$$|\varphi\{f_1(x), f_2(x) \ldots f_m(x)\} - \varphi(b_1, b_2 \ldots b_m)| < \varepsilon,$$

falls nur $a < x < a + \delta$.

Derselbe Satz gilt auch, wenn in $\varphi(y_1 \ldots y_m)$ an Stelle der $y_1 \ldots y_m$ Functionen f_r der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ gesetzt werden und für die nämlichen von einander unabhängigen Grenzübergänge derselben

$$\lim f_1 = b_1 \ldots \lim f_m = b_m.$$

Die Sätze in Nr. 13, 15, 16 lassen sich ebenfalls auf stetige Functionen von zwei und von mehreren Veränderlichen ausdehnen. So darf man behaupten, dafs eine eindeutige Function $f(x, y)$ der Veränderlichen x, y, welche stetig ist in allen Punkten eines in der XY-Ebene

verzeichneten endlichen Gebietes $\mathfrak{F}$ mit Einschluſs der Begrenzung, eine endliche obere (untere) Grenze g hat und daſs es im Gebiete $\mathfrak{F}$ mindestens einen Punkt x_0, y_0 giebt, wofür $f(x_0, y_0) = g$. — Der Beweis dieses Satzes ist dem des Satzes in Nr. 13 ähnlich. Er beruht auf dem Hilfssatze: „Ist $f(x, y)$ definirt für alle Werthsysteme im Gebiete $\mathfrak{F}$ und g ihre obere Grenze, die auch $+\infty$ sein kann, so giebt es darin mindestens einen Punkt $x = x_0$, $y = y_0$, derart, daſs in jeder Umgebung von $x_0 y_0$:

$$x_0 - \delta \leqq x \leqq x_0 + \delta, \qquad y_0 - \varepsilon \leqq y \leqq y_0 + \varepsilon,$$

was auch die positiven Zahlen δ, ε sein mögen, die obere Grenze von $f(x, y)$ g sein muſs." Um denselben zu zeigen, theilt man das Gebiet $\mathfrak{F}$ durch Parallele zu den Coordinatenaxen in Rechtecke und verfährt so wie a. a. O.

Näheres Eingehen auf die Theorie der stetigen Functionen von mehreren Veränderlichen, sowie auf die geometrische Darstellung derselben im Falle $m = 2$ kann hier unterbleiben.

Anhang. Die unendlichkleinen Gröfsen.

22. Erste Theorie. Die Momente der Functionen. Man sagt, daſs eine Veränderliche x unendlich klein wird, wenn sie den Grenzwerth 0 hat. Ferner: Ist $\lim f(x) = 0$ bei $\lim x = a$, so wird $f(x)$ zugleich mit $x - a$ unendlichklein. Dabei kann der Quotient $f(x) : (x - a)$ einen endlichen Grenzwerth b haben, wie mehrere Formeln in Nr. 10—12 zeigen. Das gilt insbesondere von den Quotienten $\{g(x) - g(a)\} : (x - a)$, worin $g(x)$ eine für $x = a$ stetige Function bedeutet, — mit deren Betrachtung die Differentialrechnung sich beschäftigt. Diese Thatsache (sowie die allgemeine, daſs der Quotient zweier Functionen von x einen endlichen Grenzwerth haben kann), — deren arithmetische Bedeutung wir in Nr. 5 kennen gelernt haben, hielt man früher für erklärt durch die Phrase: der Quotient $f(x) : (x - a)$ habe für $x = a$ einen endlichen Werth b. Da aber der Nenner $x - a$ für $x = a$ Null ist,

so verliert dieser Quotient für $x = a$ jede Bedeutung. Soll dennoch unter den obwaltenden Umständen die Zahl λ durch eine Division entstehen, so können Dividend und Divisor nicht reelle Zahlen sein, sondern müssen etwas wesentlich davon Verschiedenes, zum Rechnen geeignete Gröfsen einer neuen Art sein.

Nach den Erörterungen im 3. Abschnitte wird es einer weiteren Auseinandersetzung nicht mehr bedürfen, wie man bei Aufstellung von neuen Gröfsen vorzugehen hat. Wir schliefsen uns hierbei lediglich an Euclid an. Hätte man sich auch früher daran gehalten, so wäre der Analysis manche Verirrung erspart geblieben. Wir theilen die folgende Untersuchung hier deswegen mit, weil sie eine lehrreiche Anwendung der im 3. Abschnitte entwickelten Principien bildet, nicht etwa, weil wir eines von den gegenwärtig bekannten Systemen von unendlichkleinen Gröfsen für in der Analysis unentbehrlich halten. Der Kürze halber beschränken wir uns auf eine gedrängte Übersicht derselben.[18])

Es sei für die unabhängige Veränderliche x ein bestimmter Grenzübergang festgestellt z. B. $\lim x = a + 0$. Er soll im Folgenden immer da gemeint sein, wo über das Verhalten von x nichts Anderes angegeben ist. Ferner sei gegeben ein System von Functionen $f(x)$, deren jede bei dem in Rede stehenden Grenzübergange von x den Grenzwerth 0 hat, dabei aber beständig positiv ist d. i.

$$\lim f(x) = + 0.$$

Wir nehmen noch an, dafs jede rationale Function von beliebig, aber endlich vielen Functionen unseres Systemes bei dem festgesetzten Grenzübergange $\lim x = a + 0$ einen Grenzwerth besitze (der auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein kann). Es läfst sich leicht zeigen, dafs die Functionen, welche rational gebildet sind aus Potenzen mit positiven constanten Exponenten von beliebigen unter den Functionen x,

$$1 : l(x - a) = \lambda_1(x - a), \quad 1 : l(-\lambda_1 (x - a)) = \lambda_2 (x - a)$$
$$\ldots 1 : l(-\lambda_{n-1}(x - a)) = \lambda_n(x - a) \ldots$$

und den reciproken Werthen von

$$e^{\frac{1}{x-a}} = e_1\left(\frac{1}{x-a}\right), \quad e_1\left\{e_1\left(\frac{1}{x-a}\right)\right\} = e_2\left(\frac{1}{x-a}\right), \ldots$$

$$e_1\left\{e_{n-1}\left(\frac{1}{x-a}\right)\right\} = e_n\left(\frac{1}{x-a}\right) \ldots$$

ein solches System ausmachen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft ist es jedoch im Allgemeinen nicht möglich, die Frage, ob dieses System durch eine gegebene Function $f(x)$, wofür $\lim f(x) = +0$, erweitert werden könne, blofs aus der Natur von $f(x)$ zu beantworten.[19]) Sie kann eben in der Regel nur durch directen Versuch entschieden werden. Dieses Umstandes wegen bleibt die nachstehende Theorie hinsichtlich ihrer practischen Verwendbarkeit zurück hinter anderen, auf ähnliche Weise gewonnenen z. B. der Euclid'schen Verhältnifslehre.

Nun werden die folgenden Definitionen aufgestellt.

1. Definition. Jeder Function $f(x)$ unseres Systems wird ein neues Object zugeordnet: $\mathfrak{u}(f)$, das wir auf einen von Newton gebrauchten Terminus zurückgreifend,[20]) als Moment der Function $f(x)$ bezeichnen.

2. Definition. Es sei

$$\mathfrak{u}(f) = \mathfrak{u}(g),$$

wenn $\lim (f:g) = 1$.

3. Definition. Es sei

$$\mathfrak{u}(f) > \mathfrak{u}(g),$$

wenn $\lim (f:g) > 1$ ($+\infty$ eingeschlossen); und

$$\mathfrak{u}(f) < \mathfrak{u}(g),$$

wenn $\lim (f:g)$ Null oder ein positiver echter Bruch.[21])

Ein Blick auf die Gleichung

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)}$$

zeigt, dafs die in I. 2, 3 verlangten formalen Bedingungen erfüllt sind.

Da neben

$$\lim f = \lim g = +0$$

auch

$$\lim (f+g) = +0,$$

so erklären wir

4. Definition. $\mathfrak{u}(f+g)$ und jedes ihm gleiche M ment als die Summe von $\mathfrak{u}(f)$ und $\mathfrak{u}(g)$ d. i.

$$\mathfrak{u}(f+g) = \mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g).$$

Wieder erhellt unmittelbar, dafs die Sätze 1)—4) in II. auch bei der Addition der Momente gelten. Der letzt dafs neben

$$\mathfrak{u}(f) = \mathfrak{u}(f_1)$$

auch

$$\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g) = \mathfrak{u}(f_1) + \mathfrak{u}(g),$$

folgt aus den Gleichungen

$$\frac{f+g}{f_1+g} = \left(\frac{f}{g}+1\right) : \left(\frac{f_1}{g}+1\right) = \left(1+\frac{g}{f}\right) : \left(\frac{f_1}{f}+\frac{g}{f}\right),$$

welche zeigen, dafs in jedem Falle

$$\lim \{(f+g) : (f_1+g)\} = +1.$$

An Stelle der Sätze 5) und 6) a. a. O. treten aber d folgenden:

5) „$\mathfrak{u}(f)+\mathfrak{u}(g)$ ist gröfser oder gleich $\mathfrak{u}(f)$, je nac dem $\lim (g:f)$ nicht Null oder Null ist."

6) „Wenn $\mathfrak{u}(f) > \mathfrak{u}(f_1)$, so ist

$$\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g) > \mathfrak{u}(f_1) + \mathfrak{u}(g).$$

Das Zeichen $=$ steht nur dann, wenn

$$\lim (f:g) = \lim (f_1:g) = +0."$$

Durch einen Blick auf das dritte Glied in (a) erkennt ma dafs

$$\lim \{(f+g) : (f_1+g)\} > 1,$$

wenn $\lim (g:f)$ endlich ist. Ist aber $\lim (f:g) = 0$, so ve schwindet auch $\lim (f_1:g)$ und man hat nach (a)

$$\lim \{(f+g) : (f_1+g)\} = 1.$$

Der Satz (7) a. a. O. besteht aber auch hier. „Nebe

$$\mathfrak{u}(f) > \mathfrak{u}(f_1), \qquad \mathfrak{u}(g) > \mathfrak{u}(g_1)$$

ist

$$u(f) + u(g) > u(f_1) + u(g_1)",$$

wie man durch zweimalige Anwendung des Satzes 6) unmittelbar erkennt.

Subtraction der Momente. „Im Falle dafs

$$u(f) > u(g),$$

hat die Gleichung

$$u(g) + \mathfrak{x} = u(f) \qquad (b)$$

die eine und nur die eine Lösung

$$\mathfrak{x} = u(f - g),$$

welche kleiner ist als $u(f)$." Setzt man nämlich

$$\mathfrak{x} = u(h),$$

so mufs

$$\lim \{(g + h) : f\} = 1,$$

also

$$\lim (h : f) = 1 - \lim (g : f)$$

sein, folglich da

$$0 < \lim [(f - g) : f] < 1, \qquad \lim \{h : (f - g)\} = 1$$

d. i.

$$\mathfrak{x} = u(f - g),$$

was auch in (*b*) genügt. — Wenn $u(f) = u(g)$, so haben wir zufolge III. 3 die Differenz $u(f) - u(g)$ als unzulässig zu betrachten. Denn die Gleichung (*b*) hat nun unbegrenzt viele Lösungen, da

$$u(f) + u(h) = u(g),$$

wofern nur

$$\lim (h : f) = 0,$$

und unter diesen Functionen h solche sich befinden, deren Momente ungleich sind. — Im Falle $u(f) < u(g)$ ist nach obigem Satze 5) die Gleichung (b) unmöglich.

Von den Subtractionsregeln in II. 4 gelten für die Momente aufser dem 1. Satze, wie eine besondere Untersuchung darzuthun hat, noch die Sätze 3—5, 7, 9—12. Der 2. Satz: „Ist

$$u(f) + u(g) = u(f) + u(g_1),$$

so hat man

$$u(g) = u(g_1)''$$

gilt sicher nur, wenn $\lim (g:f)$ nicht **Null ist.** Von d Formeln

6) $$\{u(f) + u(g)\} - u(g) = u(f),$$

8) $$\{u(f) + u(h)\} - \{u(g) + u(h)\} = u(f) - u(g)$$

setzt die erstere voraus, dafs $\lim (f:g)$ **nicht Null s** die letztere neben $u(f) > u(g)$, dafs **nicht zugleich**

$$\lim (f:h) \quad \text{und} \quad \lim (g:h)$$

verschwinden. Dann sind nämlich die Differenzen **auch auf d** linken Seiten möglich. — Die Formeln (13)—(17) in II. bestehen auch für die Momente.

Die Summe $u(f) + u(f) + \ldots$ (n-mal) **d. i.** $u(nf)$ hei das n-fache von $u(f)$. Wenn

$$u(g) < u(f),$$

so giebt es nicht immer eine natürliche **Zahl** p, so d

$$pu(g) > u(f).$$

Denn ist

$$\lim (g:f) = 0,$$

so ist

$$\lim (pg:f) = 0,$$

was auch p sein mag.

Multiplication der Momente. Da **neben**

$$\lim f = \lim g = +0$$

auch

$$\lim fg = +0,$$

so können wir $u(fg)$ als das Product von $u(f)$ **mit** $u(g)$ klären:

$$u(fg) = u(f) \cdot u(g). \qquad (5.\ \text{Def.})$$

Dabei ist leicht nachzuweisen, dafs **sämmtliche Reg** über die Multiplication der absoluten Zahlen **in II. 6** un auch für die der Momente gelten.

Die Gleichung

$$u(g) \cdot \mathfrak{x} = u(f)$$

hat eine (und dann nur eine) Lösung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u}(f:g),$$

blofs wenn $\lim(f:g) = 0$ ist.

23. Erweiterung des Systemes der Momente. Wie wir soeben bemerkten, ist die Division der Momente nicht unbedingt möglich. Da aber hinsichtlich der Multiplication der Momente die Annahmen A), B), C), D_1), E) in III. 1—5 bestehen, so können wir die Sätze VI), VII) in III. 7, 10 anwenden.

6. Definition. „In dem Falle, wo $\lim(f:g)$ eine positive Zahl oder $+\infty$ ist, soll ein von den Momenten verschiedenes Ding, mit $\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)$ bezeichnet, existiren, welches der Gleichung

$$\mathfrak{u}(g)\cdot\{\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)\} = \mathfrak{u}(f)$$

genügt.

7. Definition. „Es sei $\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)$ gleich, gröfser, kleiner als $\mathfrak{u}(f_1):\mathfrak{u}(g_1)$, je nachdem $\mathfrak{u}(f)\cdot\mathfrak{u}(g_1)$ gleich, gröfser, kleiner als $\mathfrak{u}(f_1)\cdot\mathfrak{u}(g)$ d. h. je nachdem $\lim(fg_1:f_1g)$ gleich, gröfser, kleiner als 1. — Ferner sei $\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)$ gröfser als jedes Moment $\mathfrak{u}(f_1)$." — Letzteres folgt unmittelbar nach der 4. Def. in III. 10, da

$$\mathfrak{u}(f) > \mathfrak{u}(f_1)\,\mathfrak{u}(g)$$

wegen

$$\lim(f:f_1g) = +\infty.$$

Die Producte der neuen Gröfsen sind zu bilden nach den Formeln

8. Definition.

$$\{\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)\}\cdot\mathfrak{u}(h) = \mathfrak{u}(fh):\mathfrak{u}(g),$$

$$\{\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)\}\cdot\{\mathfrak{u}(f_1):\mathfrak{u}(g_1)\} = \mathfrak{u}(ff_1):\mathfrak{u}(gg_1).$$

Es steht nunmehr nichts im Wege, die Gröfse

$$\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g),$$

wenn

$$\lim(f:g)$$

einen endlichen positiven Werth besitzt, mit dieser absoluten Zahl zu identificiren:

$$\mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g) = \lim (f : g);$$

so dafs die Erweiterung des Systemes der Momente durch die absoluten Zahlen und die Gröfsen

$$\mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g),$$

worin

$$\lim (f : g) = + \infty$$

ist, gebildet wird.

Damit ist die Addition im neuen Gröfsensysteme zum Theile schon gegeben. Diese Summen sind jedoch auch specielle Fälle der zweiten der Formeln

$$\mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g) + \mathfrak{u}(h) = \mathfrak{u}(f + gh) : \mathfrak{u}(g)$$

$$\mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g) + \mathfrak{u}(f_1) : \mathfrak{u}(g_1) = \mathfrak{u}(fg_1 + f_1 g) : \mathfrak{u}(gg_1),$$

wodurch wir die neue Addition allgemein erklären. (9. Def.) Sie gelten offenbar, wenn die darin vorkommenden Quotienten sich auf Momente zurückführen lassen. Die erste Formel fällt, wenn

$$\mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g)$$

eine neue Gröfse ist, zusammen mit der folgenden

$$\mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g) + \mathfrak{u}(h) = \mathfrak{u}(f) : \mathfrak{u}(g). \qquad (d)$$

Denn wenn $\lim (f : g)$ nicht Null ist, so hat man stets

$$\lim \frac{f + gh}{g} \cdot \frac{g}{f} = \lim \left\{ 1 + \frac{g}{f} \cdot h \right\} = 1.$$

So sind wir auf arithmetischem Wege zu der Regel gelangt „Eine endliche Gröfse ändert sich nicht, wenn zu ihr eine unendlich kleine addirt wird."

Mit diesen Formeln erhält man dieselbe Addition und Subtraction wie im Systeme der Momente, wovon man sich durch eine besondere Untersuchung zu überzeugen hat. Man wird u. A. leicht finden, dafs die Gleichung $\beta + \xi = \alpha$ — unter α, β Gröfsen des erweiterten Systemes verstanden — stets eine und nur eine Auflösung für ξ zuläfst, wenn $\alpha > \beta$. Wie die Formel (d) zeigt, so hat die Gleichung

$$\alpha + \xi = \alpha,$$

auch wenn α der neuen Art angehört, unzählige Auflösun-

gen; denn man kann für ξ jedes Moment setzen. Somit ist jede Differenz $\alpha - \alpha$ unbrauchbar.

Man könnte glauben, dafs durch nochmalige Anwendung des Satzes VI in III. 7 das bisher erhaltene Gröfsensystem eine neue, den negativen Zahlen analoge Erweiterung erfahren werde. Das ist jedoch nicht der Fall. Denn neben den Differenzen $\alpha - \alpha$ müssen auch alle jene ausgeschlossen werden, welche beim Gebrauche der Formeln

$$(\alpha - \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) - \beta$$
$$(\alpha - \beta) + (\alpha' - \beta') = (\alpha + \alpha') - (\beta + \beta')$$

bereits als unmöglich erkannte Resultate liefern würden. Solche würden aber durch jede Differenz $\alpha - \beta$, worin $\alpha < \beta$, erzeugt vermöge der Formel

$$(\alpha - \beta) + (\beta - \alpha) = (\alpha + \beta) - (\alpha + \beta).$$

24. Zweite Theorie. Die Momente sind keineswegs die allein möglichen unendlich kleinen Gröfsen. Man kann vielmehr auch so vorgehen. Es sei gegeben ein System von Functionen $f(x)$, für welche ebenfalls bei dem oben festgesetzten Grenzübergange von x $\lim f(x) = +0$. Ferner soll jede Function

$$f_1(x)^{\mu_1},\ f_2(x)^{\mu_2},\ \ldots f_n(x)^{\mu_n},$$

worin $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ beliebige rationale Zahlen sein können, bei demselben Grenzübergange von x einen Grenzwerth haben. Wir sagen dann, $\mathfrak{u}(f)$ soll gleich, gröfser oder kleiner als $\mathfrak{u}(g)$ sein, je nachdem $\lim (f:g)$ eine positive endliche Zahl, 0 oder $+\infty$ ist. Als die Summe $\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g)$ betrachten wir jetzt $\mathfrak{u}(fg)$, woraus sich leicht ergiebt, dafs dieses System $\mathfrak{u}(f)$ zu den absoluten Gröfsen im weiteren Sinne gehört (V. 1). Auch hier können wir von dem in Nr. 22 erwähnten speciellen Systeme von Functionen $f(x)$ ausgehen und haben dann die nämliche Bemerkung zu machen, wie dort.

Dabei ergiebt sich zunächst, dafs die neuen Gröfsen dem Axiome des Archimedes nicht immer gehorchen. $a = 0$ setzend, hat man

$$u(x) < u\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$$

und

$$pu(x) = u(x^p) < u\left(e^{-\frac{1}{x}}\right),$$

was auch p für eine natürliche Zahl sein mag (vgl. (i) Nr. 11).

Verstärkt man das obige System $f(x)$ noch durch Functionen $e^{-\frac{1}{f(x)}}$ und hebt aus den zugehörigen u-Größ das zusammenhängende System $u(x^\mu)$ — $0 < \mu \leqq 1$ hera so zeigen die Gruppen $u(x^\mu)$ — $\mu > 1$ — und $u(x^\mu)$ $\mu < 1$ — einen Schnitt desselben an. Diese Lücke wi aber nicht nur geschlossen durch die Gröfse u(sondern auch durch alle Gröfsen $u(g_n)$, wo

$$g_n(x) = x^{\frac{1}{1+\lambda_n(x)}} \qquad (n \geq 2).$$

Denn für diese Functionen ergiebt sich in der That $\lim x = +0$

$$\lim \frac{g_n(x)}{x^\mu} = +\infty \quad \text{oder} \quad +0,$$

je nachdem $\mu >$ oder < 1;

$$\lim \frac{g_n(x)}{x} = 0 \qquad (n > 2)$$

und

$$\lim \frac{g_m(x)}{g_n(x)} = 0 \qquad (m < n).$$

Eine Multiplication ist für dieses System von unendl kleinen Gröfsen bisher nicht aufgestellt worden.

25. Die vorstehenden Entwickelungen lassen sich mittelbar übertragen auf die Unendlich der Functio d. h. auf Gröfsen $u(F)$, welche den gehörig auszuwählen Functionen $F(x)$, wofür $\lim F(x) = +\infty$, zugeordnet wer Die zweite Theorie der Unendlich hat P. du Bois-Reym ausgebildet und insbesondere auf die Eigenthümlichkei dieses Gröfsensystemes gegenüber den absoluten Gröfsen engeren Sinne aufmerksam gemacht.[22])

Aus den unendlich kleinen Gröfsen und den Unendlich der zweiten Art läfst sich ein System von relativen Gröfsen im weiteren Sinne ableiten, indem man noch den Functionen $\varphi(x)$, wofür $\lim \varphi(x)$ eine positive endliche Zahl ist, eine Gröfse 0 zuordnet und die Formel

$$\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g) = \mathfrak{u}(fg)$$

für die Functionen $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ ohne Unterschied gelten läfst.

X. Abschnitt.

Die unendlichen Reihen mit reellen Gliedern.

1. Convergente Reihen. Es sei eine unbegrenzte Folge von reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ gegeben d. h. eine Vorschrift, nach welcher man beliebig viele derselben bestimmen und anordnen kann. Bilden wir die Partialsummen

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \ldots,$$
$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

wofür man auch schreibt

$$s_n = \sum_0^n{}^p a_p;$$

so entsteht die Frage, wie verhält sich s_n beim Grenzübergang $\lim n = +\infty$. Es ist leicht nachzuweisen, dafs hierbei alle jene Fälle eintreten können, die in IX. 7 unterschieden sind.

Wenn $\lim s_n$ bei $\lim n = +\infty$ eine endliche Zahl a ist, so heifst die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ convergent, a der Grenzwerth derselben. a als die „Summe" der unendlich vielen Glieder $a_0, a_1, \ldots$ zu erklären, ist, wie sich in Nr. 8 zeigen wird, nicht immer zulässig. Schreibt man, was manchmal bequem ist,

$$(1) \qquad a = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \sum_0^\infty{}^n a_n,$$

so soll das im Allgemeinen nichts Anderes besagen, als dafs

bei $\lim n = +\infty$ $\lim s_n = a$, d. h. dafs zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ gehört, so dafs für alle $n > \mu$

$$|s_n - a| < \varepsilon.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung, dafs $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ convergent sei, besteht darin, dafs zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl μ gehöre, in der Art, dafs wenn $n > \mu$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+r}| < \varepsilon, \tag{2}$$

was für eine natürliche Zahl auch r sein mag:

$$r = 1, 2 \ldots$$

Der Satz folgt unmittelbar aus IX. 8. Denn dazu, dafs $\lim s_n = a$ bei $\lim n = +\infty$, ist notwendig und hinreichend, dafs für alle $n > \mu$

$$|s_{n+r} - s_n| < \varepsilon$$

sei, wobei r alle Werthe 1, 2 ... annehmen kann. Es ist aber

$$s_{n+r} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+r}.$$

Aus (2) folgt für $r = 1$

$$|a_{n+1}| < \varepsilon,$$

wenn nur $n > \mu$. D. i.

$$\lim_{n=+\infty} a_n = 0.$$

Zur Convergenz von $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ ist notwendig, jedoch nicht hinreichend, dafs das allgemeine Glied der Reihe a_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth Null hat. Das Zutreffen der Bedingung $\lim a_n = 0$ bei $\lim n = +\infty$ ist zur Convergenz der Reihe (1) nicht hinreichend, wie einfache Beispiele zeigen. Wir werden sogleich sehen, dafs für die harmonische Reihe

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \tfrac{1}{2}, \ldots s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n}, \tag{3}$$

$$\lim_{n=+\infty} s_n = +\infty.$$

Beispiele convergenter Reihen.

1) Die unendliche geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + \ldots$$

convergirt dann und nur dann, wenn x dem absol ten Betrage nach kleiner als 1 ist, und zwar ist i Grenzwerth $\frac{1}{1-x}$.

Man hat nach VIII. 1, Gl. (III)

$$(4) \qquad s_n = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Setzen wir $|x = X$ und nehmen zunächst an, es $X < 1$, also

$$X = 1 : (1 + d),$$

wo $d > 0$. Dann ist nach VIII. 2

$$\left|\frac{1}{1-x} - s_n\right| < \frac{X^{n+1}}{1-X} = \frac{1}{d(1+d)^n} < \frac{1}{d(1+nd)};$$

somit

$$\left|\frac{1}{1-x} - s_n\right| < \varepsilon,$$

wenn nur

$$n > \frac{1 - d\varepsilon}{d^2\varepsilon}.$$

Wir finden also

$$\lim_{n=+\infty} s_n = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < +1).$$

Ist $X > 1$, so kann die unendliche geometrische P gression nicht convergiren, da $|x^n > 1$.

2) Es sei

$$a_0 = b_0 - b_1, \quad a_1 = b_1 - b_2, \ldots a_n = b_n - b_{n+1},$$

so ist

$$s_n = b_0 - b_{n+1}.$$

Die Reihe

$$(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \ldots$$

convergirt dann und nur dann, wenn b_n bei $\lim n = +$ einen endlichen Grenzwerth b hat. Und zwar ist

$$\lim_{n=+\infty} s_n = b_0 - b.$$

Falls $b = 0$ ist, so ist der Grenzwerth der in Rede stehenden Reihe die Zahl b_0 selbst. — Vermittelst der soeben abgeleiteten Formeln kann man die Grenzwerthe mancher Reihen finden. Setzt man z. B.

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \tfrac{1}{2}, \; b_2 = \tfrac{1}{3}, \ldots \; b_n = \frac{1}{n+1},$$

so ergiebt sich

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

2. Divergente Reihen. Hat s_n bei $\lim n = +\infty$ keinen endlichen Grenzwerth, so heifst die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ divergent. Dabei können die s_n bei $\lim n = +\infty$ folgendes Verhalten aufweisen.

1) $\lim\limits_{n=+\infty} s_n = +\infty$ oder $-\infty$.

Auch hier ist es voreilig zu sagen, die genannte Reihe habe eine unendliche Summe (vgl. Nr. 8).

2) s_n hat bei $\lim n = +\infty$ zwei verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen, von denen eine oder auch beide unendlich sein können. Sind sie beide endliche Zahlen, O die obere, U die untere Unbestimmtheitsgrenze, so sagt man, die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ schwanke bei $\lim n = +\infty$ zwischen den Grenzen O und U und nennt $O - U$ den Betrag der Schwankung.

Beispiele. 1) Die unendliche geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + \ldots$$

hat den Grenzwerth $+\infty$, falls $x > 1$; sie schwankt bei $\lim n = +\infty$ zwischen den Grenzen 0 und 1, falls $x = -1$; und zwischen $-\infty$ und $+\infty$, falls $x < -1$.[1])

Die Sätze folgen aus (4) unmittelbar. Nur wenn $x = +1$ oder -1 betrachte man die Reihe unmittelbar. Im ersten Falle ist

$$s_n = n + 1;$$

im letzteren

$$s_{2k} = 1, \quad s_{2k+1} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots).$$

2) Die im zweiten Beispiele der vorigen Nummer betrachtete Reihe

$$(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \ldots$$

divergirt zufolge der Formel $s_n = b_0 - b_{n+1}$, wenn $\lim b_k$ bei $\lim n = +\infty$ oder $-\infty$ ist und wenn die Unbestimmtheitsgrenzen von b_n bei $\lim n = +\infty$ von einander verschieden sind.

3) Für die Reihe

$$a_{2k} = b_k, \quad a_{2k+1} = -b_{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

d. i.

$$b_0 - b_1 + b_1 - b_2 + b_2 - \ldots \tag{5}$$

ist

$$s_0 = b_0$$

und überhaupt

$$s_{2k} = b_0; \qquad s_1 = b_0 - b_1$$

und

$$s_{2k+1} = b_0 - b_{k+1}.$$

Hat b_k bei $\lim k = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth $b \gtrless 0$, so schwankt die Reihe (5) bei $\lim n = +\infty$ zwischen $b_0 - b$ und b_0; hat b_k bei $k = +\infty$ den Grenzwerth $\pm\infty$, so sehwankt sie zwischen $\mp\infty$ und b_0. — Nur wenn

$$\lim_{k=+\infty} b_k = 0$$

ist, so convergirt die Reihe (5) und zwar zum Grenzwerthe b_0.

3. Allgemeine Sätze über die unendlichen Reihen. Der Kürze wegen mögen als gleichartig bezeichnet werden Reihen, die convergent sind, solche die denselben unendlichen und solche die gar keinen Grenzwerth haben.

1) „Ist

$$a_n = b_n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

so sind gleichartig die Reihen

$$a_0 + a_1 + a_2 \ldots, \qquad b_0 + b_1 + b_2 + \ldots \tag{6}$$

Denn setzt man

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n = t_n,$$

so ist

$$s_n = t_n.$$

„Convergirt insbesondere die erste der Reihen, so auch die zweite und beide haben denselben Grenzwerth."

2) „Ist in den convergenten Reihen (6) $a_n \geqq b_n$, jedoch nicht durchaus $a_n = b_n$, so ist $a > b$, unter b $\lim t_n$ bei $n = +\infty$ verstanden." — Wenn nämlich $a_m > b_m$, so hat man für $n \geqq m$

$$s_n \geqq t_n + (a_m - b_m),$$

also

$$a \geqq b + (a_m - b_m),$$

d. i.

$$a > b.$$

3) „Die Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ und jede Reihe, die aus ihr durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Summe s sei, hervorgeht, sind gleichartig. — Convergirt die erstere, so auch die letztere, und umgekehrt. Bedeuten a, a' ihre Grenzwerthe, so ist $a = a' + s$. Läfst man insbesondere die $(m+1)$ Anfangsglieder $a_0, a_1, \ldots a_m$ weg, so erhält man die Reihe

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots,$$

deren Grenzwerth r_m ein Rest der Reihe heifst. Dabei hat man

$$a = s_m + r_m.$$

Auch ist $\lim r_m = 0$ bei $\lim m = +\infty$."

Setzt man nämlich

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+p} = r_{m,p},$$

so ist

$$s_{m+p} = s_m + r_{m,p},$$

und wenn bei $\lim p = +\infty$

$$\lim s_{m+p} = a,$$

so hat man

$$r_m = \lim r_{m,p} = a - s_m.$$

Dafs zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ gehört, derart, dafs für $n > \mu$

$$|r_n| < \varepsilon,$$

ist leicht einzusehen nach (2) und IX. 9, II.

Zufolge dieses Satzes kann eine **Reihe, welche** nur Glieder mit einem Zeichen in unbegrenzter **Anzahl** enthält, auf eine solche zurückgeführt werden, **welche nur** Glieder mit diesem Zeichen enthält.

4) Eine convergente Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ ist unbedingt associativ, d. h. leitet man aus ihr eine neue dadurch ab, dafs man ihre Glieder gruppenweise vereinigt, jedoch in der Weise, dafs jede Gruppe nur unmittelbar aufeinander folgende Glieder der ursprünglichen Reihe enthält, so ist auch die neue Reihe convergent und hat denselben Grenzwerth wie die gegebene. Man setze also

$$(7)\quad \left|\begin{array}{ll} a_0 + a_1 & + \ldots + a_{m_1} = A_1 \\ a_{m_1+1} + a_{m_1+2} & + \ldots + a_{m_2} = A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m_{n-1}+1} + a_{m_{n-1}+2} & + \ldots + a_{m_n} = A_n \end{array}\right.$$

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = S_n;$$

so ist

$$\lim S_n = \lim s_n$$

bei $\lim n = +\infty$, da

$$S_1 = s_{m_1},\quad S_2 = s_{m_2}, \ldots S_n = s_{m_n}.$$

Sind die Glieder der convergenten Reihe $A_1 + A_2 + \ldots$ algebraische Summen wie (7) und man läfst **die Klammern** weg, so dafs man die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ **erhält**, so braucht die letztere nicht zu convergiren.[2]) **So ist** die Reihe $(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \ldots$ in Nr. 1 **convergent**, wenn bei $\lim n = +\infty$ $\lim b_n$ endlich ist; die **Reihe (5)**:

$$b_0 - b_1 + b_1 - b_2 + b_2 - \ldots$$

aber nur dann, wenn $\lim b_n = 0$. — Ist aber **die neue Reihe** $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ convergent, so hat sie nach **obigem Satze** denselben Grenzwerth wie $A_1 + A_2 + \ldots$

Das Weglassen der Klammern in $A_1 + A_2 + \ldots$ ist stets gestattet, falls bei $\lim n = +\infty$ $\lim a_n = 0$ und die

Anzahl der in $A_n (n = 1, 2 \ldots)$ stehenden Glieder unter einer endlichen Zahl q liegt. — Denn ist $\lim S_n = A$, so existirt eine Zahl $\mu > 0$, so dafs $|S_n - A| < \varepsilon$ und $|a_n| < \varepsilon$ für $n > \mu$. Demnach folgt

$$|s_p - A| < (q + 1)\varepsilon,$$

wenn nur $p > m_n$, unter n irgend eine ganze Zahl $> \mu$ verstanden.

Als Beispiel einer associativen Umformung diene der folgende, oft benutzte Satz: „Wenn die Zahlen b_n, c_n bei $\lim n = +\infty$ je einen endlichen Grenzwerth b, c haben und wenn die unendliche Reihe

$$\sum_1^\infty{}^r (b_r - b_{r-1}) c_r$$

convergirt, so convergirt auch die unendliche Reihe

$$\sum_0^\infty{}^r b_r (c_r - c_{r+1})$$

und zwar hat man

$$b_0 c_0 + \sum_1^\infty{}^r (b_r - b_{r-1}) c_r = \sum_0^\infty{}^r b_r (c_r - c_{r+1}) + bc.“$$

Er folgt sofort aus der Identität

$$b_0 c_0 + \sum_1^n{}^r (b_r - b_{r-1}) c_r = \sum_1^{n-1}{}^r b_r (c_r - c_{r+1}) + b_n c_n$$

durch den Grenzübergang $\lim n = +\infty$.

5) „Ist k eine von Null verschiedene Constante, so sind die Reihen

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots, \quad ka_0 + ka_1 + ka_2 + \ldots$$

gleichartig. — Convergirt die erstere und zwar zum Grenzwerthe a, so convergirt die letztere zum Grenzwerthe ka.“

6) „Convergiren zwei Reihen wie (6), so convergirt auch die Reihe

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$$

und zwar ist ihr Grenzwerth $a \pm b$, wobei gesetzt ist

$$\lim_{n=+\infty} s_n = a, \quad \lim_{n=+\infty} t_n = b.“$$

Denn es ist

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \ldots + (a_n \pm b_n) = s_n \pm t_n.$$

Daraus folgt, dafs wenn eine der beiden Reihen (6) divergirt, auch die Reihe

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \ldots.$$

divergiren mufs.

Und weiter ergiebt sich aus dem Satze unmittelbar, dafs er auf jede endliche Anzahl von convergenten unendlichen Reihen ausgedehnt werden kann.

4. Reihen mit positiven Gliedern. Wir wenden uns nun zu solchen unendlichen Reihen, die nur gleichbezeichnete Glieder enthalten, wobei es zufolge des 5. Satzes der vorigen Nr. genügt anzunehmen, dafs alle Glieder positiv sind.

Satz. Wenn die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots.$ nur positive Glieder enthält, so hat sie entweder einen endlichen Grenzwerth a oder den Grenzwerth $+\infty$. Im ersteren Falle hat man noch $a > s_n$.

Denn jetzt ist, falls $r > 1$, $s_{n+r} > s_n$, so dafs hier unmittelbar der Satz von IX. 6 angewendet werden kann. Die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ convergirt also immer, wenn eine positive Zahl B existirt, so dafs für jeden Werth von n $s_n < B$. Und umgekehrt: Convergirt die genannte Reihe, so mufs eine Zahl $B > 0$ existiren, so dafs die Summe von beliebigen unter den Gliedern $a_0, a_1, \ldots.$ unter B liegt — ein Satz, der nicht für jede convergente Reihe gilt.

Beispiel. Die harmonische Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n} + \ldots. \tag{8}$$

ist divergent, hat also den Grenzwerth $+\infty$.

Man beweist diesen Satz durch die Bemerkung, dafs ($k \geq 2$)

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k} > \frac{2^k - 2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}.$$

Demnach ist, wenn $n \geq 2^k$,

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > 1 + \frac{k}{2},$$

es kann somit s_n hier gröfser werden, als jede positive Zahl.

Es giebt kein allgemeines Verfahren, nach welchem entschieden werden könnte, ob eine beliebig vorgelegte Reihe aus positiven Gliedern convergent oder divergent ist. Man sucht die Lösung der Frage häufig durch Vergleichung der vorgelegten Reihe mit anderen, deren Verhalten bereits bekannt ist, herbeizuführen. Hierzu dienen die folgenden einfachen Sätze, die vermöge des besonderen, in dem Eingangs erwähnten Satze ausgesprochenen Charakters der Reihen mit positiven Gliedern immer paarweise auftreten.

Es seien

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots., \quad b_0 + b_1 + b_2 + \ldots.$$

Reihen mit positiven Gliedern. Ihre Grenzwerthe, wenn sie convergiren, werden mit a, b bezeichnet.

1) „Ist $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ convergent und von einem bestimmten Werthe von $n(m)$ an $b_{n+l} \leq a_{n+k}$, wo $k\,l$ wie stets im folgenden constante ganze Zahlen mit Einschlufs der 0 bedeuten, so convergirt auch die Reihe

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots.“$$

„Ist aber die erstere Reihe divergent und für

$$n \geq m. \quad b_{n+l} \geq a_{n+k},$$

so divergirt auch die letztere Reihe“.

Im ersten Falle hat man nämlich

$$t_{n+l} - t_{m+l-1} \leq s_{n+k} - s_{m+k-1},$$

also

$$t_{n+l} < a + t_{m+l-1} - s_{m+k-1};$$

somit convergirt $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots.$ Im zweiten Falle ist

$$t_{n+l} > s_{n+k} + t_{m+l-1} - s_{m+k-1};$$

also wegen $\lim s_n = +\infty$ bei $\lim n = +\infty$ auch $\lim t_n = +\infty$.

Anwendung. „Ist für die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \ldots$$

bei $\lim n = +\infty$ $\lim n a_{n+k} > 0$ (bez. $+\infty$), so divergir sie." — Denn setzt man $\lim n a_{n+k} = \alpha$, so gehört zu jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$, so dafs für alle $n > \mu$

$$n a_{n+k} > \alpha - \varepsilon \qquad a_{n+k} > \frac{\alpha - \varepsilon}{n}.$$

Nimmt man $\varepsilon < \alpha$ an, so folgt aus der Divergenz vo (8) unmittelbar die der vorgelegten Reihe. So divergirt di allgemeine harmonische Reihe d. i. die Reihe mit dem al gemeinen Gliede

$$a_n = \frac{\alpha}{\alpha n + \beta},$$

wo α β irgendwelche reelle Zahlen sein können. Denn ist $\lim n a_n = 1$.

Man glaubte einst, dafs alle Reihen, wofür $\lim n a_n =$ ist, convergiren, was Abel durch den Hinweis auf di divergente Reihe

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \ldots + \frac{1}{n \log n} + \ldots$$

(vgl. Nr. 16) widerlegte. Bei dieser Gelegenheit bemerkt Abel, dafs überhaupt keine Function $\varphi(n)$ existiren könn derart dafs die Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ convergire, wenn

$$\lim a_n \varphi(n) = 0,$$

dagegen divergire, wenn dieser Grenzwerth positiv ist.[3])

2) „Ist $a_0 + a_1 + \ldots\ldots$ convergent und für alle $n \geq$

$$\frac{b_{n+l+1}}{b_{n+l}} < \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}},$$

so convergirt auch die Reihe $b_0 + b_1 + \ldots\ldots$"

„Ist die erstere Reihe divergent und für alle $n \geq m$

$$\frac{b_{n+l+1}}{b_{n+l}} > \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}},$$

so divergirt auch die Reihe $b_0 + b_1 + \ldots$."

Um den ersten Satz zu zeigen, bemerke man, dafs wenn $n > m$,

$$\frac{b_{m+l+1}}{b_{m+l}} \leq \frac{a_{m+l+1}}{a_{m+k}}, \quad \frac{b_{m+l+2}}{b_{m+l+1}} < \frac{a_{m+k+2}}{a_{m+k+1}}, \ldots\ldots$$

$$\frac{b_{n+l}}{b_{n+l-1}} < \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}},$$

somit

$$\frac{b_{n+l}}{b_{m+l}} \leqq \frac{a_{n+k}}{a_{m+k}} \quad \text{d. i.} \quad b_{n+l} \leqq \frac{b_{m+l}}{a_{m+k}} a_{n+k}. \tag{9}$$

Nun convergirt die Reihe $a_{m+k+1} + a_{m+k+2} + \ldots$; folglich nach dem 5. Satze in Nr. 3 auch

$$\frac{b_{m+l}}{a_{m+k}} a_{m+k+1} + \frac{b_{m+l}}{a_{m+k}} a_{m+k+2} + \ldots;$$

und zufolge des vorstehenden Satzes die Reihe

$$b_{m+l+1} + b_{m+l+2} + \ldots;$$

somit convergirt auch $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$.

Der zweite Satz folgt auf ähnliche Weise durch die Bemerkung

$$b_{n+l} \geqq \frac{b_{m+l}}{a_{m+k}} a_{n+k}. \tag{10}$$

Anwendung. „Es sei a_0, a_1, $a_2 \ldots a_n$ eine Folge positiver Zahlen; wofür $\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k})$ bei $\lim n = +\infty$ existirt. Ist dieser Grenzwerth kleiner als 1 (Null eingeschlossen), so nehmen die a_n von einem bestimmten Werthe von n an mit wachsendem Index beständig ab und es ist $\lim\limits_{n=+\infty} a_n = 0$. Die Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ ist convergent."

„Wenn aber der genannte Grenzwerth gröfser als 1 ist ($+\infty$ eingeschlossen), so nehmen die a_n von einem bestimmten Werthe von n an mit dem Index beständig zu und es ist $\lim\limits_{n=+\infty} a_n = +\infty$. Die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ ist divergent."

Es sei zunächst

$$\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k})$$

eine endliche Zahl λ. Dann gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein Index m, so dafs für $n \geq m$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} < \lambda + \varepsilon.$$

Ist $\lambda < 1$, so nehme man $\varepsilon < 1 - \lambda$ an, so dafs $\lambda + \varepsilon < 1$. Dann findet man so, wie (9), die Relation

$$n > m \qquad a_{n+k} < a_{m+k}(\lambda + \varepsilon)^{n-m},$$

also $\lim a_n = 0$. Und die Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ convergirt, da die geometrische Reihe

$$1 + (\lambda + \varepsilon) + (\lambda + \varepsilon)^2 + \ldots$$

convergirt. — Ist $\lambda > 1$, so nehme man $\varepsilon < \lambda - 1$, so dafs $\lambda - \varepsilon > 1$. Dann findet man so, wie (10), die Relation

$$n > m \qquad a_{n+k} > a_{m+k}(\lambda - \varepsilon)^{n-m},$$

also

$$\lim a_n = +\infty,$$

woraus die Divergenz der Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ unmittelbar hervorgeht. Der Schlufs ist ähnlich, wenn

$$\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k}) = +\infty.$$

3) „Ist die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ convergent und sind $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ positive Zahlen, die sämmtlich unter einer positiven Zahl C liegen, so convergirt auch die Reihe

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots$$"

„Ist die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ divergent und sind $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ positive Zahlen, die sämmtlich über einer positiven Zahl C' liegen, so divergirt auch die Reihe

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots$$"

Der erste Theil folgt daraus, dafs wenn $0 < \gamma_n < C$,

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + \ldots + a_n\gamma_n < Cs_n < Ca;$$

der zweite daraus, dafs wenn $\gamma_n > C'$,

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + \ldots + a_n\gamma_n > C's_n.$$

5. Sätze über die Reihen mit positiven Gliedern.

1) „Hebt man aus den Gliedern der convergenten unendlichen Reihe

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots. \qquad (1)$$

eine unendliche Folge von Gliedern

$$a_{k_0}, a_{k_1}, \ldots a_{k_n} \ldots$$

heraus, so bilden dieselben eine convergente Reihe. Ihr Grenzwerth ist kleiner als a."

Denn man hat $a_{k_0} + a_{k_1} + \ldots + a_{k_n} < a$.

2) „Sind die Glieder einer convergenten Reihe

$$A = A_0 + A_1 + \ldots + A_n + \ldots$$

selbst Summen aus positiven Zahlen:

$$A_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} + \ldots + a_{k_n}^{(n)} \quad (n = 0, 1 \ldots)$$

so convergirt auch die Reihe, die bei Weglassung der Klammern erscheint:

$$a_0^{(0)} + a_0^{(1)} + \ldots + a_{k_0}^{(0)} + a_0^{(1)} + \ldots + a_{k_1}^{(1)} + \ldots.$$“

Denn wie viele Glieder auch aus dieser Reihe addirt werden, so ist ihre Summe kleiner als A.

3) Jede convergente Reihe aus positiven Gliedern ist commutativ, d. h.: Bringt man ihre Glieder in irgend eine andere Anordnung, so convergirt die neue Reihe und hat denselben Grenzwerth wie die ursprüngliche.

Es seien

$$a_0' + a_1' + a_2' + \ldots. \tag{2}$$

die Glieder von (1) in irgend einer anderen Anordnung, so dafs in dieser Reihe jedes Glied von (1) steht, und umgekehrt. Setzt man

$$a_0' + a_1' + a_2' + \ldots + a_n' = s_n',$$

so folgt unmittelbar dafs $s_n' < a$; also convergirt die Reihe (2) und zwar sei a' ihr Grenzwerth. Und man weifs, zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\mu > 0$, derart dafs für $n > \mu$

$$\begin{aligned} &0 < a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+r} < \varepsilon \\ \text{und} \quad &0 < a_{n+1}' + a_{n+2}' + \ldots + a_{n+r}' < \varepsilon. \end{aligned} \tag{3}$$

Betrachtet man nun zwei Partialsummen s_n, s_n', so werden sie einige Glieder gemein haben, deren Summe σ_n sei. Man findet also

$$s_n = \sigma_n + \varrho_n' \qquad s_n' = \sigma_n + \varrho_n,$$

wobei die in ϱ_n' vereinigten Glieder im Reste $a_{n+1}' + \ldots.$, die in ϱ_n im Reste $a_{n+1} + \ldots$ vorkommen müssen. Bildet man endlich

$$s_n' - s_n = \varrho_n - \varrho_n',$$

so ergiebt sich, dafs für alle $n > \mu$

$$0 < \varrho_n < \varepsilon \qquad 0 < \varrho_n' < \varepsilon,$$

also $|s_n' - s_n| < \varepsilon$. Somit ist $\lim\limits_{n=+\infty} (s_n' - s_n) = 0$ d. i. $a' = a$.

Noch einfacher ist es zu zeigen, dafs **wenn** (1) diver girt, auch (2) divergiren mufs.

4) „Vertheilt man die Glieder von (1) **in eine endlich** Anzahl von unendlichen (oder auch von **theils** endliche theils unendlichen) Reihen

$$\begin{aligned} &a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + \cdots \\ &a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + \cdots \end{aligned}$$

so ist jede derselben convergent und die Summe ihrer Gren werthe gleich dem Grenzwerthe a von (1).“

Der Satz folgt aus dem 6. Satze in Nr. 3 und den soeb bewiesenen Sätzen unmittelbar. — Eine andere Frage i ob der Satz 4) auch noch gilt, wenn man die Glieder v (1) in eine unendliche Anzahl von Reihen vertheilt, w z. B. dadurch geschehen kann, dafs man in die erste Rei a_0, a_1 und die Glieder mit geradem Index setzt, in die zwei die Glieder des Restes, deren Index durch 3 theilbar ist, die dritte die Glieder des nunmehrigen Restes, deren Ind durch 5 theilbar ist u. s. f. Mittelst des folgenden Hil satzes läfst sich jedoch nachweisen, dafs der 4. Satz au jetzt noch besteht.

6. Hilfssatz. „Convergirt jede der in unbegrenzter A zahl vorgelegten unendlichen Reihen

$$\begin{aligned} &a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + \cdots + a_n^{(0)} + \cdots \\ &a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \cdots + a_n^{(1)} + \cdots \\ &a_0^{(2)} + a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \cdots + a_n^{(2)} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + \cdots + a_n^{(m)} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

deren Glieder entweder positiv oder Null sind, u zwar bezüglich zu den Grenzwerthen $a^{(0)}$, $a^{(1)}$, $a^{(2)} \ldots a^{(m)}$.. convergirt ferner die unendliche Reihe

$$a^{(0)} + a^{(1)} + a^{(2)} + \ldots + a^{(m)} + \ldots$$

und zwar zum Grenzwerthe a; so convergirt **auch** die Rei

$$d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n + \ldots, \tag{6}$$

worin

$$d_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \ldots + a_r^{(n-r)} + \ldots + a_n^{(0)},$$

und zwar ebenfalls zum Grenzwerthe a. — Und umgekehrt: Convergirt die unendliche Reihe (6) und zwar zum Grenzwerthe a, so convergirt jede Reihe des Schema (4), und die aus ihren Grenzwerthen gebildete Reihe (5) convergirt ebenfalls und zwar zum Grenzwerthe a."

Beweis. 1. Theil. Es sei

$$d_0 + d_1 + \ldots + d_n = v_n.$$

Denkt man sich die $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Glieder $a_n^{(m)}$ von v_n in Zeilen so geordnet, dafs in jeder der obere Index constant ist, so folgt unmittelbar

$$v_n \leqq a^{(0)} + a^{(1)} + \ldots + a^{(n)} < a.$$

Somit convergirt (6). — Es sei ferner

$$a^{(0)} + a^{(1)} + \ldots + a^{(n)} = s^{(n)};$$

so ist leicht ersichtlich, dafs

$$s^{(n)} = v_n + r_n, \tag{7}$$

worin r_n die unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$a_p^{(n)} + a_{p+1}^{(n-1)} + \ldots + a_{p+r}^{(n-r)} + \ldots + a_{p+n}^{(0)} \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

bedeutet. Da dasselbe kleiner ist als d_{n+p}, so folgt

$$r_n < d_{n+1} + d_{n+2} + \ldots \tag{8}$$

d. i. $\lim r_n = 0$ für $\lim n = +\infty$. Somit ist

$$\lim (s^{(n)} - v_n) = 0$$

d. i.

$$\lim_{n=+\infty} v_n = a.$$

2. Theil. Da

$$a_n^{m)} < d_{m+n} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

so folgt aus der Convergenz von (6) unmittelbar die der Reihe

$$a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + \ldots \quad (m = 0, 1, 2 \ldots).$$

Bezeichnet man ihren Grenzwerth, wie oben, mit $a^{(n)}$ so ist in (7) vermöge der Relation (8)

$$\lim r_n = 0 \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty,$$

also

$$\lim_{n=+\infty} s^{(n)} = \lim_{n=+\infty} v_n = a.$$

Zusatz. Aus dem zweiten Theile des vorstehenden Satzes folgt:

„Unter den über Schema (4) bestehenden Voraussetzungen convergirt jede der Verticalreihen desselben

$$a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \ldots \quad (n = 0, 1, 2 \ldots);$$

die aus ihren Grenzwerthen a_0, a_1, $a_2 \ldots$ gebildete Reihe convergirt ebenfalls, und zwar ist ihr Grenzwerth die Zahl a.

7. Weitere Sätze über die Reihen mit positiven Gliedern.

1) „Es sei die Reihe mit positiven Gliedern

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

convergent und a ihr Grenzwerth. Vertheilt man ihre Glieder, ohne eines zu übergehen, in unendlich viele Reihen (4) so convergirt jede derselben und die aus ihren Grenzwerthen gebildete Reihe convergirt ebenfalls und zwar zum Grenzwerthe a.“[4])

Denn nach dem 3. Satze in Nr. 5 convergirt die Reihe

$$a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_0^{(1)} + \ldots$$

d. i.

$$d_0 + d_1 + d_2 + \ldots$$

und zwar zum Grenzwerthe a.

2) „Convergiren die unendlichen Reihen

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_m + \ldots, \quad b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots$$

und zwar bez. zu Grenzwerthen a, b; so convergirt auch die unendliche Reihe

$$d_0 + d_1 + d_2 + \ldots,$$

worin

$$d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_r b_{n-r} + \ldots + a_n b_0, \quad (9)$$

und zwar zum Grenzwerthe ab.“[5])

Setzt man in der That in (4)

$$a_n^{(m)} = a_m b_n,$$

so convergiren nach dem 5. Satze in Nr. 3 die horizontalen Reihen bezüglich zu den Grenzwerthen $a_0 b$, $a_1 b, \ldots a_m b \ldots$ und die aus ihnen gebildete Reihe convergirt zum Grenzwerthe ab.

Die hier bewiesenen Sätze zeigen in Verbindung mit denen von Nr. 3—5, dafs man den Grenzwerth a einer convergenten unendlichen Reihe mit positiven Gliedern

$$a_0 + a_1 + \ldots$$

als die Summe der unbegrenzt vielen Zahlen $a_0, a_1 \ldots$ erklären kann. Er bleibt nämlich ungeändert, wenn man dieselben in beliebige Aufeinanderfolge bringt und sie vor dem letzten Grenzübergange $\lim m = +\infty$ in Gruppen von endlicher oder unendlicher Gliederzahl vereinigt. Auch bestehen die Sätze 1) und 2) in Nr. 3 gerade wie für Summen von endlicher Gliederzahl.

Nach dem zweiten Satze oben bleibt auch die distributive Eigenschaft des Productes zweier solchen Summen erhalten. Denn in der Reihe mit dem allgemeinen Gliede (9) kann man die Klammern, welche die Glieder $d_1, d_2 \ldots$ einschliefsen, weglassen, so dafs man, um das Product ab zu bilden, die Partialproducte $a_m b_n$ in jeder beliebigen Ordnung aneinanderreihen kann. Auch kann man nach dem ersten Satze dieselben irgendwie in unendliche Reihen vertheilen, diese summiren und schliefslich die Summe ihrer Summen bilden. Man drückt dies aus durch die Formel

$$\sum_0^\infty{}_m a_m \cdot \sum_0^\infty{}_n b_n = \sum_{m,\,n} a_m b_n, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots$$

Sie läfst sich unmittelbar auf das Product einer jeden endlichen Anzahl von convergenten Reihen mit positiven Gliedern ausdehnen d. h. es ist

$$\sum_0^\infty{}_m a_m \cdot \sum_0^\infty{}_n b_n \cdot \sum_0^\infty{}_p c_p = \sum_{m,\,n,\,p} a_m b_n c_p, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \\ p \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots$$

u. s. f. In der That finden wir

$$ab \cdot \sum c_p = \sum_0^\infty e_n, \quad e_n = d_0 c_n + d_1 c_{n-1} + \ldots + d_n c_0,$$

so dafs das links stehende Product gleich ist der Summe aus allen Gliedern $a_m b_n c_p$, deren jedes eben einmal und nur einmal in der rechts stehenden Reihe auftritt.

Es wird sich nun zunächst darum handeln, ob und unter welchen Umständen auch die Grenzwerthe von convergenten unendlichen Reihen, welche sowohl positive als auch negative Glieder in unbegrenzter Anzahl enthalten, als Summen derselben betrachtet werden können. Und zwar wollen wir zuerst an einem einfachen Beispiele nachweisen, dafs das nicht immer zulässig ist.

8. Alternirende Reihen.

Satz.[5*]) „Die unendliche Reihe

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots \qquad (10)$$

worin $a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ positive Zahlen bedeuten, convergirt, wenn diese Zahlen mit wachsendem Index beständig abnehmen und für $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0 haben. Der Grenzwerth a der unendlichen Reihe (10) ist gröfser als jede Partialsumme aus einer geraden, kleiner als jede aus einer ungeraden Anzahl von Gliedern. Jeder Rest der Reihe ist seinem absoluten Betrage nach kleiner als sein erstes Glied."

Beweis. Es sei

$$a_n > a_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

und

$$\lim a_n = 0 \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty.$$

Wir setzen

$$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n = s_n.$$

Da

$$\begin{aligned} s_{2k} &= s_{2k-1} + a_{2k} = s_{2k-2} - (a_{2k-1} - a_{2k}) \\ s_{2k+1} &= s_{2k} - a_{2k+1} = s_{2k-1} + (a_{2k} - a_{2k+1}) \end{aligned} \qquad (k \geq 1),$$

so ergiebt sich, dafs s_{2k} mit wachsendem k beständig abnimmt: $s_0 > s_2 > s_4 \ldots$ Dabei ist aber $s_{2k} > 0$, da $s_{2k-1} > 0$. Somit existirt ein endlicher Grenzwerth

$$a = \lim s_{2k} \quad \text{bei} \quad k = +\infty.$$

Es zeigt sich ferner, dafs s_{2k+1} mit wachsendem k beständig zunimmt:

$$s_1 < s_3 < s_5 \ldots,$$

während

$$s_{2k+1} < s_{2k} \leqq a_0.$$

Also existirt ein endlicher Grenzwerth

$$a' = \lim s_{2k+1} \quad \text{bei} \quad k = +\infty.$$

Nun ist $a = a'$, so dafs

$$s_{2k} > a > s_{2k+1} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots).$$

Denn man findet zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$, so dafs für $k > \mu$ $a_{2k} < \varepsilon$, also

$$0 < s_{2k} - s_{2k-1} < \varepsilon,$$

d. i.

$$\lim_{k=+\infty} (s_{2k} - s_{2k-1}) = 0.$$

Setzt man endlich

$$a = s_n + r_n,$$

wo

$$r_n = (-1)^{n+1} \{a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots\},$$

so folgt vermöge des soeben bewiesenen Satzes

$$0 < (-1)^{n+1} r_n < a_{n+1}.$$

Der Fehler, den man begeht, wenn man s_n anstatt a nimmt, ist absolut genommen kleiner, als das auf das letzte Glied in s_n folgende Glied der Reihe.

Beispiele.[6]) 1) Die unendliche Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \qquad (a)$$

convergirt und ihr Grenzwerth a liegt zwischen $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.[7]) Bringt man die Glieder derselben in die folgende Anordnung

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots \qquad (b)$$

so ist auch diese unendliche Reihe convergent.

Bezeichnen wir die Summe der n ersten Glieder von (b) mit s'_n und betrachten zunächst nur die Partialsummen s'_{3k} und s'_{3k+2}, so entstehen sie auch aus der alternirenden Reihe

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{4}+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}\right)-\frac{1}{2k}+\cdots \qquad (b^*)$$

Die Glieder derselben nehmen bei wachsendem Index beständig ab u sinken unter jede positive Zahl; denn es ist

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}>\frac{1}{2k}>\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+3}.$$

Die Reihe (b*) convergirt somit und ihr Grenzwerth a' ist grösser $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$. Zugleich hat man

$$\lim s'_{3k}=\lim s'_{3k+2}=a' \quad \text{bei} \quad \lim k=+\infty$$

und wegen

$$s'_{3k+1}=s'_{3k}+\frac{1}{4k+1}$$

allgemein

$$\lim_{n=+\infty} s'_n=a'.$$

a' ist also der Grenzwerth der convergenten Reihe (b) und wie m sieht, von a verschieden: es hat sich der Grenzwerth d Reihe (a) bei der angegebenen Versetzung ihrer Glieder g ändert.

Es ist leicht zu zeigen, dafs $a'=\frac{3}{2}a$. — Setzt man

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}=s_n,$$

so folgt

$$s_{4k}=\sum_1^k\left(\frac{1}{4r-3}-\frac{1}{4r-2}+\frac{1}{4r-1}-\frac{1}{4r}\right),$$

$$s'_{3k}=\sum_1^k\left(\frac{1}{4r-3}+\frac{1}{4r-1}-\frac{1}{2r}\right),$$

$$s'_{3k}-s_{4k}=\sum_1^k\left(\frac{1}{4r-2}-\frac{1}{4r}\right)=\frac{1}{2}\sum_1^{k-1}\left(\frac{1}{2r-1}-\frac{1}{2r}\right)=\frac{1}{2}s$$

Beim Grenzübergange $\lim k=+\infty$ ergiebt sich daraus

$$a'-a=\tfrac{1}{2}a, \qquad a'=\tfrac{3}{2}a.$$

2) Die unendliche Reihe

$$1-\frac{1}{\sqrt[m]{2}}+\frac{1}{\sqrt[m]{3}}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[m]{n}}+\cdots$$

convergirt ebenfalls, die Wurzeln positiv genommen. Dagegen hat die Reihe

$$1+\frac{1}{\sqrt[m]{3}}-\frac{1}{\sqrt[m]{2}}+\frac{1}{\sqrt[m]{5}}+\frac{1}{\sqrt[m]{7}}-\frac{1}{\sqrt[m]{4}}+\ldots$$

$$+\frac{1}{\sqrt[m]{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt[m]{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt[m]{2k}}+\ldots \qquad (d)$$

den Grenzwerth $+\infty$. Setzt man wieder

$$1-\frac{1}{\sqrt[m]{2}}+\frac{1}{\sqrt[m]{3}}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[m]{n}}=s_n,$$

$$1+\frac{1}{\sqrt[m]{3}}-\frac{1}{\sqrt[m]{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[m]{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt[m]{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt[m]{2k}}=s'_{3k};$$

so ist

$$s'_{3k}-s_{2k}=\frac{1}{\sqrt[m]{2k+1}}+\frac{1}{\sqrt[m]{2k+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[m]{4k-1}},$$

somit

$$s'_{3k}-s_{2k}>\frac{k}{\sqrt[m]{4k}}=\frac{k^{1-\frac{1}{m}}}{\sqrt[m]{4}}$$

und

$$\lim_{n=+\infty} s'_{3k}=+\infty,$$

also wenn s'_n die Summe der n ersten Glieder in (d) bedeutet, wegen

$$s'_{3k+2}>s'_{3k+1}>s'_{3k}$$

auch

$$\lim_{n=+\infty} s'_n=+\infty.$$

9. Reihen mit positiven und negativen Gliedern in unbegrenzter Anzahl.

Die Reihe

$$a_0+a_1+a_2+\ldots \qquad (1)$$

enthalte sowohl positive, als negative Glieder in unendlicher Anzahl. Die ersteren mögen, in der Ordnung angeschrieben wie sie in (1) vorkommen, die Reihe

$$b_0+b_1+b_2+\ldots+b_p+\ldots \qquad (2)$$

($b_p>0$) bilden; die letzteren ebenso die Reihe

$$-c_0-c_1-c_2\ldots-c_q-\ldots \qquad (3)$$

$(c_q > 0)$. Setzt man

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = s_n$$
$$b_0 + b_1 + \ldots + b_p = t_p$$
$$c_0 + c_1 + \ldots + c_q = u_q,$$

so folgt zunächst

$$s_n = t_{p_n} - u_{q_n}. \qquad (4$$

Daraus ergiebt sich, indem bei $\lim n = +\infty$ auch

$$\lim p_n = \lim q_n = +\infty,$$

sogleich das Folgende:

1) Convergiren die Reihen (2) und (3) und zwar z den Grenzwerthen b, $-c$; so convergirt auch (1) und zwa ist der Grenzwerth der Reihe (1) $b - c$.

2) Convergirt nur eine der Reihen (2), (3), so hat di Reihe (1) stets einen unendlichen Grenzwerth.

3) Divergiren beide Reihen (2), (3), so läfst sich au der Formel (4) im Allgemeinen nichts entnehmen, da

$$\lim_{n=+\infty} t_{p_n} = \lim_{n=+\infty} u_{q_n} = +\infty.$$

In der That zeigen die Beispiele der vorigen Numme dafs in diesem Falle die Reihe (1) sowohl convergiren al divergiren kann.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Frage, unt welchen Umständen eine unendliche Reihe bei jeder beli bigen Anordnung ihrer Glieder convergent ist und stets de selben Grenzwerth liefert.

Satz. Die nothwendige und hinreichende Bedi gung dazu, dafs die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ bei jeder Anordnung ihrer Glieder convergirt un immer denselben Grenzwerth darbietet, besteht i der absoluten Convergenz derselben. D. h. die abs luten Beträge $|a_n|$ der Reihenglieder müssen eine convergent Reihe bilden.

Beweis. Dafs die genannte Bedingung hinreichen sei, ist leicht einzusehen. Convergirt die unendliche Reih

$$|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (5$$

so convergiren die Reihen (2), (3), somit auch (1). Bringt man ihre Glieder in eine andere Anordnung

$$a'_0 + a'_1 + \ldots + a'_n + \ldots, \qquad (6)$$

wodurch an Stelle der Reihen (2), (3) die folgenden treten

$$b'_0 + b'_1 + b'_2 + \ldots, \qquad -c'_0 - c'_1 - c'_2 - \ldots;$$

so sind diese nach dem 3. Satze in Nr. 5 wieder convergent und haben dieselben Grenzwerthe wie (2) und (3). Man findet somit auch die Reihe (6) convergent und zwar dafür denselben Grenzwerth wie für (1), nämlich $b - c$.

Dafs die in Rede stehende Bedingung auch nothwendig sei, wird indirect bewiesen, indem wir zeigen, dafs wenn (5) divergirt, die Reihe (1) aber convergirt, die Glieder von (1) so angeordnet werden können, dafs der Grenzwerth der neuen Reihe irgend eine gegebene Zahl K ist.[8]) — Zunächst bemerken wir, dafs nun beide Reihen (5) divergiren müssen. Denn würde nur eine divergiren, so müfste (1) einen unendlichen Grenzwerth haben. Ferner ist

$$\lim a_n = 0 \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty,$$

d. h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\mu > 0$, so dafs für

$$n > \mu \qquad |a_n| < \varepsilon. \qquad (7)$$

Es sei $K \geq 0$. Wegen der Divergenz von (2) kann man daraus so viele Glieder $b_0, b_1 \ldots b_{k_0}$ entnehmen, dafs

$$b_0 + b_1 + \ldots + b_{k_0-1} \leq K, \quad B_0 = b_0 + b_1 + \ldots + b_{k_0} > K,$$

wobei k_0 auch 0 sein kann. Auf die Glieder, deren Summe mit B_0 bezeichnet ist, lasse man so viele Glieder $c_0, c_1, \ldots c_{l_0}$ aus (3) folgen, dafs

$$B_0 - c_0 - c_1 - \ldots - c_{l_0-1} \geq K,$$
$$B_0 - c_0 - c_1 - \ldots - c_{l_0} < K.$$

Auf die so ausgewählten $k_0 + l_0 + 2$ Glieder lasse man wieder so viele aus (2) $b_{k_0+1} \ldots b_{k_1}$ folgen, dafs die Summe aller Glieder gerade K übersteigt, und hierauf so viele aus (3): $-c_{l_0+1}, \ldots -c_{l_1}$, dafs die Summe aller gerade

unter K sinkt. U. s. f. Im Allgemeinen werden somit für die neue Reihe die Glieder gewählt:

$$b_{k_{r-1}+1} + b_{k_{r-1}+2} + \ldots + b_{k_r}$$
$$- c_{l_{r-1}+1} - c_{l_{r-1}+2} - \ldots - c_{l_r} \quad (r \geq 1).$$

Schematisch sei sie bezeichnet mit

$$a'_0 + a'_1 + \ldots + a'_n + \ldots \tag{8}$$

und ihre Partialsummen mit s'_n. Ist

$$m_r = k_r + l_{r-1} + 1, \quad n_r = k_r + l_r + 1,$$

so hat man, da s'_{m_r} mit b_{k_r}, s'_{n_r} mit $-c_{l_r}$ schliefst,

$$K + b_{k_r} \geq s'_{m_r+h} \geq K \quad (h = 0, 1 \ldots l_r - l_{r-1} - 1)$$
$$K - c_{l_r} \leq s'_{n_r+i} \leq K \quad (i = 0, 1 \ldots k_{r+1} - k_r - 1).$$

Vermöge (7) existirt eine ganze positive Zahl p, so dafs für $n \geq p$ sowohl $b_n < \varepsilon$, als auch $c_n < \varepsilon$. Geht man in der Reihe (8) so weit, dafs k_r und l_r nicht kleiner als p sind — es möge dann $m_r = M$ sein — so findet man zufolge der vorstehenden Ungleichungen, wenn nur $n > M$ ist,

$$|s'_n - K| < \varepsilon$$

d. i.

$$\lim s'_n = K \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty.$$

Falls $K < 0$, hat man ähnlich vorzugehen.

Man bemerke noch, dafs unsere Schlüsse lediglich darauf beruhen, dafs die Reihen (2) und (3) divergiren und

$$\lim a_n = 0 \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty.$$

Vermöge des vorstehenden Satzes haben wir die convergenten Reihen in zwei Classen zu scheiden:[9]) die absolut (oder unbedingt) convergenten (wozu natürlich alle convergenten Reihen zu zählen sind, die nur Glieder mit einem Zeichen in unbegrenzter Anzahl enthalten) und die schlechthin (oder bedingt) convergenten, wofür die Reihe (5) divergirt, so dafs ihr Grenzwerth von der Anordnung der Glieder abhängt. Zu den letzteren gehören in der That die Reihen (a), (c) in Nr. 8.

Die absolut convergenten Reihen können als Summen

ihrer Glieder betrachtet werden (was wir sogleich begründen werden), die übrigen nur in uneigentlichem Sinne, mit Verzicht auf einige wesentliche Eigenschaften der endlichen Summen.

10. Sätze über absolut convergente Reihen. Sie entsprechen den Sätzen über die Reihen mit positiven Gliedern in Nr. 4—7, aus welchen sie sich unmittelbar ableiten lassen.

1) „Wenn die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots \tag{8}$$

absolut convergirt und darin Glieder von entgegengesetzten Zeichen vorkommen, so hat man

$$|\Sigma a_n| < \Sigma |a_n|".$$

Nach dem 2. Satze in Nr. 3, da

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|.$$

2. „Convergirt neben (8) auch die Reihe $b_0 + b_1 + \dots$ absolut, so convergiren auch die Reihen

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \dots$$

absolut."

3) „Convergirt (8) absolut und bedeuten $c_0, c_1, \dots c_n \dots$ Zahlen, die dem absoluten Betrage nach unter einer Zahl C liegen, so convergirt auch die Reihe $a_0c_0 + a_1c_1 + \dots$ absolut." — Denn nach dem 3. Satze in Nr. 4 convergirt die Reihe

$$|a_0c_0| + |a_1c_1| + \dots + |a_nc_n| + \dots,$$

da

$$|c_n| < C.$$

Corollar. „Wenn die Reihe (8) convergirt, bezw. die Partialsummen

$$c_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

zwischen endlichen Grenzen liegen und die Zahlen

$$b_0, b_1 \dots b_n \dots$$

bei wachsendem n dem endlichen Grenzwerthe b bezw. Null in einem Sinne sich nähern, so convergirt die unendliche Reihe

$$a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n + \dots"$$ [10])

Die Reihe

$$\sum_1^\infty{}_n (b_n - b_{n-1})$$

convergirt nach Nr. 1 und zwar absolut, indem ihre Glieder entweder 0 oder gleichbezeichnet sind. Somit convergirt (absolut) die Reihe

$$\sum_1^\infty{}_n (b_n - b_{n-1})\, c_n,$$

daher nach Nr. 3, 4) die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_n b_n (c_n - c_{n+1})$$

d. i. wenn man $c_0 = 0$ setzt, die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_n (-a_n b_n).$$

4) „Hebt man aus einer absolut convergenten Reihe eine unendliche Folge von Gliedern auf beliebige Weise heraus, so bilden auch sie eine absolut convergente Reihe.“ — Nach dem 1. Satze in Nr. 5, anzuwenden auf Reihe (5).

5) „Vertheilt man die Glieder von (8) in eine endliche Anzahl von Reihen, so convergiren die unendlichen unter ihnen absolut und die Summe aller Summen ist gleich dem Grenzwerthe von (8).“ — Beweis wie zum 4. Satze in Nr. 5.

6) „Es sei die Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \tag{8}$$

absolut convergent und a ihr Grenzwerth. Vertheilt man ihre Glieder, ohne eines zu übergehen, in unendlich viele Reihen

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \ldots + a_n^{(0)} + \ldots \\ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \ldots + a_n^{(1)} + \ldots \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \ldots + a_n^{(m)} + \ldots \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \tag{9}$$

so convergirt jede derselben absolut und die aus ihren Grenzwerthen $a^{(0)}$, $a^{(1)} \ldots a^{(m)} \ldots$ gebildete Reihe convergirt ebenfalls absolut und zwar zum Grenzwerthe a."[11])

7) „Convergiren die beiden unendlichen Reihen

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \ldots, \\ &b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

absolut und zwar bez. zu den Grenzwerthen a, b; so convergirt jede aus den Gliedern $a_m b_n$ gebildete einfach unendliche Reihe, wie

$$\begin{aligned} &a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + \ldots \\ &+ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_r b_{n-r} + \ldots + a_n b_0 + \ldots \end{aligned}$$

absolut und zwar zum Grenzwerthe ab."[12])

Die Sätze 6) und 7) können durch Zurückführung auf den 1. und 2. Satz in Nr. 7 gezeigt werden, indem man die Glieder der Reihen (9) und (10) in die Gruppen der positiven und negativen zerlegt. Bezeichnen wir die Summe der positiven Glieder der $(m+1)^{\text{ten}}$ Zeile in (9) mit $b^{(m)}$, die der negativen mit $-c^{(m)}$, so ist

$$a^{(m)} = b^{(m)} - c^{(m)}.$$

Es ist aber $b^{(0)} + b^{(1)} + \ldots$ gleich der Summe aller positiven Glieder in (8) $-c^{(0)} - c^{(1)} - \ldots$ der aller negativen Glieder derselben Reihe. Bezeichnet man diese Summen wieder mit b, $-c$, so ist

$$a^{(0)} + a^{(1)} + \ldots = b - c = a.$$

Aehnlich läfst sich auch der 7. Satz beweisen.

Die in Rede stehenden Sätze können aber auch vermittelst eines Satzes abgeleitet werden, welcher als Verallgemeinerung des Satzes in Nr. 6 anzusehen ist. Wir führen ihn an, da er auch an sich von Wichtigkeit ist.

11. Hilfssatz.

1) „Es seien gegeben unendliche viele endliche oder unendliche Reihen (9), enthaltend beliebige reelle Zahlen. Dabei sollen sie die folgende Eigenschaft haben. Ersetzt man jedes Glied $a_n^{(m)}$ durch seinen absoluten Betrag $A_n^{(m)}$, d. h. bildet man das Schema

$$A_0^{(0)} + A_1^{(0)} + \ldots + A_n^{(0)} + \ldots$$
$$A_0^{(1)} + A_1^{(1)} + \ldots + A_n^{(1)} + \ldots \qquad (1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_0^{(m)} + A_1^{(m)} + \ldots + A_n^{(m)} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

so convergiren sämmtliche Horizontalreihen und zwar b züglich zu den Grenzwerthen $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots A^{(m)}, \ldots$ und d aus diesen Zahlen gebildete Reihe $A^{(0)} + A^{(1)} + \ldots$ co vergirt ebenfalls."

„Unter dieser Voraussetzung convergiren **absolut** sämm liche Horizontalreihen des Schema (9) **und die aus ihr** Grenzwerthen $a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots a^{(m)} \ldots$ gebildete **Reihe.** D Summe der letzteren Reihe sei a."

„Es convergirt absolut die unendliche **Reihe**

$$a_0^{(0)} + a_0^{(1)} + a_1^{(0)} + \ldots$$
$$+ a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \ldots a_{n-1}^{(1)} + a_n^{(0)} + \ldots \qquad (1$$

und zwar zum Grenzwerthe a."

2) „Und umgekehrt, convergirt die Reihe (12) **absol** und zwar zu einem Grenzwerthe a, so **convergiren absol** sämmtliche Horizontalreihen in (9) und die **aus ihren** Gren werthen gebildete Reihe, letztere zum **Grenzwerthe** a

Beweis. Zu 1). Die absolute Convergenz von

$$a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \ldots + a_n^{(m)} + \ldots \quad (m = 0, 1, 2 \ldots) \quad (1$$

folgt unmittelbar. Dabei ist

$$|a^{(m)}| < A^{(m)},$$

so dafs die Reihe

$$|a^{(0)}| + |a^{(1)}| + \ldots + |a^{(m)}| + \ldots$$

convergirt, d. h. die Reihe

$$a^{(0)} + a^{(1)} + \ldots + a^{(m)} + \ldots$$

ist absolut convergent. Nach Nr. 6 convergirt die Reihe

$$A_0^{(0)} + A_0^{(1)} + A_1^{(0)} + \ldots + A_0^{(n)} + A_1^{(n-1)} + \ldots + A_n^{(0)} + \ldots; \quad (14$$

somit convergirt (12) absolut. Nun sei wie in Nr. 6:

$$a^{(0)} + a^{(1)} + \ldots + a^{(n)} = s^{(n)} = v_n + r_n, \qquad (15)$$

worin

$$r_n = \sum_1^\infty{}^p (a_p^{(n)} + a_{p+1}^{(n-1)} + \ldots + a_{p+n}^{(0)}).$$

Setzt man

$$A_0^{(n)} + A_1^{(n-1)} + \ldots + A_n^{(0)} = D_n,$$

so convergirt neben (14) die Reihe $D_0 + D_1 + D_2 + \ldots$ Da

$$|r_n| < D_{n+1} + D_{n+2} + \ldots \qquad (16)$$

ist, so folgt

$$\lim_{n=+\infty} r_n = 0,$$

d. h. nach (15)

$$a = \lim_{n=+\infty} v_n.$$

Zu 2). Aus der Convergenz von (14) folgt nach Nr. 6, dafs in (11) sämmtliche Horizontalreihen und die aus ihren Grenzwerthen gebildete Reihe convergirt. Somit convergirt (13) absolut. Nach (16) schliefst man wieder $\lim r_n = 0$ bei $\lim n = +\infty$, so dafs aus (15) sich ergiebt

$$\lim_{n=+\infty} s^{(n)} = \lim_{n=+\infty} v_n = a.$$

Aus dem soeben bewiesenen Satze ergeben sich zunächst der 6. und 7. Satz von Nr. 10 und zwar auf dieselbe Weise, wie die ihnen entsprechenden Sätze in Nr. 7 aus dem Satze in Nr. 6.

Wir schliessen ferner unmittelbar aus dem 2. Theile desselben den folgenden Satz von Cauchy:[13])

3) Vorausgesetzt, dafs alle Horizontalreihen des Schema (9) convergiren und dafs ihre Summen $a^{(0)}$, $a^{(1)} \ldots a^{(m)} \ldots$ auch eine convergente Reihe bilden, und dafs diese beiden Eigenschaften bestehen bleiben, wenn man jedes Glied in (9) durch seinen absoluten Betrag ersetzt; so kann man schliefsen

1) dafs alle Verticalreihen in (9) absolut convergiren,

2) dafs ihre Summen

$$a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + \ldots \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

eine absolut convergente Reihe bilden;

3) dafs die Summe der Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ gleich ist der von $a^{(0)} + a^{(1)} + \ldots$

Wenn das Schema (9) der soeben erwähnten Bedingung genügt, so hat es dieselbe Eigenschaft, wie ein endliches Schema von $(m+1)$ Zeilen zu je $(n+1)$ Gliedern: Es ist die Summe der Summen der Horizontalreihen gleich der Summe der Summen der Verticalreihen. Es kann somit ein solches Schema nicht von obiger Beschaffenheit sein, wenn die genannten Summen von einander abweichen. Dies tritt ein bei folgendem Beispiel.[14]) Es sei

$$a_n^{(m)} = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^m - \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^m, \quad \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \Big\} = 1, 2 \ldots$$

Die m^{te} Horizontalreihe hat die Summe 0 (vgl. Nr. 1); somit ist die Summe aller Horizontalreihen $= 0$. Die n^{te} Verticalreihe liefert die Summe

$$\frac{1}{n}\sum_1^\infty{}_m \left(\frac{n-1}{n}\right)^m - \frac{1}{n+1}\sum_1^\infty{}_m \left(\frac{n}{n+1}\right)^m = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1},$$

so dafs die Summe aller Verticalreihen nach Nr. 1 ist

$$0 - \lim_{n=+\infty} \frac{n}{n+1} = -1.$$

Man wird bemerken, dafs von einem bestimmten an alle Glieder einer jeden Horizontalreihe positiv, einer jeden Verticalreihe negativ sind; so dafs sowohl die eine, als auch die andere absolut convergirt.

Indefs ist die im dritten Satze ausgesprochene Bedingung nicht nothwendig dazu, dafs die in Rede stehenden Grenzwerthe

$$\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_n a_n^{(m)} \qquad \sum_0^\infty{}_n \sum_0^\infty{}_m a_n^{(m)} \tag{17}$$

einander gleich seien. Das trifft, wie Cauchy selbst bemerkt hat,[15]) auch dann zu, wenn die Doppelreihe

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \ldots + a_n^{(0)} + \ldots \\ + a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \ldots + a_n^{(1)} + \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \ldots + a_n^{(m)} + \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \qquad (18)$$

convergirt, d. h. wenn die Summe

$$s_n^{(m)} = \begin{cases} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \ldots + a_n^{(0)} \\ + a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \ldots + a_n^{(1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \ldots + a_n^{(m)} \end{cases}$$

bei den simultanen und von einander unabhängigen Grenzübergängen $\lim m = +\infty$, $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth a besitzt. Nach IX. 20 hat man darunter zu verstehen, dafs zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ Zahlen $\mu > 0$, $\nu > 0$ gehören, so dafs für alle ganzzahligen Werthsysteme

$$m > \mu \qquad n > \nu \qquad |s_n^{(m)} - a| < \varepsilon.$$

Es stimmt dann jeder der Werthe (17) mit a überein, wie sich leicht nachweisen läfst. Man kann ferner, wie auch unschwer sich ergiebt, die im dritten Satze geforderte Eigenschaft des Schema (9) als absolute Convergenz der Doppelreihe (18) bezeichnen.

Doppelreihen, die nicht absolut convergiren, kann man u. A. auf folgende Art erhalten. Es sei von den convergenten Reihen

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots, \quad b = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots \qquad (19)$$

wenigstens eine nicht absolut convergent. Setzt man in (18)

$$a_n^{(m)} = a_m b_n,$$

so ist

$$s_n^{(m)} = (a_0 + a_1 + \ldots + a_m)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n),$$

somit

$$\lim_{m=+\infty \ n=+\infty} s_n^{(m)} = ab.$$

Dafs die so gebildete Doppelreihe (18) nicht absolut con-

vergirt, erhellt unmittelbar, sowie auch, dafs trotzdem jeder der Grenzwerthe (17) den Werth ab hat.

Anmerkung. Weifs man, dafs neben der Doppelreihe (18) auch die unendliche Reihe $d_0 + d_1 + d_2 + \ldots$, worin

$$d_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}^{(1)} + a_n^{(0)},$$

convergirt, so kann man schliefsen, dafs der Grenzwerth derselben gleich ist dem der Doppelreihe (18).[16] Daraus folgt der Satz, der in Nr. 23 auf andere Art gezeigt werden soll: „Sind die unendlichen Reihen (19) convergent und convergirt auch die Reihe $d_0 + d_1 + d_2 + \ldots$, worin

$$d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0, \qquad (20)$$

so ist der Grenzwerth der letzteren gleich ab d. i. dem Producte der Grenzwerthe der Reihen (19).[17])

Die Reihe (20) convergirt stets, wenn mindestens eine der Reihen (19) absolut convergirt.[18]) Wenn keine von beiden absolut convergirt, so kann die Reihe (20) auch divergiren. Man setze z. B.

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[m]{n}} \qquad (n = 1, 2 \ldots);$$

dann ist

$$d_n = a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1$$

$$= (-1)^n \left\{ \frac{1}{\sqrt[m]{1 \cdot (n-1)}} + \frac{1}{\sqrt[m]{2 \cdot (n-2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[m]{(n-1) \cdot 1}} \right\}. \qquad (21)$$

Aus

$$r(n-r) = \frac{n^2}{4} - \left(\frac{n}{2} - r\right)^2$$

folgt, dafs

$$r(n-r) \leq \frac{n^2}{4}.$$

Mithin ist

$$(-1)^n d_n > \frac{n-1}{\sqrt[m]{\frac{1}{4} n^2}} = \sqrt[m]{4} \cdot \left(n^{1-\frac{2}{m}} - n^{-\frac{2}{m}} \right),$$

also, wenn $m > 2$,

$$\lim (-1)^n d_n = +\infty \qquad \text{bei} \qquad n = +\infty.$$

Wenn $m = 2$, so ist

$$(-1)^n d_n > 2 - \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad n > 2 : \varepsilon.$$

In keinem Falle kann somit die Reihe (21) convergiren. (Nach der Integralrechnung ist für $m = 2$ $\lim (-1)^n d_n = \pi$.)

12. Ueber die Grenzwerthe einiger unendlichen Producte.

Satz. 1) „Es sei $0 < a_n < 1$ und

$$p_n = (1 - a_0)(1 - a_1) \ldots (1 - a_n) = \prod_0^n (1 - a_r).$$

Beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ hat p_n stets einen endlichen Grenzwerth und zwar ist er positiv, wenn die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (a)$$

convergirt; dagegen Null, wenn sie divergirt."

2) „Es sei $a_n > 0$ und

$$q_n = (1 + a_0)(1 + a_1) \ldots (1 + a_n) = \prod_0^n (1 + a_r).$$

Beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ hat q_n stets einen Grenzwerth und zwar ist er eine positive Zahl > 1, wenn die unendliche Reihe (a) convergirt; dagegen $+\infty$, wenn sie divergirt."

Der Beweis dieses Satzes beruht auf folgendem

Hilfssatz. „Sind die Zahlen α_n gleichbezeichnet und $1 + \alpha_n > 0$, so ist

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1) \ldots (1 + \alpha_m) > 1 + (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots \alpha_m)". \qquad (b)$$

Man findet unmittelbar, dafs, wenn nur α_0 und α_1 gleichbezeichnet sind,

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1) > 1 + \alpha_0 + \alpha_1;$$

ferners, da $1 + \alpha_2 > 0$,

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) > (1 + \alpha_0 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) > 1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2.$$

U. s. f. für jede beliebige Anzahl von positiven Factoren. — Für

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = d$$

folgt aus diesem Satze der erste Theil des 4. Satzes in VIII. 2.

Betrachten wir nun die Zahlen $p_0, p_1, \ldots p_n$, so hal dieselben, da

$$0 < p_{n+1} < p_n, \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty$$

einen endlichen Grenzwerth $p \geq 0$ (IX. 6). Convergirt Reihe (a), so gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürli Zahl m, so dafs

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+r} < \varepsilon,$$

was für einen der Werthe 1, 2 ... auch r erhalten m Nun ist nach (b)

$$p_{m+r} > p_m (1 - a_{m+1} - a_{m+2} - \ldots - a_{m+r}) > p_m (1 -$$

somit

$$p > p_m (1 - \varepsilon),$$

also p sicher positiv. — Divergirt die unendliche Reihe (so gehört zu jeder Zahl $G > 0$ eine Zahl $\mu > 0$, so dafs

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n > G, \quad \text{wenn nur} \quad n > \mu.$$

Nun ist

$$1 - a_n < \frac{1}{1 + a_n},$$

somit

$$p_n < \frac{1}{q_n} < \frac{1}{1 + a_0 + a_1 + \ldots + a_n} < \frac{1}{1 + G},$$

wenn nur $n > \mu$. D. h. es ist $p = 0$.

Da $q_{n+1} > q_n > 1$, so haben die q_n bei $\lim n = +$ einen positiven Grenzwerth $q > 1$. Wenn die unendlic Reihe (a) convergirt, so bemerke man nach (c), dafs für $n >$

$$1 + a_n < \frac{1}{1 - a_n},$$

somit

$$q_{m+r} < \frac{q_m}{(1 - a_{m+1}) \ldots (1 - a_{m+r})} < \frac{q_m}{1 - \varepsilon}.$$

In diesem Falle ist demnach q endlich. — Wenn (a) div girt, so folgt aus (b) und (d), dafs

$$q_n > 1 + a_0 + a_1 + \ldots + a_n > 1 + G \qquad (n > \mu)$$

ist, somit dafs $\lim q_n = +\infty$ ist.

Criterien der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern.

13. P. du Bois-Reymond hat ein sehr elegantes Verfahren gelehrt, nach welchem die in der Anwendung bequemsten Criterien der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern aus einer gemeinsamen Quelle hergeleitet werden können.[19]) Indem wir zur Auseinandersetzung derselben übergehen, bemerken wir, dafs in den Nr. 13—20 $\lim f(n)$ stets den Grenzwerth der Function $f(n)$ für $\lim n = +\infty$ bedeutet, wobei n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Nach Nr. 1 convergirt die unendliche Reihe

$$\sum_0^\infty \{\psi(n) - \psi(n+1)\}$$

stets, wenn $\lim \psi(n)$ existirt und endlich ist; sie divergirt nach Nr. 2, wenn dieser Grenzwerth unendlich ist. Lassen wir $\psi(n)$ eine monotone (einsinnige) Function von n sein d. h. eine solche Function, die bei wachsendem n entweder beständig zunimmt oder beständig abnimmt, so sind die Glieder der soeben erwähnten Reihe sämmtlich gleichbezeichnet. Dann können wir nach Nr. 4 behaupten, dafs die Reihe

$$\sum_0^\infty \gamma_n(\psi(n) - \psi(n+1)),$$

worin die Zahlen γ_n ebenfalls gleichbezeichnet sein sollen, convergirt, wenn $\lim \psi(n)$ endlich und die $|\gamma_n|$ sämmtlich unter einer Zahl $C > 0$ liegen; dafs sie divergirt, wenn $\lim \psi(n)$ unendlich und die $|\gamma_n|$ über einer positiven Zahl C' liegen.

Aus diesem Satze werden wir zwei Classen von Criterien erhalten, deren eine auf das allgemeine Glied der Reihe, die andere auf den Quotienten je zweier aufeinander folgenden Glieder derselben gegründet ist. Die einfachsten Regeln der einen, wie der anderen Classe haben wir schon in Nr. 4 kennen gelernt. — Im Folgenden bedeute

also $a_0 + a_1 + \ldots$ oder kurz Σa_n eine beliebige Reihe m positiven Gliedern, und a_{n+k}, worin k irgend eine fes ganze Zahl mit Einschlufs von 0 sein soll, ihr allgemein Glied.

14. Criterien erster Art. Man setze

$$a_{n+k} = \gamma_n (\psi(n) - \psi(n+1)).$$

Wenn man $\psi(n)$ irgend eine monotone Function von n m endlichem $\lim \psi(n)$ sein läfst, so mufs die Reihe Σa_n co vergiren, falls

$$\gamma_n = \frac{a_{n+k}}{\psi(n) - \psi(n+1)}$$

dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Zahl liegt, insbesondere falls $\lim \gamma_n$ nicht unendlich. Und $\psi(n)$ irgend eine monotone Function von n mit unendlichem $\lim \psi(n)$, so mufs Σa_n divergiren, falls $|\gamma_n|$ über einer positiven Zahl C' liegt, insbesondere falls $\lim \gamma_n$ nicht Null ist.

Das sind die Criterien erster Art. Handelt es sich um die Bildung bestimmter Regeln, so wird man für $\psi(n)$ jede Function von den oben angegebenen Eigenschaften setzen können; dann aber alle diejenigen Functionen ausschliefsen, wofür der Grenzwerth des neuen γ_n zugleich mit dem bereits aufgestellten $\lim \gamma_n$ entweder stets nicht unendlich oder stets nicht Null ist. Wir können demnach $\psi(n)$ zunächst so beschränken, dafs es schliefslich nur positive Werthe annimmt, und dafs $\lim \psi(n)$ entweder Null oder $+\infty$ ist. Denn wäre $\lim \psi(n) = c > 0$, so kann das Convergenzcriterium zurückgeführt werden auf das zu einer der Functionen $\psi(n) - c$, $c - \psi(n)$ gehörige. Nunmehr können wir diese Criterien so aussprechen:

„Nimmt die Function $\psi(n)$ bei wachsendem n beständig ab und ist $\lim \psi(n) = 0$, so convergirt Σa_n, wenn

$$\lim \frac{a_{n+k}}{\psi(n) - \psi(n+1)} \geqq 0,$$

jedoch nicht $+\infty$."

„Nimmt die Function $\psi(n)$ bei wachsendem n be

ständig zu und ist $\lim \psi(n) = +\infty$, so divergirt Σa_n, wenn

$$\lim \frac{a_{n+k}}{\psi(n+1) - \psi(n)}$$

positiv, d. h. nicht Null ist."

15. Geordnete Folgen von Criterien erster Art.

a) Für Convergenz. Es seien $\psi(n)$, $\psi'(n)$ zwei Functionen, die mit wachsendem n beständig abnehmen und bei $\lim n = +\infty$ zum Grenzwerthe 0 convergiren. Wir bilden neben (1)

$$\gamma_n' = \frac{a_{n+k}}{\psi'(n) - \psi'(n+1)} = \frac{\psi(n) - \psi(n+1)}{\psi'(n) - \psi'(n+1)} \gamma_n,$$

woraus wir schliefsen, dafs, falls $\lim \gamma_n$ nicht $+\infty$, auch $\lim \gamma_n'$ nicht $+\infty$ ist, wenn $\lim \frac{\psi(n) - \psi(n+1)}{\psi'(n) - \psi'(n+1)}$ nicht $+\infty$ ist. Nach IX. 11 mufs unter der zuletzt erwähnten Voraussetzung auch $\lim [\psi(n) : \psi'(n)]$ endlich sein. Auf diese Bemerkung gestützt, gelangen wir zu den folgenden Ergebnissen, wenn wir die in (1) einzusetzenden Functionen noch der weiteren Beschränkung unterwerfen, dafs

$$\frac{\psi(n) - \psi(n+1)}{\psi'(n) - \psi'(n+1)} \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty$$

einen Grenzwerth haben soll.

1) Wir können neben $\psi(n)$ ausschliefsen diejenigen Functionen $\psi'(n)$, wofür $\lim [\psi(n) : \psi'(n)]$ weder 0 noch $+\infty$ ist.

2) Wenn wir eine unbegrenzte Folge von Criterien bilden wollen dadurch, dafs wir in (1) nacheinander für $\psi(n)$ setzen

$$\ldots \psi_{-1}(n), \quad \psi_0(n), \quad \psi_1(n), \quad \ldots \psi_r(n) \ldots, \qquad (2)$$

und sie die Eigenschaft haben soll, dafs wenn eines der darin vorkommenden Criterien Convergenz von Σa_n anzeigt, auch alle darauf folgenden dasselbe leisten sollen, wenn aber eines versagt, vielleicht ein späteres Glied der Folge entscheidet; so wird es genügen, die Functionen (2) so zu wählen, dafs

$$\lim \{\psi_r(n) : \psi_s(n)\} \qquad (r < s)$$

Null ist. Nur so nämlich ist es vielleicht möglich, dafs für eine vorgelegte convergente Reihe Σa_n neben

$$\lim \gamma_n^{(r)} = +\infty, \qquad \gamma_n^{(r)} = \frac{a_{n+k}}{\psi_r(n) - \psi_r(n+1)}$$

$\lim \gamma_n^{(s)}$ endlich ausfällt, so dafs während das erstere Criterium zur Entscheidung nicht führt, sie durch ein ihm folgendes gebracht wird.

Den nacheinander gestellten Forderungen genügen die Functionen

$$\ldots e^{-\mu n}, \quad n^{-\mu_0}, \quad (\log n)^{-\mu_1}, \quad (\log_2 n)^{-\mu_2} \ldots (\log_r n)^{-\mu_r} \ldots, \tag{3}$$

worin

$$\log_2(n) = \log(\log n), \ldots$$

$\log_r(n)$ den $r$mal hintereinander genommenen Logarithmus bedeutet und die Exponenten μ sämmtlich positive Zahlen sind. Alle Functionen (3) sind, wenn n gehörig grofs gedacht wird, positiv, monoton und haben bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0.[20]) Ferner existiren, wie sich sogleich ergeben wird, die Grenzwerthe

$$\lim \frac{\psi_r(n) - \psi_r(n+1)}{\psi_s(n) - \psi_s(n+1)} \qquad (r < s) \tag{4}$$

und sind gleich Null, da

$$\lim [\psi_r(n) : \psi_s(n)] = 0.$$

Die letzte Formel folgt leicht aus der Gleichung (i) in IX. 11, welche wir auch so schreiben können

$$\lim_{x=+\infty} \frac{x^\mu}{B^{\lambda x}} = 0,$$

wobei B die Basis des Logarithmensystemes, λ μ positive Zahlen bedeuten. Durch die Substitution $x = \log y$ findet man hieraus

$$\lim_{y=+\infty} \frac{(\log y)^\mu}{y^\lambda} = 0$$

und weiter durch $y = \log_r z$ $(r > 1)$

$$\lim_{z=+\infty} \frac{(\log_{r+1} z)^\mu}{(\log_r z)^\lambda} = 0.$$

Endlich bemerke man, dafs $(r < s)$

$$\frac{(\log_s n)^\mu}{(\log_r n)^\lambda} = \frac{(\log_s n)^\mu}{\log_{s-1} n} \cdot \frac{\log_{s-1} n}{\log_{s-2} n} \cdots \frac{\log_{r+2} n}{\log_{r+1} n} \cdot \frac{\log_{r+1} n}{(\log_r n)^\lambda}.$$

Aus der soeben aufgestellten Definition einer geordneten Folge von Convergenzcriterien ergiebt sich unmittelbar, dafs man sie bei einem beliebigen Gliede beginnen kann. Es giebt jedoch convergente Reihen Σa_n, für welche sämmtliche mittelst der Functionen (3) gebildeten Criterien den Grenzwerth $+\infty$ liefern.[21])

b) Für Divergenz. Die bezüglichen Erwägungen verlaufen völlig parallel. Wir setzen in (1) eine Folge (2) von Functionen, deren jede mit wachsendem n beständig wächst und den Grenzwerth $+\infty$ hat, und wählen dieselben so, dafs die Grenzwerthe (4) existiren und $+\infty$ sind, so dafs auch

$$\lim [\psi_r(n) : \psi_s(n)] = +\infty \qquad (r < s).$$

Eine solche Reihe bilden die Functionen

$$\ldots e^{\mu^n}, \quad n^{\mu_0}, \quad (\log n)^{\mu_1}, \quad (\log_2 n)^{\mu_2} \ldots (\log_r n)^{\mu_r}, \ldots \qquad (5)$$

wovon die μ wieder sämmtlich positiv sein sollen.

16. Bei wirklicher Bildung der Ausdrücke (1) mit den Functionen (4) und (5) zeigt sich, dafs sich aus denselben noch Factoren absondern lassen, deren Grenzwerth weder 0 noch $+\infty$ ist, die somit stets weggelassen werden können; denn hat die vereinfachte Function einen Grenzwerth, der nicht $+\infty$ (0), so auch die ursprüngliche, und umgekehrt. Wir können die Rechnung für beide Functionsreihen zusammenfassen. Es sei also α eine beliebige von 0 verschiedene Zahl. Dann ist

$$e^{\alpha(n+1)} - e^{\alpha n} = e^{\alpha n}(e^{\alpha} - 1),$$

wo $e^{\alpha} - 1$ nicht 0 ist. In den folgenden Entwickelungen mögen $u(n)$, $v(n)$, $w(n)$ und gleichlautende Buchstaben Functionen bedeuten, die bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 1 haben. Nun ist nach IX. 10 (c)

$$(1 + x)^{\alpha} - 1 = \alpha x\, u(x) \qquad (6)$$

wo

$$\lim_{x=0} u(x) = 1;$$

also

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right\}$$

$$= \alpha n^{\alpha-1} u\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha n^{\alpha-1} w(n). \tag{7}$$

Ferner hat man nach IX. 12 (r)

$$\log(1+x) = Mx\, v(x), \tag{8}$$

wo

$$\lim_{x=0} v(x) = 1$$

und M den Modulus des Logarithmensystemes bezeichnet. Somit ergiebt sich

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = 1 + \frac{1}{\log n} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{M}{n \log n} v\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + \frac{M v_1(n)}{n \log n}$$

und

$$\{\log(n+1)\}^\alpha - \log n^\alpha = (\log n)^\alpha \left[\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^\alpha - 1\right]$$

$$= (\log n)^\alpha \cdot \frac{\alpha M v_1(n)}{n \log n}\, u\left(\frac{M v_1(n)}{n \log n}\right) = \frac{\alpha M}{n} (\log n)^{\alpha-1} w_1(n). \tag{9}$$

Ueberhaupt ist

$$\frac{\log_r(n+1)}{\log_r n} = 1 + \frac{M^r v_r(n)}{L_r(n)}, \tag{10}$$

$$L_r(n) = n \log n \log_2(n) \ldots \log_r(n).$$

Denn sieht man diese Formel als richtig an, wie sie in der That für $r=1$ gilt, wobei man nur $L_0(n) = n$ zu setzen hat, so folgt

$$\log_{r+1}(n+1) - \log_{r+1} n = \log\left\{\frac{\log_r(n+1)}{\log_r n}\right\}$$

$$= \log\left\{1 + \frac{M^r v_r(n)}{L_r(n)}\right\},$$

und weiter nach (8)

$$\log_{r+1}(n+1) - \log_{r+1} n = \frac{M^{r+1} v_r(n)}{L_r(n)}\, v\left\{\frac{M^r v_r(n)}{L_r(n)}\right\}$$

$$= \frac{M^{r+1}}{L_r(n)} v_{r+1}(n),$$

somit

$$\frac{\log_{r+1}(n+1)}{\log_{r+1} n} = 1 + \frac{M^{r+1} v_{r+1}(n)}{L_{r+1}(n)}.$$

Es gilt also die Formel (10) auch für $r = 2$, somit für $r = 3$ u. s. f.

Endlich hat man nach (6) und (10)

$$\{\log_r(n+1)\}^\alpha - \{\log_r n\}^\alpha = (\log_r n)^\alpha \left\{\left[\frac{\log_r(n+1)}{\log_r n}\right]^\alpha - 1\right\}$$

$$= (\log_r n)^\alpha \frac{\alpha M^r v_r(n)}{L_r(n)}\, u\left\{\frac{M^r v_r(n)}{L_r(n)}\right\},$$

somit

$$\log_r(n+1)^\alpha - \log_r n^\alpha = \frac{\alpha M^r}{L_{r-1}(n)} (\log_r n)^{\alpha-1} w_r(n) \qquad (11)$$

$$(r = 1, 2 \ldots).$$

Hieraus folgt zunächst die Existenz der Grenzwerthe (4), wie man unmittelbar erkennen wird.

Nunmehr erhalten wir folgende Ausdrücke für die beiden Reihen der Functionen $\gamma_n^{(r)}$, worin jetzt $\mu > 0$ zu denken ist:

$$\gamma_n^{(-1)} = \frac{a_{n+k} e^{\mu n}}{1 - e^{-\mu}} \qquad -\gamma_n^{(-1)} = \frac{a_{n+k} e^{-\mu n}}{e^{\mu} - 1}$$

$$\gamma_n^{(0)} = \frac{a_{n+k} n^{1+\mu}}{\mu w(n)} \qquad -\gamma_n^{(0)} = \frac{a_{n+k} n^{1-\mu}}{\mu w(n)}$$

$$\gamma_n^{(r)} = \frac{a_{n+k} L_{r-1}(n) (\log_r n)^{1+\mu}}{\mu M^r w_r(n)} \qquad (r = 1, 2 \ldots)$$

$$-\gamma_n^{(r)} = \frac{a_{n+k} L_{r-1}(n) (\log_r n)^{1-\mu}}{\mu M^r w_r(n)}.$$

Und wir werden bemerken:

Die Reihe Σa_n convergirt, wenn eine positive Zahl μ gefunden werden kann, so dafs bei $\lim n = +\infty$ einer der Ausdrücke

$$a_{n+k} e^{\mu n}, \quad a_{n+k} n^{1+\mu}, \quad a_{n+k} n (\log n)^{1+\mu},$$
$$\ldots a_{n+k} L_{r-1}(n) (\log_r n)^{1+\mu} \ldots \qquad (12)$$

einen endlichen Grenzwerth (positiv oder 0) hat.

Die Reihe Σa_n divergirt, wenn eine positive Z
μ gefunden werden kann, so dafs bei $\lim n = +$
einer der Ausdrücke

$$a_{n+k}e^{-\mu n},\quad a_{n+k}n^{1-\mu},\quad a_{n+k}n(\log n)^{1-\mu},$$
$$\ldots a_{n+k}L_{r-1}(n)(\log_r n)^{1-\mu}\ldots \qquad ($$

einen positiven Grenzwerth hat.[22])

Die Divergenzcriterien (13) lauten, wenn $\mu = 1$ ges
wird: Der Grenzwerth bei $\lim n = +\infty$ der Functione

$$a_{n+k},\quad a_{n+k}n,\quad a_{n+k}n\log n\ldots a_{n+k}L_r(n)\ldots \qquad ($$

ist positiv und nicht Null. — Es ist leicht einzusehen, d
diese Folge gerade soviel leistet, wie die scheinbar all
meinere (13).

Beispiele.

1) Die unendliche Reihe $\sum\frac{1}{n^\lambda}$ convergirt, wenn $\lambda >$
sie divergirt wenn $\lambda < 1$. — Folgt unmittelbar aus $a_n n^\lambda =$

2) Die unendliche Reihe $\sum\frac{1}{L_r(n)}$ ist divergent, wie
(14) unmittelbar folgt.

3) Die unendliche Reihe $\sum\frac{1}{L_{r-1}(n)(\log n)^\lambda}$ converg
wenn $\lambda > 1$; sie divergirt, wenn $\lambda < 1$. — Denn man
hier

$$a_n L_{r-1}(n)(\log_r n)^\lambda = 1.$$

17. Convergenzcriterium zweiter Art.

Setzt man in (1)

$$\gamma_n = 1 : \lambda_n, \qquad \psi(n) = a_{n+k}\varphi(n);$$

so folgt

$$\lambda_n = \varphi(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\varphi(n+1). \qquad (1$$

Nach Nr. 15 haben wir nun die Regel:

„Die Reihe Σa_n convergirt sicher, wenn eine posit
Zahl $\varphi(n)$ gefunden werden kann, so dafs $a_{n+k}\varphi(n)$ ei
monotone Function von n mit endlichem Grenzwerthe
$\lim n = +\infty$ und aufserdem λ_n für alle Werthe von n v

einem bestimmten an über einer positiven Zahl liegt (insbesondere $\lim \lambda_n > 0$)."

Das ist im Wesentlichen Kummer's Convergenzcriterium.[23]) P. du Bois-Reymond hat aber bemerkt, dafs aus der zweiten Bedingung unmittelbar die erste folge, so dafs wir den folgenden Satz erhalten:

„Ist $\varphi(n)$ positiv und bei jedem Werthe von $n \geq m$ λ_n gröfser als eine Zahl $\alpha > 0$ (insbesondere $\lim \lambda_n > 0$), so convergirt Σa_n."

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$n \geq m \quad \varphi(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \varphi(n+1) > \alpha > 0,$$

daher

$$a_{n+k}\varphi(n) - a_{n+k+1}\varphi(n+1) > \alpha a_{n+k}, \qquad (16)$$

woraus erhellt dafs

$$a_{n+k}\varphi(n) > a_{n+k+1}\varphi(n+1),$$

somit

$$a_{n+k}\varphi(n)$$

mit wachsendem n beständig abnimmt, also bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth $c \geq 0$ hat. Daher convergirt (Nr. 1) die Reihe mit den positiven Gliedern

$$\sum_m^\infty [a_{n+k}\varphi(n) - a_{n+k+1}\varphi(n+1)]$$

und nach Nr. 4 zufolge (16) auch die Reihen $\sum_m^\infty a_{n+k}$ und Σa_n.

18. Würde man auf das Divergenzcriterium in Nr. 15 dieselbe Transformation anwenden, wie auf das Convergenzcriterium, so würde sich kein so einfaches Resultat ergeben. P. du Bois-Reymond hat jedoch den folgenden Satz gefunden.

Divergenzcriterium zweiter Art. „Ist $\varphi(n)$ eine positive Zahl und so gewählt, dafs die Reihe $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ divergirt, ist ferner für jeden Werth von $n \geq m$ λ_n

negativ (insbesondere $\lim \lambda_n < 0$); so divergirt di Reihe Σa_n."

Der Beweis des Satzes ist sehr einfach. Aus

$$n \geq m \qquad \varphi(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \varphi(n+1) < 0$$

ergiebt sich

$$\frac{1}{\varphi(n+1)} : \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} < \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}},$$

woraus nach dem 2. Satze in Nr. 4 unser Satz unmittelb folgt.

Nimmt man in beiden Criterien zweiter Art für $\varphi($ dieselbe Function, so erhält man ein disjunctives Crit rium: „Ist $\lim \lambda_n > 0$, so convergirt Σa_n; ist $\lim \lambda_n < 0$, s divergirt diese Reihe; ist $\lim \lambda_n = 0$, so bleibt die Fra unentschieden."

Setzt man in (15) für $\varphi(n)$ nacheinander die Functione

$$\varphi_0(n), \quad \varphi_1(n) \ldots \varphi_r(n) \ldots, \qquad (1$$

so erhält man eine geordnete Folge von disjunctive Criterien zweiter Art, wenn diese Functionen so gewäh sind, dafs entsprechend

$$\lim \lambda_n^{(r)} \gtrless 0 \qquad \lambda_n^{(r)} = \varphi_r(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \varphi_r(n+1)$$

auch $\lim \lambda_n^{(s)} \gtrless 0$ falls $s > r$; wenn aber $\lim \lambda_n^{(r)} = 0$, vie leicht irgend ein $\lim \lambda_n^{(s)}$ von Null verschieden ausfällt. Die Forderungen können erfüllt sein, wenn man die Functione (17) aufser den Beschränkungen, dafs $\varphi_r(n) > 0$ und $\sum \frac{1}{\varphi_r}$ divergirt, noch den weiteren unterwirft, dafs

$$\lim \frac{\varphi_s(n)}{\varphi_r(n)} = +\infty$$

und

$$\lim \lambda_n^{(r,s)} = 0, \quad \lambda_n^{(r,s)} = \varphi_r(n) - \frac{\varphi_s(n)}{\varphi_s(n+1)} \varphi_r(n+1).$$

Setzt man nämlich in (15) zunächst eine Function $\varphi'(n)$, ebenfa positiv und so gewählt, dafs $\sum \frac{1}{\varphi'(n)}$ divergirt, so findet man leic

$$\lambda_n' = \varphi'(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\varphi'(n+1) = \frac{\varphi'(n+1)}{\varphi(n+1)}\{\lambda_n - l_n\},$$

$$l_n = \varphi(n) - \frac{\varphi'(n)}{\varphi'(n+1)}\varphi(n+1).$$

Daraus folgt: Wenn

$$\lim l_n = 0$$

und

$$\lim\{\varphi'(n) : \varphi(n)\} > 0,$$

so haben $\lim \lambda_n'$ und $\lim \lambda_n$ dasselbe Zeichen, der letztere von Null verschieden vorausgesetzt. Ist aber

$$\lim \lambda_n = 0$$

und es soll

$$\lim \lambda_n' \gtrless 0$$

sein, so mufs

$$\lim\{\varphi'(n) : \varphi(n)\} = +\infty$$

sein, womit aber nicht gesagt sein soll, dafs jetzt wirklich $\lim \lambda_n'$ nicht Null sein wird. — Es ist nicht unwesentlich hinzuzufügen: „Wenn die Reihen $\sum\frac{1}{\varphi(n)}$ und $\sum\frac{1}{\varphi'(n)}$ divergiren, $\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)}$ mit n beständig wächst und wenn l_n bei $\lim n = +\infty$ überhaupt einen Grenzwerth hat, so mufs er Null sein.“ Denn aus

$$l_n = \varphi'(n)\left\{\frac{\varphi(n)}{\varphi'(n)} - \frac{\varphi(n+1)}{\varphi'(n+1)}\right\} \qquad \frac{\varphi(n)}{\varphi'(n)} < \frac{\varphi(n+1)}{\varphi'(n+1)}$$

folgt $\lim l_n > 0$ oder gleich 0. Die erstere Annahme ist hier unmöglich, da nach Nr. 17 die Reihe $\sum\frac{1}{\varphi'(n)}$ convergiren müfste.

Den nacheinander eingeführten Bedingungen entsprechen die Functionen

$$\varphi_0(n) = 1 \quad \varphi_1(n) = n \quad \varphi_2(n) = n\log n \ldots$$

$$\varphi_r(n) = L_{r-1}(n). \tag{18}$$

Namentlich finden wir für

$$l_n^{(r,s)} = \frac{L_{s-1}(n)}{\log_r(n+1)\ldots\log_{s-1}(n+1)} \times$$

$$\left\{\left[\frac{\log_r(n+1)}{\log_r n}\cdot\ldots\cdot\frac{\log_{s-1}(n+1)}{\log_{s-1} n}\right] - 1\right\} \qquad (s > r \geq 1).$$

Nach (10) ergiebt sich, dafs

$$\frac{\log_r(n+1)}{\log_r n}\cdot\frac{\log_{r+1}(n+1)}{\log_{r+1} n}=1+\frac{M^r V_r^{(1)}(n)}{L_r(n)},$$

$$\lim V_r^{(1)}(n)=1;$$

und daraus allgemein

$$\frac{\log_r(n+1)}{\log_r n}\cdot\frac{\log_{r+1}(n+1)}{\log_{r+1} n}\cdot\cdots\cdot\frac{\log_{s-1}(n+1)}{\log_{s-1} n}$$

$$=1+\frac{M^r V_r^{(s-r)}(n)}{L_r(n)},\qquad \lim V_r^{(s-r)}(n)=1.$$

Demnach hat man

$$l_n^{(r,s)}=\frac{M^r V_r^{(s-r)}(n)}{\log_r n}\cdot\frac{\log_r n}{\log_r(n+1)}\cdot\frac{\log_{r+1} n}{\log_{r+1}(n+1)}\cdot\cdots\cdot\frac{\log_{s-1} n}{\log_{s+1}(n+1)},$$

so dafs in der That dafür bei $\lim n=+\infty$ ein Grenzwer existirt. Dafs er Null ist, weifs man schon von vorneherei

Setzen wir nun in (15) für $\varphi(n)$ die Functionen (1 ein, so erhalten wir die logarithmischen Criterien zwe ter Art.[24])

Σa_n convergirt oder divergirt, je nachdem b $\lim n=+\infty$

$$\lim\left(1-\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right) \qquad (1$$

positiv oder negativ; je nachdem

$$\lim\left\{n-\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}(n+1)\right\} \qquad (2$$

positiv oder negativ; allgemein, je nachdem

$$\lim\left\{L_r(n)-\frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k}}L_r(n+1)\right\}\quad (r=1,2\ldots), \quad (2$$

positiv oder negativ.

19. Das erste der vorstehenden Criterien ist uns sch aus Nr. 4 bekannt. Σa_n convergirt oder divergirt, je nac dem $\lim\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}<1$ oder >1. Die folgenden Criteri

werden meistens ausreichen, wenn der soeben erwähnte Grenzwerth = 1 ist. In diesem Falle lassen sie noch eine Vereinfachung zu. Da

$$n - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}(n+1) = n\left(1 - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}},$$

so ist der Grenzwerth (20) positiv oder negativ, je nachdem der des ersten Theiles rechts $>$ oder < 1 ist. So erhalten wir das Raabe'sche Criterium:[25]) Wenn

$$\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k}) = 1,$$

so convergirt oder divergirt Σa_n, je nachdem

$$\lim n\left(1 - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right) > 1 \text{ oder } < 1. \qquad (22)$$

Dabei ist $\lim a_n = 0$ oder $\pm\infty$, je nachdem dieser Grenzwerth positiv oder negativ.

Setzt man nämlich

$$n\left(1 - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right) = \varphi(n), \quad \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 - \frac{\varphi(n)}{n},$$

so findet man

$$a_n = a_{m+k} \prod_m^{n-k-1}\left\{1 - \frac{\varphi(p)}{p}\right\}.$$

Ist $\lim \varphi(n) = \mu$ und $\mu > 0$, so wird für $p > \nu$

$$\varphi(p) > \mu - \varepsilon > 0$$

sein, so dafs $\sum \frac{\varphi(p)}{p}$ divergirt (Nr. 4, 3. Satz) und nach Nr. 12 $\lim a_n = 0$. Ist $\mu < 0$, so hat man für $p > \nu$

$$\varphi(p) < \mu + \varepsilon < 0,$$

so dafs $\varphi(p) : p$ schliefslich negativ wird und $\sum \frac{\varphi(p)}{p}$ divergirt und $\lim a_n$ entweder $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Für den allgemeinen Ausdruck (21) erhält man

$$L_r(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_r(n+1)$$
$$= \left[L_{r-1}(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_{r-1}(n+1)\right] \log_r n$$
$$- \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\left\{\log_r(n+1) - \log_r(n)\right\} L_{r-1}(n+1).$$

Der zweite Theil rechts liefert nach (10)

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} M^r v_r(n) \frac{L_{r-1}(n+1)}{L_{r-1}(n)},$$

hat also in unserem Falle bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth M^r. Wir haben somit den Satz:

Wenn $\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k}) = 1$, so **convergirt** oder divergirt Σa_n, je nachdem

$$\lim \left\{ L_{r-1}(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_{r-1}(n+1) \right\} \log_r n > M^r \quad \text{oder} < M^r \ (r = 1, 2 \ldots). \tag{23}$$

Wenn dieser Grenzwerth nicht $-\infty$ ist, so wird a_n sicher schliefslich monoton und es ist sicher $\lim a_n = 0$.

Der zweite Theil des Satzes ergiebt sich aus folgender Bemerkung. „Setzt man

$$\frac{1}{n} + \frac{M}{L_1(n)} + \cdots + \frac{M^r}{L_r(n)} = P_r(n) \quad (r \geqq 0)$$

und

$$\left(1 - P_{r-1}(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right) L_r(n) = \psi_r(n),$$

so hat $\psi_r(n)$ bei $\lim n = +\infty$ denselben Grenzwerth, wie

$$\varphi_r(n) = \left\{ L_{r-1}(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_{r-1}(n+1) \right\} \log_r(n)$$

und umgekehrt.“ Man hat nämlich

$$\psi_r(n) = \frac{L_{r-1}(n)}{L_{r-1}(n+1)} \varphi_r(n) - \frac{L_r(n)}{n^2} W_r(n), \tag{23a}$$

wo wieder $\lim W_r(n) = 1$. — Zunächst ist

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = \frac{L_{r-1}(n)}{L_{r-1}(n+1)} - \frac{\varphi_r(n)}{\log_r(n)} \cdot \frac{1}{L_{r-1}(n+1)}.$$

Ist $r = 1$, so findet man (23a) unmittelbar wegen

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{W_0(n)}{n^2}. \tag{23a*}$$

Ist $r > 2$, so ist zu zeigen, dafs für $s \geqq 1$

$$\frac{L_s(n)}{L_s(n+1)} = 1 - P_s(n) + \frac{W_s(n)}{n^2}; \tag{23b}$$

woraus dann Gl. (23ª) unmittelbar folgt. Hierzu gebraucht man die weitere Entwickelung von $v_r(n)$ in (10). Es ist

$$\frac{\log_r(n+1)}{\log_r(n)} = 1 + \frac{M^r}{L_r(n)}\left\{1 - \frac{v_r'(n)}{2n}\right\} \quad (\lim v_r'(n) = 1). \quad (23^c)$$

Nach XI. 5 findet man nämlich, wofern $|x| < 1$,

$$\log(1+x) = Mx\left\{1 - \frac{x}{2}v'(x)\right\} \quad \left(\lim_{x=0} v'(x) = 1\right),$$

somit für $x = \frac{1}{n}$ nach Division durch $\log n$

$$\frac{\log(n+1)}{\log(n)} = 1 + \frac{M}{L_1(n)}\left\{1 - \frac{v_1'(n)}{2n}\right\}.$$

Vermittelst ebenderselben Formel beweist man (23ᶜ) durch den Schluſs von r auf $(r+1)$. Aus (23ᶜ) leiten wir ab die Gleichung

$$\frac{\log_r(n)}{\log_r(n+1)} = 1 - \frac{M^r}{L_r(n)}\left\{1 - \frac{w_r(n)}{2n}\right\} \quad (\lim w_r(n) = 1)$$

und daraus, indem wir $r = 1, 2 \ldots . s$ setzen und die bezüglichen Gleichungen mit einander und mit (23ª*) multipliciren, endlich die Formel (23ᵇ).

Setzt man jetzt

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 - P_{r-1}(n) - \frac{\psi_r(n)}{L_r(n)} \qquad (23^d)$$

und bemerkt, daſs

$$a_n = a_{n+k} \prod_{m}^{n-k-1}\left\{1 - P_{r-1}(p) - \frac{\psi_r(p)}{L_r(p)}\right\},$$

so sieht man sofort ein, daſs $\lim a_n = 0$ sein muſs. Denn da

$$P_{r-1}(p) + \frac{\psi_r(p)}{L_r(p)}$$

$$= \frac{1}{p}\left\{1 + \frac{M}{\log p} + \cdots + \frac{M^{r-1}p}{L_{r-1}(p)} + \frac{p\psi_r(p)}{L_r(p)}\right\},$$

worin der zweite Factor, wenn $\lim \psi_r(p)$ nicht $-\infty$, einen positiven Grenzwerth (eventuell $+\infty$) haben muſs, so divergirt die Reihe, deren allgemeines Glied dieser Ausdruck ist.

Die wichtigste Anwendung der vorstehenden Sätze bi die folgende Regel.

„Angenommen, es sei für alle Werthe $n \geq m$ a_{n+k} n Null und es lasse sich $\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}$ auf die Form bringen

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega(n)}{n^\lambda},$$

wo μ, λ Constante, die letztere > 1, $\omega(n)$ eine Function deutet, die bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzw hat; so kann man schliefsen:

1) „Dafs die a_n von einem bestimmten Werthe vo an gleichbezeichnet und einsinnige Functionen v sind. Es existirt also $\lim a_n$ und zwar ist er bei μ unendlich, bei $\mu < 0$ Null; bei $\mu = 0$ weder 0 noch un lich. Doch mufs, wenn im letzten Falle $\lim \omega(n) = 0$, n angenommen werden, dafs $\omega(n)$ schliefslich ein und dass Zeichen behält."

2) „Dafs die Reihe Σa_n divergirt, wenn $\mu \geq -$ convergirt, wenn $\mu < -1$."

Die Behauptungen im Falle $\mu \gtrless -1$ ergeben sich (22), nur dafs bei $\mu = 0$ $\lim a_n$ weder 0 noch unendlich ist nach Nr. 12 zu zeigen durch Betrachtung des Produ

$$a_n = a_{m+k} \prod_{m}^{n-k-1} \left\{1 + \frac{\omega(p)}{p^\lambda}\right\} \quad (\lambda > 1),$$

worin die convergente Reihe $\sum \frac{\omega(p)}{p^\lambda}$ vorkommt (Nr. 4, 3) Wenn $\mu = -1$, gebraucht man das erste Criterium (oder setzt in (23^d) $r = 1$

$$\psi_1(n) = -\omega(n) \log n : n^{\lambda - 1}.$$

Da $\lim \psi_1(n) = 0$, so divergirt Σa_n.

Die vorstehende Regel wird insbesondere dann gebrauc wenn der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ in eine endliche oder c vergente unendliche Reihe nach fallenden Potenzen von entwickelt werden kann,[26]) d. h. wenn für $n \geq m$

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \cdots\cdots \qquad (25)$$

Dann ist $\mu = a_1$ $\lambda = 2$ und

$$\omega(n) = a_2 + \frac{a_3}{n} + \cdots\cdots,$$

so dafs nach Nr. 23 $\lim \omega(n) = a_2$. Wenn $a_2 = 0$, hat man doch $\lim \omega(n) = +0$ oder -0.

Beispiel.[27]) Ist

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = \frac{n^r + b_1 n^{r-1} + b_2 n^{r-2} + \cdots + b_r}{n^r + c_1 n^{r-1} + c_2 n^{r-2} + \cdots + c_r} = R(n),$$

wo im Zähler und Nenner ganze Functionen r^{ten} Grades von n stehen; so kann man die rechte Seite leicht auf die Form (24) bringen, indem man Zähler und Nenner durch n^r dividirt. Die rationale Function $R(n)$ läfst sich auch in eine Reihe von der Form (25) entwickeln. Zunächst hat man

$$n^r + b_1 n^{r-1} + \cdots b_r = n^r \left\{ 1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \cdots + \frac{b_r}{n^r} \right\}$$

$$n^r + c_1 n^{r-1} + \cdots c_r = n^r \left\{ 1 + \nu_n \right\}$$

$$\nu_n = \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + \frac{c_r}{n^r}.$$

Da $\lim \nu_n = 0$, so ist

$$\frac{1}{1+\nu_n} = 1 - \nu_n + \nu_n^2 - \cdots\cdots$$

für alle n gröfser als eine gewisse Zahl $\mu > 0$. Nach dem Satze in Nr. 25 kann man diesen Ausdruck für alle $(1:n) < \varkappa$ in eine absolut convergirende Reihe nach Potenzen von $1:n$ verwandeln. Es ist

$$\frac{1}{1+\nu_n} = 1 - \frac{c_1}{n} + \frac{c_1^2 - c_2}{n^2} + \cdots;$$

also nach dem 7. Satze in Nr. 10

$$R(n) = 1 + \frac{b_1 - c_1}{n} + \frac{b_2 - b_1 c_1 + c_1^2 - c_2}{n^2} + \cdots$$

Somit convergirt Σa_n, wenn $b_1 - c_1 < -1$; die Reihe divergirt, wenn $b_1 - c_1 \geqq -1$.

Weitere Beispiele s. XI. 2, 4.

20. Criterien für alternirende Reihen. Es seie $a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots$ positive Zahlen und die unendliche Reih $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots$ vorgelegt, die wir kurz mit $\Sigma(-1)^n$ bezeichnen.

Satz. 1) „Die Reihe $\Sigma(-1)^n a_n$ **convergirt** [und zwa absolut] oder divergirt, je nachdem $\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k}) <$ oder > 1. Im letzteren Falle sind die **Unbestimmtheit**s grenzen von

$$s_n = a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n$$

bei $\lim n = +\infty$ $+\infty$ und $-\infty$."

2) „Läfst sich für alle Werthe von $n \geq m$ der Quotie $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ auf die Form (24)

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega(n)}{n^\lambda} \qquad (\lambda > 1)$$

bringen, so convergirt $\Sigma(-1)^n a_n$, wenn $\mu < 0$; und zwa absolut, wenn $\mu < -1$; nicht absolut, wenn $0 > \mu \geq -1$

„$\Sigma(-1)^n a_n$ divergirt, wenn $\mu > 0$ und wenn $\mu =$ und $\omega(n)$ schliefslich ein und dasselbe Zeichen be hält. Im ersteren Falle sind die Unbestimmtheitsgrenze von s_n bei $\lim n = +\infty$ $+\infty$ und $-\infty$, im zweiten Fall sind sie endlich und von einander verschieden."

Beispiele s. XI. 2, 4, 8.

Beweis. Die absolute Convergenz $\Sigma(-1)^n a_n$ in de oben erwähnten Fällen folgt unmittelbar aus der in d vorigen Nr. aufgestellten Regel. — Die nicht absolute Co vergenz unserer Reihe, wenn $0 > \mu \geq -1$, folgt aus Nr. da a_n von einem gewissen Werthe von n an mit wachse den n beständig abnimmt und $\lim a_n = 0$. — Wo die Dive genz von $\Sigma(-1)^n a_n$ angegeben ist, ergiebt sich dieselbe ste daraus, dafs $\lim a_n$ von Null verschieden ist (Nr. 1).

Umständlicher gestaltet sich der Nachweis der dort, wo $\Sigma(-1)^n$ divergirt, angezeigten Unbestimmtheitsgrenzen von s_n bei $\lim n = +\infty$. Wir setzen, unter l einen beliebigen Index verstanden,

$$a_{l+1} - a_{l+2} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{l+p} = r_{l,p},$$

$$s_{l+p} = s_l + (-1)^{l+1} r_{l,p},$$

und untersuchen das Verhalten von $r_{l,p}$ bei $\lim p = +\infty$. In

$\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k}) > 1$ oder im zweiten Theile unseres Satzes $\mu > 0$, so kann man behaupten, dafs positive Zahlen μ' existiren, so dafs

$$n\left(\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} - 1\right) > \mu' > 0,$$

wenn nur $n \geqq m$. Es ist nämlich der Grenzwerth der linken Seite bei $\lim n = +\infty$ entweder $+\infty$ oder μ. Man hat somit

$$a_{n+k+1} - a_{n+k} > \frac{\mu'}{n} a_{n+k}.$$

Und weiter für $l = m + k$

$$r_{l,2q} < -\mu'\left\{\frac{a_{l+1}}{l-k+1} + \frac{a_{l+3}}{l-k+3} + \cdots + \frac{a_{l+2q-1}}{l-k+2q-1}\right\},$$

$$r_{l,2q+1} > \mu'\left\{\frac{a_{l+2}}{l-k+2} + \frac{a_{l+4}}{l-k+4} + \cdots + \frac{a_{l+2q}}{l-k+2q}\right\}.$$

Nun wachsen die a_{l+p} mit p beständig, so dafs sich ergiebt

$$r_{l,2q} < -\mu' a_{l+1}\left\{\frac{1}{l-k+1} + \frac{1}{l-k+3} + \cdots + \frac{1}{l-k+2q+1}\right\},$$

$$r_{l,2q+1} > \mu' a_{l+2}\left\{\frac{1}{l-k+2} + \frac{1}{l-k+4} + \cdots + \frac{1}{l-k+2q}\right\},$$

woraus vermöge der Divergenz der harmonischen Reihen geschlossen werden kann

$$\lim_{q=+\infty} r_{l,2q} = -\infty, \qquad \lim_{q=+\infty} r_{l,2q+1} = +\infty.$$

Wenn $\mu = 0$ im zweiten Theile des Satzes, so genügt die Betrachtung eines der Ausdrücke $r_{l,2q}$, $r_{l,2q+1}$, da aus der Gleichung

$$r_{l,2q+1} = r_{l,2q} + a_{l+2q+1}$$

sich ergiebt, dafs wenn einer derselben bei $\lim q = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth besitzt, so auch der andere. Wir haben nun zu unterscheiden, ob der endliche $\lim \omega(n)$ negativ, bez. -0, oder ob er positiv, bez. $+0$. Im ersteren Falle nehmen die a_n von einem gewissen Werthe des Index an mit demselben beständig ab, so dafs wir nach Nr. 8 bemerken können, dafs $r_{l,1} > r_{l,3} > r_{l,5} \cdots$. Es existirt mithin bei $\lim q = +\infty$ ein Grenzwerth für $r_{l,2q+1}$, der aber nicht $-\infty$ sein kann. Da $\lim \omega(n) = -\gamma$ ($\gamma \geqq 0$), so hat man, was auch $\varepsilon > 0$ sein mag, einen Index m, so dafs

$$n \geqq m \qquad 1 - \frac{(\gamma+\varepsilon)}{n^\lambda} < \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} < 1, \quad \text{d. i.}$$

$$-\frac{(\gamma+\varepsilon)a_{n+k}}{n^\lambda} < a_{n+k+1} - a_{n+k} < 0.$$

Setzt man $m + k = l$, so folgt weiter

$$r_{l,2q+1} > -(\gamma+\varepsilon)\left\{\frac{a_{l+2}}{(l-k+2)^\lambda} + \frac{a_{l+4}}{(l-k+4)^\lambda} + \cdots + \frac{a_{l+2q}}{(l-k+2q)^\lambda}\right\},$$

also auch

$$r_{l,2q+1} > -(\gamma+\varepsilon)a_{l+2}\left\{\frac{1}{(l-k+2)^\lambda} + \frac{1}{(l-k+4)^\lambda} + \cdots + \frac{1}{(l-k+2q)^\lambda}\right\}.$$

Es convergirt aber nach Nr. 16 die unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\frac{1}{(l-k+2q)^\lambda}$, da $\lambda > 1$. Bezeichnet man ihre Summe mit σ, so folgt

$$r_{l,2q+1} > -(\gamma+\varepsilon)a_{l+2}\sigma,$$

und weiter

$$\lim_{q=+\infty} r_{l,2q+1} > -(\gamma+\varepsilon)a_{l+2}\sigma.$$

Ganz ähnlich wird der Beweis im zweiten Falle geführt, wo die a_s schliefslich mit dem Index beständig wachsen.

NB. Wenn der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ in der Form (25) gegeben ist, so läfst sich der vorstehende Satz auch mittelst der in der vorigen Nr. gegebenen Regel ableiten, indem nun auch der Quotient $\frac{a_{n+k+3} - a_{n+k+2}}{a_{n+k+1} - a_{n+k}}$ nach fallenden Potenzen von n entwickelt werden kann.

21. Reihen, deren Glieder Functionen einer Veränderlichen sind. Für einen und denselben Bereich der unabhängigen Veränderlichen x seien die Functionen

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x) \cdots\cdots f_n(x) \cdots$$

in unbegrenzter Anzahl erklärt und zugleich die unendliche Reihe

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \qquad (1)$$

convergent. $f(x)$ bedeute ihren Grenzwerth. Setzt man

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) = s_n(x);$$

so ist demnach

$$\lim_{n=+\infty} s_n(x) = f(x).$$

Indem $s_n(x)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen n, x abhängt, so treten die Bemerkungen in IX. 19 in Kraft. Man hat somit die gleichmäfsige und ungleichmäfsige Convergenz von $s_n(x)$ bei $\lim n = +\infty$ zum Grenzwerthe $f(x)$ oder, wie man sagt, der Reihe (1) in dem für die unabhängige Veränderliche x festgesetzten Bereiche zu unterscheiden. Da

$$f(x) - s_n(x) = r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots,$$

so führt die a. a. O. gegebene Definition zu folgender Aussage, wobei wir beispielsweise annehmen, dafs für x das endliche Intervall (a, b) mit Einschlufs der Grenzen $x = a$ und $x = b$ vorgeschrieben sei. „Die unendliche Reihe (1) convergirt gleichmäfsig für alle Werthe von x:

$$a \leq x \leq b,$$

wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ gehört, so dafs für alle Werthe $n > \mu$

$$|r_n(x)| < \varepsilon, \tag{2}$$

welcher der soeben erwähnten Werthe auch der Veränderlichen x beigelegt werden mag.“ Oder: $r_n(x)$ convergirt bei $\lim = +\infty$ zum Grenzwerthe 0 gleichmäfsig für die genannten Werthe von x. Diese Definitionen setzen indessen voraus, dafs man von der Convergenz der Reihe (1) schon unterrichtet sei. Will man davon absehen, so heifst es: die Reihe (1) convergirt und zwar gleichmäfsig für alle $a \leq x \leq b$, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ gehört, so dafs für alle Werthe $n > \mu$

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad (p = 1, 2 \cdots), \tag{3}$$

welchen der erwähnten Werthe auch die Veränderliche x erhalten mag. Daraus folgt wieder, wenn $\varepsilon' < \varepsilon$,

$$|r_n(x)| \leq \varepsilon' < \varepsilon,$$

wenn nur $n > \mu'$. — Umgekehrt folgt auch aus (2) die Relation (3), da hier $r_n(x) - r_{n+p}(x)$ steht.

Zunächst ist von Interesse der Fall, dafs jede Function

$f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ für die Werthe $a \leqq x \leqq b$ stetig sei. Es entsteht die Frage, ob die Reihensumme $f(x)$ ebenfalls eine für alle diese Werthe von x stetige Function sei. Cauchy behauptete es, Abel bemerkte jedoch, dafs Ausnahmen vorkommen.[28]) So finden wir für die unendliche Reihe

$$(1 - x) + (1 - x)x + (1 - x)x^2 + \cdots + (1 - x)x^n + \cdots$$

$$f(x) = (1 - x) \cdot \frac{1}{1 - x} = 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq x < 1;$$

hingegen $f(1) = 0$. — Für die Reihe

$$f(x) = (1 - x)x + (1 - x^2)x^2 + (1 - x^3)x^3 + \cdots$$

findet man $f(1) = 0$, dagegen falls $|x| < 1$

$$f(x) = \sum_1^\infty x^n - \sum_1^\infty x^{2n} = \frac{x}{1 - x} - \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2},$$

so dafs bei $\lim x = 1 - 0$ sogar $\lim f(x) = + \infty$. — Abel gelangte nicht mehr zur vollständigen Einsicht über den Grund eines solchen Verhaltens;[29]) erst Seidel[31]) erkannte die ungleichmäfsige Convergenz der Reihe als die Ursache der Unstetigkeit. In unseren Beispielen tritt sie unmittelbar hervor. Denn man hat für $0 \leqq x < 1$ z. B. im ersten Falle

$$r_n(x) = (1 - x)x^{n+1} + (1 - x)x^{n+2} + \cdots = x^{n+1},$$

welche Function nach IX. 19 bei $\lim n = + \infty$ ungleichmäfsig für die genannten Werthe von x zur Null convergirt.

Richtig ist der folgende Satz:

„Ist $f_n(x) - n = 0, 1, 2 \ldots$ — für alle Werthe $a \leqq x \leqq b$ eine stetige Function von x und convergirt die unendliche Reihe (1) gleichmäfsig für die genannten Werthe von x; so ist ihr Grenzwerth $f(x)$ eine stetige Function für alle Werthe von x im Intervalle (a, b), die Grenzen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen."

Der Satz ist enthalten in dem analogen, allgemeineren Satze in IX. 19; sein Beweis wird demnach so zu führen sein. Ist m eine natürliche Zahl gröfser als μ, so hat man $|r_m(x)| < \varepsilon$ für alle $a < x \leqq b$. Bezeichnet man mit x_0 irgend einen dieser Werthe und bemerkt, dafs

$$f(x_0+\xi)-f(x_0)=\{s_m(x_0+\xi)-s_m(x_0)\}+r_m(x_0+\xi)-r_m(x_0),$$

und dafs der Zahl $\varepsilon>0$ eine Zahl $\delta_m>0$ zugeordnet werden kann, so dafs für

$$|\xi|<\delta_m \qquad |s_m(x_0+\xi)-s_m(x_0)|<\varepsilon;$$

so erkennt man sofort, dafs auch für

$$|\xi|<\delta_m \qquad |f(x_0+\xi)-f(x_0)|<3\varepsilon$$

w. z. b. w.

Wir können noch hinzufügen: „Wenn die Reihe (1) für alle Werthe $a<x<b$ gleichmäfsig convergirt, so mufs sie auch für $x=a$ und $x=b$ convergiren, so dafs sie selbstverständlich gleichmäfsig convergirt für alle $a\leq x<b$.“ Denn es ist, wenn $n>\mu$, nach (3)

$$0<\xi<b-a \qquad |f_{n+1}(a+\xi)+f_{n+2}(a+\xi)+\cdots+f_{n+p}(a+\xi)|<\varepsilon;$$

ferner hat man

$$\Big|\sum_{n+1}^{n+p}\{f_s(a+\xi)-f_s(a)\}\Big|<\varepsilon$$

für alle $0<\xi<\delta_{n,p}$; somit für $n>\mu$

$$|f_{n+1}(a)+f_{n+2}(a)+\cdots+f_{n+p}(a)|<2\varepsilon,$$

welchen der Werthe $1, 2\ldots$ auch p annehmen mag. D. h. die Reihe (1) convergirt für $x=a$.

Es ist wichtig hervorzuheben, dafs man den ersten dieser Sätze nicht umkehren darf. Die Reihensumme $f(x)$ kann für alle $a\leq x<b$ stetig sein und die Reihe doch ungleichmäfsig convergiren.[31]) Ein solches Verhalten zeigt die folgende Reihe.

Es sei

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}=x\,\frac{n(n+1)x-1}{(1+n^2x^2)[1+(n+1)^2x^2]}$$
$$(n=0, 1, 2\ldots),$$

so dafs nach Nr. 1 die Summe $f(x)=0$ für alle $0\leq x\leq 1$. [Man wird bemerken, dafs bei jedem Werthe $x>0$ die Glieder schliefslich positiv sind; dafs jedoch keine ganze Zahl m existirt, so dafs wenn

$n > m$ alle Glieder positiv sind, gleichviel welchen Werth im In
valle $(0, 1)$ x annehmen mag.] Hier findet man

$$r_{n-1}(x) = f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots = \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

Die Discussion der Relation $-\varepsilon > 0 -$

$$\frac{nx}{1 + n^2x^2} \lessgtr \varepsilon$$

liefert zunächst

$$\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1 \lessgtr \left(nx - \frac{1}{2\varepsilon}\right)^2.$$

Nimmt $\varepsilon < \frac{1}{2}$ an, so ergiebt sich, dafs $0 < r_{n-1}(x) \leq \varepsilon$, wenn

$$nx > \frac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1} \quad \text{oder} \quad nx \leq \frac{1}{2\varepsilon} - \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1};$$

dafs aber $r_{n-1}(x) > \varepsilon$, wenn

$$\frac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1} > nx > \frac{1}{2\varepsilon} - \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1}.$$

Dabei ist die Quadratwurzel positiv gedacht Würde eine Zahl μ
existiren, so dafs bei $n > \mu$ $0 < r_{n-1}(x) < \varepsilon$ für alle We
$0 < x < 1$; so müfste

$$\mu > \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1}\right\}$$

sein; was aber unmöglich ist, da der Ausdruck rechts bei $\lim x = +$
den Grenzwerth $+\infty$ hat. – Um sich von der ungleichmäfsigen C
vergenz der in Rede stehenden Reihe zu überzeugen, würde die
merkung genügen $r_{n-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. In der That, betrachtet man
die Werthe $x = \frac{1}{m}$ (m natürliche Zahl), so hat man mindestens $m +$
Glieder zu summiren, damit der Rest unter $\frac{1}{2}$ sinkt.

Anmerkung. Die vorstehenden Sätze sind ein besonderer F
des auf ähnliche Art zu erweisenden Satzes: „Angenommen, es
bei einem und demselben Grenzübergange $\lim x$ z. B. $= a + 0$
$f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ je ein endlicher Grenzwerth b_n vorhanden
es convergire die Reihe $\Sigma f_n(x)$ gleichmäfsig für alle x gemäfs Def
tion beizulegenden Werthe $a < x < a + d$; so convergirt die Rei
$\sum_0^\infty b_n$ und man hat

$$\lim_{x=a+0} \sum_0^\infty f_n(x) = \sum_0^\infty b_n.\text{“}$$

In anderen Fällen gilt diese Formel nicht immer, wie die obigen Beispiele zeigen.

22. Reihen nach ganzen positiven Potenzen einer Veränderlichen. Zunächst ist zu untersuchen, ob und für welchen Bereich der Veränderlichen x eine Reihe von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (1)$$

convergirt. Hierzu dient der folgende Satz:

„Wenn für einen bestimmten Werth $x = x_0$ alle Glieder einer Potenzreihe (1) ihrem absoluten Betrage nach eine endliche Zahl g nicht überschreiten, so convergirt sie und zwar absolut für alle Werthe von x, welche dem absoluten Betrage nach kleiner sind als x_0.“

Beweis. Setzt man

$$|x| = X, \quad |x_0| = X_0, \quad |a_n| = A_n,$$

so hat man zufolge Voraussetzung

$$A_n X_0^n \leq g,$$

also

$$A_n X^n < g \left(\frac{X}{X_0}\right)^n, \quad (n = 0,\ 1,\ 2 \ldots.).$$

Es convergirt aber die geometrische Reihe

$$g + g\left(\frac{X}{X_0}\right) + g\left(\frac{X}{X_0}\right)^2 + \cdots,$$

wenn $X < X_0$, somit nach Nr. 4 auch die Reihe

$$A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \cdots \qquad (2)$$

Zugleich erkennt dann, dafs für $X < X_0$ die Summe der Reihe (1) dem absoluten Betrage nicht über der Zahl $g : \left\{1 - \frac{X}{X_0}\right\}$ liegen kann.

Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt: „Divergirt die Reihe (1) für $x = x_0$, so divergirt sie auch für jeden Werth von x, welcher dem absoluten Betrage nach gröfser ist als x_0.“ Denn würde sie convergiren für einen solchen Werth x, dafs $X > X_0$, so würden die Glieder $A_n X^n$ unter

einer endlichen Zahl g liegen; also würde (1) auch für x convergiren.

Nun kann nur Folgendes eintreten:

1) Es convergirt die Reihe (1) für gar keinen W aufser $x = 0$.

2) Die Potenzreihe ist beständig convergent, sie convergirt für jeden endlichen Werth von x.

3) Die Reihe (1) convergirt für einen von Null schiedenen Werth $x = x_0$, jedoch nicht für jeden W von x. Dann giebt es eine und nur eine endl Zahl R, sodafs die Reihe convergirt, und zwar solut, für alle Werthe von x, absolut genom kleiner als R; dagegen divergirt für alle We von x, deren absoluter Betrag gröfser ist als R Das Intervall $(-R, +R)$ heifst das Convergenzinter der Potenzreihe. Über das Verhalten der Reihe an se Grenzen $x = \pm R$ läfst sie im Allgemeinen nichts sag

Definirt man nämlich eine positive Veränderlich durch die Bedingung, dafs die Reihe (1) convergent sei alle Werthe $|x| < X'$, so ist X_0 ein Werth derselben. mufs eine endliche obere Grenze $R > X_0$ haben. Ist X so giebt es Werthe von X' so, dafs $X < X' \leq R$, also vergirt die Reihe (1) für jeden Werth, dessen absoluter trag $< R$. Und ist X ein Werth, dessen absoluter Be $> R$, so mufs die Reihe dafür divergiren; denn wäre sie vergent, so würde sie auch convergiren für jeden W zwischen R und X, also könnte R unmöglich obere Gr von X' sein.

Die genannten drei Classen lassen sich schon n weisen, wenn man nur solche Potenzreihen betrachtet, w $\lim (A_{n+1} : A_n)$ bei $\lim n = +\infty$ existirt. „Je nach dieser Grenzwerth $+\infty$, Null oder eine positive Zahl k gehört die Reihe zur 1., 2. oder 3. Classe.“ — Was in auch X sein mag, wenn es nur positiv ist, man hat ersten Falle

$$\lim_{n=+\infty} \frac{A_{n+1} X^{n+1}}{A_n X^n} = +\infty;$$

somit auch $\lim A_n X^n = +\infty$ für $\lim n = +\infty$; die Reihe (1) divergirt demnach. Im zweiten Falle ist dagegen

$$\lim_{n=+\infty} \frac{A_{n+1} X^{n+1}}{A_n X^n} = 0,$$

so dafs die Reihe (2) und somit auch (1) convergirt. Im dritten Falle ist $R = \frac{1}{\lambda}$, indem

$$\lim_{n=+\infty} \frac{A_{n+1} X^{n+1}}{A_n X^n} = \lambda X,$$

so dafs (2) und (1) convergiren, wenn $X < \frac{1}{\lambda}$; dagegen divergiren, wenn $X > \frac{1}{\lambda}$. (Vgl. Nr. 4.)

Ein Beispiel der ersten Classe bietet mithin die Reihe

$$1 + \sum_1^\infty{}_n\, n!\, x^n;$$

ein solches der zweiten Classe die Reihe

$$1 + \sum_1^\infty{}_n \frac{x^n}{n!}.$$

Potenzreihen, wofür $R = +1$, sind aufser der geometrischen Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ z. B. die folgenden:

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad \sum_1^\infty{}_n \frac{x^n}{n^\alpha}\ (\alpha > 1), \quad \sum_0^\infty{}_k (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Während die geometrische Reihe an den Grenzen des Convergenzintervalles $(-1, +1)$, d. i. für $x = \pm 1$ divergirt, convergirt die zweite für $x = +1$ und divergirt für $x = -1$; die dritte und vierte convergiren für $x = \pm 1$, und zwar die eine absolut, die andere nicht.

23. Satz nach Abel:[32]) Convergirt die Potenzreihe

$$\sum_0^\infty{}_n a_n x^n \qquad (1)$$

für den von Null verschiedenen Werth $x = r$, so convergirt sie gleichmäfsig für alle Werthe von x im

Intervalle (r', r) mit Einschlufs der Grenzen, wo r' irgend einen Werth von entgegengesetzten Zeichen wie bedeutet, jedoch absolut genommen kleiner als r.

Beweis. Setzt man

$$a_{n+1}r^{n+1} + a_{n+2}r^{n+2} + \cdots + a_{n+p}r^{n+p} = \varrho_{n,p},$$

so gehört nach Voraussetzung zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$, so dafs $|\varrho_{n,p}| < \varepsilon$, wenn $n > \mu$. — Es ist nun

$$a_{n+1}r^{n+1} = \varrho_{n,1},\ a_{n+2}r^{n+2} = \varrho_{n,2} - \varrho_{n,1} \cdots$$

$$\cdots\ a_{n+p}r^{n+p} = \varrho_{n,p} - \varrho_{n,p-1};$$

somit nach Nr. 3, 4

$$\sum_1^{\infty p} a_{n+p}x^{n+p} = \varrho_{n,1}\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} + \sum_2^{\infty p}(\varrho_{n,p} - \varrho_{n,p-1})\left(\frac{x}{r}\right)^{n+p}$$

$$= \sum_1^{\infty p} \varrho_{n,p}\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right)^{n+p}.$$

Demnach folgt, wenn $-1 < \frac{r'}{r} < \frac{x}{r} < 1$ und $n > \mu$,

$$\left|\sum_1^{\infty p} a_{n+p}x^{n+p}\right| < \varepsilon\left(1 - \frac{x}{r}\right)\sum_1^{\infty p}\left|\frac{x}{r}\right|^{n+p}$$

$$= \varepsilon\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left|\frac{x}{r}\right|^{n+1} : \left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|\right).$$

Wenn $\frac{x}{r} > 0$, so ist das letzte Glied $< \varepsilon$; wenn $\frac{x}{r} < 0$, $< \frac{r - r'}{r + r'} = \alpha$.

Es ergiebt sich somit, dafs für alle x, welche der Relation $\frac{r'}{r} < \frac{x}{r} < 1$ genügen,

$$|a_{n+1}r^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}| < \alpha\varepsilon,$$

wenn nur $n > \mu$.

Wir schliefsen aus dem vorstehenden Satze, dafs die Summe der Potenzreihe (1) $= f(x)$ — eine stetige Function von x ist für alle Werthe von x im Intervalle (r', r), die Grenzen $x = r'$ und $x = r$ eing

schlossen. — Insbesondere folgt der Satz: „Ist die Potenzreihe

$$a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \cdots \quad (m \geq 1)$$

in einem Intervalle $(-R, +R)$ convergent, so hat man

$$\lim_{x=0} (a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \cdots) = 0.“$$

Dasselbe ergiebt sich aus der Relation

$$|a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \cdots| \leq g \left(\frac{X}{X_0}\right)^m : \left\{1 - \frac{X}{X_0}\right\},$$

worin X_0 einen positiven Werth $< R$ bedeutet und g eine Zahl, nicht kleiner als $A_n X_0^n$ $(n = m, m+1 \ldots)$.

Aus dem obigen Satze folgt auch der in der Anmerkung zu Nr. 11 erwähnte Satz von Abel über die Multiplication zweier Reihen. Convergiren Σa_n, Σb_n, Σd_n, so convergiren die Potenzreihen

$$\sum a_n x^n = f(x), \qquad \sum b_n x^n = g(x), \qquad \sum d_n x^n = h(x)$$

absolut für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner als l ist. Dafür ist also (Nr. 10)

$$h(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Daraus ergiebt sich aber, da bei $\lim x = 1 - 0$

$$\lim f(x) = a, \ \lim g(x) = b \text{ und } \lim h(x) = \Sigma d_n, \ \Sigma d_n = ab.$$

Nehmen wir jetzt an, es sei die Reihe (1) für $x = r$ divergent, dagegen convergent für alle Werthe x, deren absoluter Betrag kleiner ist als $|r| = R$. Dann können wir sofort bemerken, dafs diese Convergenz unmöglich für alle Werthe von x im Intervalle $(r' r)$ mit Ausschlufs der Grenze $x = r$ gleichmäfsig sein kann. Denn wäre das der Fall, so müfste (1) auch für $x = r$ convergiren (Nr. 21).

Weiter wollen wir noch die folgenden Sätze beweisen:

1) „Es sei

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_n r^n = \sigma_n$$

und $r > 0$, was man stets annehmen darf. Ist

$$\lim_{n=+\infty} \sigma_n = +\infty \quad (-\infty),$$

so hat auch

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$$

bei lim $x = r - 0$ den Grenzwerth $+\infty$ $(-\infty)$."

2) „Ist die obere (untere) Unbestimmtheitsgrenze von a_n bei lim $n = +\infty$ eine endliche Zahl $O(U)$, so ist die von $f(x)$ (wenn nicht $-\infty$ $(+\infty)$) eine Zahl, welche nicht gröfs (kleiner) als $O(U)$ ist."[33])

Die Sätze beruhen auf der folgenden **Formel.** Es s $x < r$ und

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = s_n(x).$$

Ist n gröfer als eine feste ganze Zahl m, so folgt wege $a_n r^n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$

$$s_n(x) = s_m(x) + \sum_{m+1}^{n} (\sigma_r - \sigma_{r-1}) \left(\frac{x}{r}\right)^p$$

$$= \left[s_m(x) - \sigma_m \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + \left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum_{m+1}^{n-1} \sigma_p \left(\frac{x}{r}\right)^p + \sigma_n \left(\frac{x}{r}\right)^n. \quad (3$$

Wenn lim $\sigma_n = +\infty$ bei lim $n = +\infty$, so kann m gewählt werden, dafs für $n > m$ $\sigma_n > G$, wobei G irge eine positive Zahl bedeutet. Demnach ist nach (3)

$$s_n(x) > \left[s_m(x) - \sigma_m \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + G\left[\left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum_{m+1}^{n-1} \left(\frac{x}{r}\right)^p + \left(\frac{x}{r}\right)^n\right],$$

d. h.

$$s_n(x) > \left[s_m(x) - \sigma_m \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + G\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}$$

und

$$f(x) > \left[s_m(x) - \sigma_m \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + G\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}.$$

Da bei lim $x = r - 0$

$$\lim \left[s_m(x) - \sigma_m \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] = 0 \quad \lim \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1} = 1,$$

so gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, so dafs wenn nur $r - \delta < x < r$

$$+ \varepsilon > s_m(x) - \sigma_m\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1} > -\varepsilon, \quad 1 > \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1} > 1 - \varepsilon.$$

Man findet also

$$r - \delta < x < r \qquad f(x) > G(1 - \varepsilon) - \varepsilon = G - \varepsilon(G + 1).$$

Wenn nun H eine gegebene positive Zahl bedeutet, so nehme man $G > H$ an, wodurch m bestimmt ist und setze

$$\varepsilon = (G - H) : (G + 1),$$

worauf δ sich ergiebt. Dann folgt für alle $r - \delta < x < r$ $f(x) > H$ d. i.

$$\lim_{x=r-0} f(x) = +\infty.$$

Hat bei $\lim n = +\infty$ σ_n die endliche obere Unbestimmtheitsgrenze O, so kann m so gewählt werden, dafs für $n > m$ $\sigma_n < O + \varepsilon$, wo ε irgend eine positive Zahl sein kann. Demnach folgt aus (3) auf die soeben gezeigte Art

$$n > m \quad s_n(x) < \left[s_m(x) - \sigma_m\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + (O + \varepsilon)\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}$$

und

$$f(x) < \left[s_m(x) - \sigma_m\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + (O + \varepsilon)\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}.$$

Und daraus ergiebt sich für $r - \delta < x < r$, wenn $O \geq 0$,

$$f(x) < \varepsilon + (O + \varepsilon) = O + 2\varepsilon; \tag{4}$$

wenn $O < 0$ (und $\varepsilon < -O$)

$$f(x) < \varepsilon + (O + \varepsilon)(1 - \varepsilon) < O + \varepsilon(2 - O). \tag{5}$$

Ist nun die obere Unbestimmtheitsgrenze von $f(x)$ bei

$$\lim x = r - 0$$

eine endliche Zahl O', so darf man behaupten, dafs im Intervalle $(r - \delta, r)$ mindestens ein Werth x_1 liegt, so dafs

$$f(x_1) > O' - \varepsilon.$$

Also hat man

$$O' - O < 3\varepsilon \text{ bez. } \varepsilon(3 - O),$$

und da diese Zahlen jeden positiven Werth erhalten können, so ergiebt sich $O' \leqq O$ (VII. 7).

3) „Hat σ_n bei $\lim n = +\infty$ endliche und verschied Unbestimmtheitsgrenzen O, U, so convergirt die Reihe

$$\sum_0^\infty a_n x^n \quad (1)$$

für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner a ist. Bezeichnet $f(x)$ ihre Summe, so hat $f(x)$ bei $\lim x = r$ endliche Unbestimmtheitsgrenzen $O'U'$ und es ist

$$U < U' < O' < O.\text{“}^{34})$$

Beweis. Da nunmehr alle σ_n dem absoluten Betr nach unter einer endlichen Zahl g liegen, so convergirt $|x| < r$ die Potenzreihe

$$\sigma_0 + \sigma_1\left(\frac{x}{r}\right) + \sigma_2\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \cdots + \sigma_n\left(\frac{x}{r}\right)^n + \cdots$$

(Nr. 22); somit auch die Reihe

$$\sigma_0\left(1 - \frac{x}{r}\right) + \sigma_1\left(\frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) + \cdots$$

$$+ \sigma_n\left(\frac{x}{r}\right)^n\left(1 - \frac{x}{r}\right) + \cdots$$

Also da $\lim \sigma_n\left(\frac{x}{r}\right)^n = 0$ bei $\lim n = +\infty$, convergirt a die Reihe

$$\sigma_0 + \left(\sigma_1 - \sigma_0\right)\frac{x}{r} + \left(\sigma_2 - \sigma_1\right)\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \cdots,$$

welche mit (1) übereinstimmt. (Vgl. Nr. 3.)

Nach (4) bez. (5) gehört zu jeder Zahl $\varepsilon' > 0$ eine $\delta' > 0$, so dafs wenn

$$r - \delta' < x < r \qquad U - \varepsilon' < f(x) < O + \varepsilon'.$$

Daraus schliefst man, dafs die obere Unbestimmtheitsgre von $f(x)$ bei $\lim x = r - 0$ nicht $= -\infty$, d. h. dafs n $\lim f(x) = -\infty$ sein kann. Ebensowenig kann die unt Unbestimmtheitsgrenze von $f(x)$ bei $\lim x = r - 0$ + sein. Also sind beide endliche Zahlen O', U' und man nach dem zweiten Satze $O' < O$; $U' \geq U$. Dafs $O' =$

sei, ist dabei nicht ausgeschlossen. In der That ist für die geometrische Reihe $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

$$r = 1, \qquad O = 1, \qquad U = 0, \qquad O' = U' = \frac{1}{2}.$$

24. Satz. „Gehört zu jeder positiven Zahl δ ein von Null verschiedener Werth von x, dem absoluten Betrage nach kleiner als δ, durch den die endliche oder unendliche Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots, \qquad (1)$$

welche im letzteren Falle in einem Intervalle $(-R, +R)$ von x convergirt, zu Null gemacht wird, so müssen alle ihre Coefficienten Null sein:

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$"

Beweis. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\delta > 0$, so dafs für alle $|x| < \delta$

$$|a_1 x + a_2 x^2 + \cdots| < \varepsilon,$$

d. i.

$$|f(x) - a_0| < \varepsilon.$$

Nun giebt es einen Werth x_1

$$0 < |x_1| < \delta,$$

so dafs

$$f(x_1) = 0.$$

Also hat man $|a_0| < \varepsilon$, d. i. $a_0 = 0$ (VII. 7).

Nunmehr ist

$$f(x) = x(a_1 + a_2 x + \cdots) = x f_1(x).$$

Da für alle $|x| < \delta_1$

$$|f_1(x) - a_1| < \varepsilon,$$

und ein Werth x_2

$$0 < |x_2| < \delta_1$$

existirt, so dafs

$$f(x_2) = 0$$

also auch $f_1(x_2) = 0$, so folgt $|a_1| < \varepsilon$, d. i. $a_1 = 0$.

Weiter ist

$$f(x) = x^2(a_2 + a_3 x + \cdots) = x^2 f_2(x).$$

Da für alle $|x| < \delta_2$ $|f_2(x) - a_2| < \varepsilon$ und ein Werth x_3 existirt $- 0 < |x_3| < \delta_2 -$, so dafs $f(x_3) = 0$, also $f_2(x_3) = 0$,

so folgt $a_2 < \varepsilon$ d. i. $a_2 = 0$. U. s. f. Auf diese Weise gelangt man allmählich zur Gleichung $a_n = 0$, wie grofs auch n sein mag.

Corollar. „Haben die endlichen oder unendlichen Potenzreihen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

welche jedenfalls in einem gemeinsamen Intervalle $(-R, +R)$ convergiren, die Eigenschaft, dafs zu jeder positiven Zahl δ ein von Null verschiedener Werth von x, dem absoluten Betrage nach kleiner als δ, gehört, wofür die Gleichung $f(x) = g(x)$ besteht; so müssen die gleichstelligen Coefficienten in beiden Reihen übereinstimmen d. i.

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1 \ldots a_n = b_n \ldots$$

Denn es hat die Potenzreihe

$$f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n + \ldots$$

die im vorstehenden Satze verlangte Beschaffenheit, so dafs man schliefsen mufs $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 - b_1 = 0$ und überhaupt $a_n - b_n = 0$.

25. Häufig kommt die folgende Frage vor. Es seien gegeben eine im Intervalle $(-S, +S)$ convergente Potenzreihe nach y

$$\varphi(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots \qquad (1)$$

und eine endliche oder unendliche Potenzreihe nach x

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad (2)$$

im letzteren Falle convergent innerhalb des Intervalles $(-R, +R)$. Giebt es zwischen $-R$ und $+R$ Werthe von x, wofür $|f(x)|$ kleiner als S ist, so convergirt die unendliche Reihe

$$\varphi\{f(x)\} = b_0 + b_1 f(x) + b_2 f(x)^2 + \ldots$$

Nach der Multiplicationsregel in Nr. 10 kann man, wenn $x < R$, die Potenzen $f(x)$, $f(x)^2, \ldots$ entwickeln und zwar erhält man dafür unmittelbar nach Potenzen von x fortschreitende, absolut convergente Reihen:

$$f(x)^m = a_{m,0} + a_{m,1}x + a_{m,2}x^2 + \ldots + a_{m,n}x^n + \ldots \quad (3)$$
$$(m = 2, 3 \ldots).$$

Zur successiven Bildung der Coefficienten $a_{m,n}$ kann man sich auch des binomischen Satzes (VIII. 3) bedienen. Nun entsteht die Frage, ob man die auf diese Art erhaltene zweifach unendliche Reihe nach Potenzen von x ordnen darf. Darauf hat Cauchy durch den folgenden Satz geantwortet.[35])

„Es seien gegeben die Reihe (1) nach Potenzen von y, convergent im Intervalle $-S < y < S$ und die endliche oder unendliche Reihe (2) nach Potenzen von x, im letzteren Falle convergent für alle $-R < x < +R$. — Giebt es positive Werthe von X, kleiner als R, wofür die Summe der unendlichen Reihe

$$\Phi(X) = A_0 + A_1X + A_2X^2 + \ldots,$$

worin A_n den absoluten Betrag von a_n bezeichnet, kleiner als S ist; so convergiren absolut sämmtliche Reihen

$$b_1a_n + b_2a_{2,n} + b_3a_{3,n} + \ldots + b_ma_{m,n} + \ldots \quad (4)$$
$$(n = 0, 1, 2 \ldots),$$

deren Summen somit die Zahlen $c_0, c_1 \ldots c_n \ldots$ sein mögen. Und es läfst sich eine positive Zahl $K < R$ angeben, so dafs für alle $|x| < K$ die unendliche Reihe

$$(b_0 + c_0) + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots \quad (5)$$

convergirt und ihre Summe gleich ist $\varphi\{f(x)\}$."

„Die vorstehende Bedingung verlangt, dafs $A_0 < S$; dann kann man für K jede Zahl nehmen, wofür

$$\Phi(K) < S."$$

Beweis. Nach dem 3. Satze in Nr. 11 hat man die Glieder in den unendlichen Reihen $b_1f(x)$, $b_2f(x)^2 \ldots$ durch ihre absoluten Beträge zu ersetzen und nachzusehen, ob die so erhaltenen Reihen convergiren, sowie auch die aus ihren Summen gebildete Reihe. Das erstere ist unmittelbar ersichtlich, da für alle Werthe $|x| < R$ die Reihe (2), somit auch die Reihen (3) absolut convergiren. Setzt man nun

$$|x| = X, \qquad |b_m| = B_m$$

und

$$|a_{m,0} + a_{m,1}|X + a_{m,2}X^2 + \ldots| = \Phi_m(X) \quad (m = 2, 3 \ldots);$$

so handelt es sich noch um das Verhalten der Reihe

$$B_0 + B_1\Phi_1(X) + B_2\Phi_2(X) + \ldots + B_m\Phi_m(X) + \ldots \quad (6)$$

Sie convergirt in der That, wenn $\Phi(X) < S$, wie der folgende Schlufs lehrt. Bildet man

$$\Phi(X)^m = C_{m,0} + C_{m,1}X + \ldots + C_{m,n}X^n + \ldots;$$

so erkennt man sofort, dafs

$$|a_{m,n}| < C_{m,n}.$$

$a_{m,n}$ ist nämlich eine ganze, ganzzahlige Function der $a_0, a_1 \ldots$ und $A_{m,n}$ genau derselbe Ausdruck in den $A_0 A_1 \ldots$ Somit hat man

$$\Phi_m(X) < \Phi(X)^m$$

und da die Reihe $\Sigma B_m \Phi(X)^m$ convergirt, wenn $\Phi(X) < S$, so gilt dasselbe von (6). — Man schliefst nun nach dem erwähnten Satze, dafs die Reihen (4) absolut convergiren und dafs für die Werthe von x, wofür $\Phi(X) < S$

$$(b_0 + c_0) + c_1x + c_2x^2 + \ldots = \varphi\{f(x)\}. \quad (7)$$

Ist $A_0 < S$, so kann man positive Zahlen $K < R$ bestimmen, so dafs für $X < K$ $\Phi(X) < S$. Während X die Werthe $0 < X < R$ durchläuft, wächst $\Phi(X)$ beständig vom Werthe A_0 an, hat also eine endliche obere Grenze $G > A_0$ oder die obere Grenze $+\infty$. Im letzteren Falle und wenn $G > S$, so bestimme man K so, dafs $\Phi(K) = T$, wo T eine beliebige Zahl zwischen A_0 und S sein kann; ist aber $G < S$, so lasse man T eine beliebige Zahl zwischen A_0 und G sein.

NB. Es ist hervorzuheben, dafs man auf dem angegebenen Wege in der Regel das wahre Convergenzintervall der Potenzreihe (5) nicht finden wird und dafs, selbst wenn dasselbe auf einem anderen Wege bekannt geworden wäre, der obige Satz durchaus nicht zum Schlusse berechtigt, dafs die Gleichung (7) auch für Werthe von x, deren absoluter Betrag gröfser als K ist, bestehe. — Durch Heranziehung complexer Werthe von x hat Weierstrafs gezeigt, dafs wenn es zwischen $-R$ und $+R$ Werthe von x giebt, wofür $|f(x)| < S$ ist, auch in

dem Falle, daſs nicht etwa diejenigen Coefficienten von $f(x)$, welche nicht Null sind, das nämliche Zeichen haben, eine positive Zahl $A < R$ existirt, so daſs Gl. (7) besteht für alle x, deren absoluter Betrag kleiner als A ist. — Also darf man nicht glauben, daſs wenn $A_0 > S$, die Entwickelung von $\varphi\{f(x)\}$ nach Potenzen von x unmöglich sei. Setzt man z. B. in die im Intervalle $(-1, +1)$ convergente geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^3 - \ldots$$

$y = (a-x) : b$, worin $A = |a| > |b|$; so läſst sich gleichwohl die rationale Function

$$\frac{b^2}{b^2 + (a-x)^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2ax - x^2}{a^2+b^2}}$$

sicher nach Potenzen von x entwickeln, wenn

$$2AX + X^2 < a^2 + b^2$$

d. i.

$$X + A < \sqrt{2a^2 + b^2}.$$

Wir werden sehen, daſs das sogar angeht, so lange X kleiner als $\sqrt{a^2+b^2}$ verbleibt.

In zwei Fällen ist die Forderung $A_0 < S$ unmittelbar erfüllt; erstens wenn $a_0 = 0$, d. i. $f(x)$ mit dem Gliede $a_k x^k$ $(k > 1)$ beginnt, zweitens wenn die Reihe (1) beständig convergirt. Im letzteren Falle convergirt die Reihe (5) mindestens für alle Werthe $|x| < R$ und für jeden derselben gilt auch die Gleichung (7).[36]) — Denn ist

$$|x'| = X' < R,$$

so nehme man eine Zahl R' zwischen X' und R an; wegen der beständigen Convergenz von (1) kann man sich $S > \Phi(R')$ denken.

Beispiele. Eines ist oben Nr. 19 erwähnt, wobei $x = 1 : n$ gesetzt ist. — Ein anderes bietet die Aufgabe dar, eine Reihe (2) nach Potenzen von x mit dem Convergenzintervalle $(-R, +R)$, nachdem darin $x = x_0 + h$ gesetzt ist, nach Potenzen von h zu ordnen. Das ist jedenfalls zulässig, wenn

$$|x_0| < R$$

und

$$|x_0| + |h| < R,$$

also

$$|h| < R - |x_0|.$$

Denn nunmehr treten an Stelle der Functionen $f(x)$, $\Phi($ im vorstehenden Satze bez. $x_0 + h$, $|x_0| + |h|$. Unter genannten Bedingungen hat man also

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$

$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots$$

worin

$$f^{(n)}(x_0) = \sum_n^{\infty m} m(m-1)\ldots(m-n+1)\, a_m x_0^{m-n}$$

$$(n = 1, 2 \ldots),$$

d. h. die Reihen (8) convergiren, die Reihe (7) sicher, we $|h| < R - |x_0|$ und sie hat die Summe $f(x_0 + h)$. Es jedoch möglich, dafs sie auch für Werthe convergi die gröfser als $R - x_0$ sind. Z. B.: Die geometrisc Reihe

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

convergirt im Intervalle $(-1, +1)$. Setzt man darin

$$x = x_0 + h \qquad 0 < x_0 < 1,$$

so wird man dieselbe Reihe nach Potenzen von h erhalt wie aus der Entwickelung des Bruches

$$1 : (1 + x_0 + h),$$

d. i.

$$\frac{1}{1 + x_0 + h} = \frac{1}{1 + x_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{h}{1 + x_0}} = \frac{1}{1 + x_0} - \frac{h}{(1 + x_0)^2}$$

$$+ \frac{h^2}{(1 + x_0)^3} - \ldots$$

Sie convergirt, so lange $|h| < 1 + x_0$, also auch für Wer $> 1 - x_0$.

Wie erwähnt, convergiren die nach Potenzen von fortschreitenden Reihen (8) absolut für alle Werthe $|x_0| <$ Man kann hinzufügen, dafs jede dieser Reihen gen dasselbe Convergenzintervall besitzt, wie die Rei

(2). — Ist die Reihe (2) beständig convergent, so folgt der Satz schon aus der vorstehenden Bemerkung. Wenn die Reihe (2) nur in dem endlichen Intervalle $(-R, +R)$ convergirt, so hat man $R < R'$, unter $(-R', +R')$ das wahre Convergenzintervall der Reihe

$$f'(x_0) = \sum_1^\infty {}^m m a_m x_0^{m-1} \tag{9}$$

verstanden. Nun folgt aber aus der absoluten Convergenz von (9) nach Nr. 4 die absolute Convergenz der Reihe

$$\sum {}^m a_m x_0^{m-1},$$

also die von

$$\sum {}^m a_m x_0^m; \tag{10}$$

somit ergiebt sich weiter $R > R'$. Aus beiden Relationen zusammen wird man schliefsen $R = R'$. — Die Reihe

$$f''(x_0) = \sum_2^\infty {}^m m(m-1)\, a_m x_0^{m-2} \tag{11}$$

steht in derselben Beziehung zu (9), wie diese selbst zu (10), d. h. setzt man in (10) statt a_m durchaus $(m+1)\, a_{m+1}$, so geht $f'(x_0)$ in $f''(x_0)$ über. Also convergirt auch (11) genau im Intervalle $(-R, +R)$. U. s. f.

Die Functionen $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ ... heifsen nach Lagrange die erste, zweite ... Ableitung der Function $f(x)$, welche als Summe der Potenzreihe (2) definirt ist, und werden auch mit $D_x f(x)$, $D_x^2 f(x)$ ... bezeichnet.

26. Als drittes Beispiel zum Satze der vorigen Nummer möge die Entwickelung des Quotienten zweier endlichen oder unendlichen Potenzreihen von x

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^n a_n x^n \qquad g(x) = \sum_0^\infty {}^n b_n x^n$$

in eine Reihe nach Potenzen von x dienen. Dabei ist anzunehmen, dafs der Nenner $g(x)$ für $x = 0$ d. i. b_0 nicht Null ist. Demnach kann man

$$g(x) = b_0(1+y), \qquad y = \sum_1^\infty \frac{b_n x^n}{b_0}$$

setzen, woraus sich zunächst ergiebt, dafs der Bruch

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0}(1 - y + y^2 - \ldots),$$

für hinlänglich kleine Werthe von x in eine Reihe nach Potenzen von x entwickelt werden könne. Man findet

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0} + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots \tag{12}$$

mindestens für alle Werthe $|x| < K$, wo K aus der Relation

$$\frac{B_1 K}{B_0} + \frac{B_2 K^2}{B_0} + \ldots < 1, \qquad |b_n| = B_n,$$

zu entnehmen ist. Denkt man sich K auch so klein, dafs es innerhalb des Convergenzintervalles der Reihe $f(x)$ fällt, so erhält man durch Multiplication dieser Reihe mit (12) die gesuchte Entwickelung

$$\frac{f(x)}{g(x)} = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots \tag{13}$$

Die Coefficienten d_n wird man leichter recurrirend aus den folgenden Formeln berechnen. Aus (13) ergiebt sich, dafs für alle $|x| < K$

$$f(x) = g(x) \cdot \{ d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots \}. \tag{14}$$

Daher stimmen nach einem Satze in Nr. 24 die Coefficienten derselben Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung überein. Man findet demnach

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 d_0 \\ a_1 &= b_1 d_0 + b_0 d_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= b_n d_0 + b_{n-1} d_1 + \ldots + b_0 d_n \end{aligned} \tag{15}$$

d. i. ein System von Gleichungen, aus welchen man nacheinander die Zahlen $d_0, d_1, \ldots d_n \ldots$ berechnen kann, indem b_0 von Null verschieden ist.

Die Giltigkeit der Gleichung (13) ist in der Regel nicht

auf das Intervall $-K < x < +K$ beschränkt, sie reicht vielmehr soweit, als beide Reihen $g(x)$ und

$$d_0 + d_1 x + d_2 x^2 \ldots$$

absolut convergiren. Das folgt unmittelbar daraus, dafs beide Seiten der Gleichung (14) identisch sind. Es kommt somit darauf an, das Convergenzintervall der Reihe

$$d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots$$

zu bestimmen, was diejenigen Fälle, wo es sich aus den Coefficienten d_n ermitteln läfst, ausgenommen, erst die Theorie der Functionen complexer Veränderlichen zu leisten vermag. Man wird indefs bemerken, dafs die Reihe $d_0 + d_1 x + \ldots$ für einen Werth $x = x_0$ nicht mehr convergiren kann, wofür $g(x_0) = 0$, während $f(x_0)$ von Null verschieden ist. Denn es ist nun

$$\lim \{f(x) : g(x)\} = \pm\infty \quad \text{bei} \quad \lim x = x_0 \pm 0,$$

während, wenn die genannte Reihe für $x = x_0$ convergiren würde, dieser Grenzwerth endlich sein müfste (Nr. 23).

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, so kann die Aufgabe mit Hülfe der Partialbruchzerlegung der rationalen Function $f(x) : g(x)$ auf reellem Wege zu Ende geführt werden. Dabei handelt es sich hauptsächlich um den Nachweis, dafs der Bruch $1 : [(x-a)^2 + b^2]$, worin b nicht Null ist, eine Reihe liefert, welche für alle Werthe $x < \sqrt{a^2 + b^2}$ convergirt. Wir werden später sehen, dafs man ihn durch eine trigonometrische Umformung der Coefficienten dieser Reihe erbringen kann.

Lassen wir $f(x)$, $g(x)$ in x bez. vom Grade p, q sein, so gehen die Gleichungen (15), wenn $n > p$, in folgende über

$$0 = b_n d_0 + b_{n-1} d_1 + \ldots + b_0 d_n. \qquad (16)$$

Und wenn n auch $> q$, so hat man fortan

$$0 = b_q d_{n-q} + b_{q-1} d_{n-q+1} + \ldots + b_0 d_n. \qquad (17)$$

Aus diesem Grunde nennt man jetzt die Reihe $\Sigma d_n x^n$ recurrent.

Ist umgekehrt eine Potenzreihe $\Sigma d_n x^n$ vorgelegt, deren

Coefficienten für alle Werthe $n > m$ den Relationen (17), bez. falls $m < q$, für die Werthe $m < n < q$ den Relationen (16) genügen; so giebt es eine rationale Function von x, deren Entwickelung nach Potenzen von x die vorgelegte Reihe bildet. Man kann daraus entnehmen, dafs zu jeder recurrirenden Potenzreihe ein endliches, nicht verschwindendes Convergenzintervall gehört.

Die genannte rationale Function hat den Nenner

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_q x^q$$

und als Zähler eine ganze Function in x vom Grade $m - 1$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1} x^{m-1},$$

deren Coefficienten aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 d_0 \\ a_1 &= b_1 d_0 + b_0 d_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{m-1} &= \ldots + b_1 d_{m-2} + b_0 d_{m-1} \end{aligned} \qquad (18)$$

zu bestimmen sind. — In der That genügen die Coefficienten der Entwickelung von $f(x) : g(x)$ zunächst den Gleichungen (18), so dafs für $d_0, d_1, \ldots d_{m-1}$ die bereits bekannten Werthe sich ergeben. Die weiteren Coefficienten der Reihe $d_m, d_{m+1} \ldots$ folgen aus den Gleichungen (17) bez. (16), so dafs auch sie mit den gleichstelligen Coefficienten der vorgelegten Reihe übereinstimmen.

27. Reihen nach ganzen positiven Potenzen von zwei Veränderlichen x, y.

Unter einer solchen versteht man die aus Gliedern von der Form $a_{m,n} x^m y^n$, worin die Exponenten m, n unabhängig von einander alle ganzzahligen Werthe 0, 1, 2 ... erhalten können, gebildete unendliche Reihe

$$a_{0,0} + a_{1,0} x + a_{0,1} y + a_{2,0} x^2 + a_{1,1} xy + a_{0,2} y^2 + \ldots \quad (1)$$

Sie hat nur dann eine Bedeutung, wenn sie wenigstens bei der angegebenen Ordnung der Glieder convergirt. Wenn die Reihe (1) absolut convergirt, so convergiren absolut nach Nr. 10 auch die Reihen

$$x^m(a_{m,0} + a_{m,1}y + a_{m,2}y^2 + \cdots) \qquad m = 0, 1, 2 \ldots,$$

sowie die aus ihren Summen $x^m g_m(y)$ gebildete Reihe und zwar hat diese dieselbe Summe wie (1), welche wir mit $f(x, y)$ bezeichnen. Man hat demnach

$$f(x, y) = \sum_0^\infty x^m g_m(y) \tag{2}$$

und analog, wenn man

$$a_{0,n} + a_{1,n}x + a_{2,n}x^2 + \cdots = f_n(x)$$

setzt,

$$f(x, y) = \sum_0^\infty y^n f_n(x).$$

Satz. „Liegen sämmtliche Glieder $a_{m,n}x^m y^n$ für die Werthe $x = x_0$, $y = y_0$, deren keiner Null ist, dem absoluten Betrage nach nicht über endlichen Zahl g, so convergirt und zwar absolut die Potenzreihe $\Sigma a_{m,n} x^m y^n$ für alle Werthsysteme x, y, welche der Bedingung genügen:

$$|x| < |x_0|, \quad |y| < |y_0|.“$$

Beweis. Bezeichnet man die absoluten Beträge von $a_{m,n}$, x u. s. w. mit grofsen Buchstaben $A_{m,n}$, X u. s. w., so findet man

$$A_{m,n}X_0^m Y_0^n \leq g, \quad A_{m,n}X^m Y^n \leq A_{m,n}\left(\frac{X}{X_0}\right)^m \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^n.$$

Setzt man

$$X : X_0 = \alpha, \quad Y : Y_0 = \beta,$$

so ergiebt sich, dafs die absoluten Beträge der Glieder in (1) kleiner sind als die gleichstelligen in der Reihe

$$g + g\alpha + g\beta + g\alpha^2 + g\alpha\beta + g\beta^2 + \cdots$$

Diese Reihe convergirt nach Nr. 7, wenn $\alpha < 1$ und $\beta < 1$; und zwar ist ihre Summe das Product der beiden geometrischen Reihen

$$g + g\alpha + g\alpha^2 + \cdots, \quad 1 + \beta + \beta^2 + \cdots$$

Somit convergirt, wenn $X < X_0$, $Y < Y_0$, die Reihe (1) absolut.

Zugleich ergiebt sich, dafs nun

$$|f(x, y)| \leq g : \left(1 - \frac{X}{X_0}\right)\left(1 - \frac{Y}{Y_0}\right).$$

Aus dem vorstehenden Satze folgt, dafs wenn eine Potenzreihe nach x und y für ein System von Werthen $x = x_0$, $y = y_0$, von denen keiner Null ist, convergirt, sie in dem durch die Relationen $X < X_0$, $Y < Y_0$ definirten Gebiete von x, y absolut convergirt.

28. Satz. „Es seien zwei unendliche Reihen von Werthen

$$x_0, x_1, \ldots x_r, \ldots; \; y_0, y_1 \ldots y_s \ldots$$

gegeben, deren Glieder sämmtlich von Null verschieden und dabei den Bedingungen genügen

$$\lim_{r=+\infty} |x_r| = 0, \qquad \lim_{s=+\infty} |y_s| = 0.$$

Wenn nun eine endliche oder eine für alle Werthsysteme x, y, wofür

$$|x| < R, \qquad |y| < S,$$

absolut convergirende unendliche Potenzreihe (1) für jedes Werthsystem x_r, y_s den Werth 0 hat, so mufs sie identisch verschwinden, d. h.

$$a_{m,n} = 0, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots“$$

Beweis. Setzt man in (2) $y = y_s$ und daneben nacheinander $x = x_0, x_1 \ldots$, so folgt nach Nr. 24

$$g_m(y_s) = 0 \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots).$$

Und läfst man hier s die Werthe $0, 1, 2 \ldots$ annehmen, so findet man nach eben demselben Satze

$$a_{m,0} = 0, \quad a_{m,1} = 0 \ldots a_{m,n} = 0 \ldots$$

Corollar. „Haben die endlichen oder unendlichen Potenzreihen

$$\sum a_{m,n} x^m y^n, \qquad \sum b_{m,n} x^m y^n,$$

welche jedenfalls in einem Gebiete

$$|x| < R, \qquad |y| < S$$

absolut convergiren, für jedes der soeben beschriebenen Werthsysteme $x_r y_s$ denselben Werth, so müssen die mit den nämlichen Indices versehenen Coefficienten einander gleich sein, d. i.

$$a_{m,n} = b_{m,n}, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots$$

Beweis wie beim analogen Satze in Nr. 24.

29. Analog dem Satze in Nr. 25 läfst sich die folgende Behauptung rechtfertigen: „Es seien gegeben die Reihe nach Potenzen von y, z

$$\varphi(y, z) = \sum b_{m,n} y^m z^n, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, \ldots$$

convergent für jedes Werthsystem yz, wofür

$$|y| < S, \; |z < T$$

und die endlichen oder unendlichen Potenzreihen

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad g(x) = \sum b_n x^n,$$

welche für die Werthe

$$-R < x < +R$$

convergiren. Giebt es positive Werthe von X, kleiner als R, wofür die Summen der Reihen

$$\Phi(X) = \sum A_n X^n, \qquad \Psi(X) = \sum B_n X^n,$$

worin

$$A_n = |a_n|, \qquad B_n = |b_n|,$$

kleiner sind als S, bez. T; so kann man

$$\varphi\{f(x), \; g(x)\}$$

nach Potenzen von x ordnen, d. h. es werden die Coefficienten von $x^0, x^1, x^2 \ldots$ convergente Reihen mit den Summen $c_0, c_1, c_2 \ldots$ sein und eine positive Zahl $K < R$ sich angeben lassen, so dafs für alle $|x| < K$ die Reihe $c_0 + c_1 x + \cdots$ convergirt und die Gleichung besteht

$$\sum c_n x^n = \varphi\{f(x), \; g(x)\}.$$

Die vorstehende Bedingung verlangt, dafs

$$A_0 < S, \quad B_0 < T;$$

dann kann man für K jede Zahl nehmen, wofür

$$\Phi(K) < S, \quad \Psi(K) < T.“ \; ^{37})$$

Als eine Anwendung dieses Satzes erscheint die Aufgabe, die Potenzreihe (1), nachdem darin

$$x = x_0 + h, \quad y = y_0 + k$$

gesetzt sind, nach Potenzen von h, k zu entwickeln. Convergirt (1) absolut für alle Systeme x y, wofür

$$|x| < R, \qquad |y| < S,$$

so ist das jedenfalls zulässig, wenn

$$|x_0| < R, \quad |y_0| < S$$

und

$$|x_0| + |h| < R, \quad |y_0| + |k| < S.$$

Unter diesen Bedingungen hat man

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k) = \sum_{r,s} \frac{f_{r,s}(x_0, y_0)}{r!\ s!} h^r k^s, \quad \left.\begin{matrix} r \\ s \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots, \quad (3)$$

wobei

$$f_{0,0}(x_0, y_0) = f(x_0 y_0) \qquad 0! = 1$$

und

$$f_{r,s}(x_0, y_0) = \sum_{m,n} m(m-1)\ldots(m-r+1)\, n(n-1)\ldots$$
$$(n-s+1)\, a_{m,n} x_0^{m-r} y_0^{n-s} \qquad (m \geq r, \quad n \geq s)$$

zu setzen sind.

30. Auflösung der Gleichungen durch Reihen.

Satz. „Wird vorgelegt die Gleichung

$$y = a_{0,1}x + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \cdots + a_{m,n}x^m y^n + \cdots, \quad (4)$$

deren rechte Seite eine endliche oder unendliche Reihe nach ganzen positiven Potenzen von xy bildet mit Coefficienten, welche, absolut genommen, sämmtlich eine gegebene Zahl g nicht überschreiten; so giebt es eine und nur eine innerhalb eines gewissen Intervalles von x convergente Potenzreihe ohne constantes Glied:

$$c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

welche für y in die Gleichung (4) gesetzt, sie identisch erfüllt, so dafs, wenn man beide Seiten nach Potenzen von x ordnet, jede Potenz den nämlichen Coefficienten bekommt."

Beweis. Zunächst bemerke man, dafs, wenn in (4) eine unendliche Reihe steht, sie nach Nr. 27 absolut convergirt für jedes Werthsystem $x\ y$, wofür

$$|x| < 1, \quad |y| < 1.$$

Setzt man in (4)

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{5}$$

in der Voraussetzung, dafs die Reihe für alle Werthe

$$-R < x < +R$$

convergire, so kann man nach Nr. 29 die rechte Seite nach Potenzen von x ordnen. Soll nun die Reihe (5) die Gleichung (4) identisch befriedigen, so müssen die Coefficienten der nämlichen Potenzen von x auf beiden Seiten derselben übereinstimmen, also die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{0,1} \\ c_2 &= a_{2,0} + a_{1,1} c_1 + a_{0,2} c_1^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

In der n^{ten} steht links c_n, rechts eine lineare homogene Function einiger unter den $a_{m,n}$, deren Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen der Coefficienten $c_1, c_2 \ldots c_{n-1}$. Somit liefern die Gleichungen ein Werthsystem $c_1, c_2 \ldots c_n \ldots$, so dafs es nur eine Reihe (5) geben kann. Sind aber die für die c_n ermittelten Werthe derart, dafs die Reihe (5) nicht etwa blofs für $x = 0$ convergirt? Cauchy hat ein Verfahren gefunden,[38]) wonach man sich überzeugen kann, dafs dem in der That so ist. Wir sind nämlich im Stande, ein System positiver Zahlen $D_1, D_2 \ldots D_n \ldots$ nachzuweisen, die nicht kleiner sind als bez. $|c_1|, |c_2| \ldots |c_n| \ldots$ und dabei so beschaffen, dafs die Reihe $D_1 x + D_2 x^2 + \cdots$ (6) für alle Werthe $-K < x < +K$ convergirt. — Es springt in die Augen, dafs, wenn in den Gleichungen (6) alle $a_{m,n}$ durch die positive Zahl $g \geqq |a_{m,n}|$ ersetzt werden, so dafs sie übergehen in

$$\begin{aligned} D_1 &= g \\ D_2 &= g(1 + D_1 + D_1^2) \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{7}$$

jedes D_n positiv und nicht kleiner als $|c_n|$ ausfällt. Wir bemerken ferner, dafs die Reihe (6) unter der Voraussetzung ihrer Convergenz in einem Intervalle $(-K, +K)$, für y in die Gleichung

$$y = gx + gx^2 + gxy + gy^2 + \cdots + gx^m y^n + \cdots,$$

d. i. nach Nr. 27

$$y = \frac{g}{(1-x)(1-y)} - g(1+y),$$

$$(g+1)y^2 - y = -\frac{gx}{1-x} \tag{8}$$

gesetzt, sie identisch erfüllt. Diese Gleichung wird wirklich nach y durch eine convergente Potenzreihe von der Form (4) aufgelöst, welche, da es nur eine solche geben kann, mit (6) übereinstimmen mufs. Denn aus (8) ergiebt sich

$$2(g+1)y = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4g(g+1)x}{1-x}},$$

und hieraus nach Nr. 25, da nach XI. 2 für $|u| < 1$

$$\sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 - \cdots$$

und für $|x| < 1$

$$x : (1-x) = x + x^2 + \cdots\cdots,$$

beim unteren Zeichen der Quadratwurzel

$$y = gx + g(1 + g + g^2)x^2 + \cdots$$

Und zwar convergirt die Reihe rechts, wenn

$$4g(g+1)X : (1-X) < 1,$$

d. i.

$$|x| = X < 1 : (2g+1)^2.$$

Soweit convergirt sicher auch die Reihe (5).

Was seit Newton ein Grundgedanke der Analysis gewesen, nämlich, dafs eine Gleichung von der Form (4) nach y durch eine (convergente) Potenzreihe von x aufgelöst werden könne, ist jetzt endgiltig festgestellt worden. Wir wollen noch einige besondere Fälle dieses weittragenden Satzes aufführen.

1) Wenn $G(x, y)$ eine ganze Function von $x\,y$ bedeutet und $x_0\,y_0$ ein Werthsystem, so dafs $G(x_0, y_0) = 0$, und man entwickelt $G(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ in die Form (3), so läfst sich diese Gleichung nach k durch eine convergente Potenzreihe von h auflösen, wenn der Coefficient $G_{0,1}(x_0, y_0)$ nicht Null ist.

2) Sollten die Glieder der rechten Seite von (4) bei der Substitution der Werthe $x = x_0$, $y = y_0$, von denen keiner Null ist, endlich bleiben, so braucht man nur statt $x\,y$ die neuen Veränderlichen $x = x_0 x'$, $y = y_0 y'$ einzuführen.

3) Die Umkehrung der Reihen. Die Gleichung

$$x = a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n + \cdots = f(y), \qquad (9)$$

worin rechts eine im Intervalle $(-S, S)$ convergente Potenzreihe von y steht, läfst sich, wenn a_1 nicht Null ist, auf die Form (4) zurückführen. Wir erhalten dann daraus für y eine convergente Reihe

$$y = \frac{x}{a_1} - \frac{a_2}{a_1^3} x^2 + \cdots = g(x).$$

Setzt man, unter x einen Werth innerhalb des Convergenzintervalles derselben und unter y das zugehörige $g(x)$ verstanden, in (9) statt xy bez. $x + h$, $y + k$ und entwickelt auch die rechte Seite nach Potenzen von h, so findet man sofort

$$1 = f'(y) \cdot g'(x). \qquad (10)$$

31. Über die numerische Berechnung des Grenzwerthes einer convergenten Reihe. Dabei wird verlangt, einen mit Einheiten von der Ordnung 10^{-k} abschliefsenden Decimalbruch α zu finden, dessen Unterschied vom Grenzwerthe a der convergenten Reihe Σa_n dem absoluten Betrage nach unter einer halben Einheit der letzten Ordnung liegt:

$$|a - \alpha| < \tfrac{1}{2}\, 10^{-k}.$$

Es sei

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

und $|r_n| \leq R_n$, worin R_n als eine gegebene Function von n zu betrachten ist. Die Glieder a_0, a_1 . . der Reihe werden im Allgemeinen selbst unendliche Decimalbrüche sein, so dafs zunächst die folgende

Aufgabe zu lösen ist: wieviel Glieder von Σa_n sind zu berücksichtigen und auf wieviel Stellen ist jedes derselben zu berechnen, damit

$$|a - \sigma_n| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k},$$

unter σ_n die Summe der auf die noch aufzufindende Anzahl $(k+l)$ von Stellen abgerundeten Näherungswerthe $\alpha_0 \dots \alpha_n$ der Glieder $a_0 \dots a_n$ verstanden.[39]) Es soll nun sein

$$|a - \sigma_n| = |a - s_n| + |s_n - \sigma_n| < R_n + \frac{n+1}{2 \cdot 10^{k+l}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k},$$

d. h.

$$R_n < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{k+l}} (10^l - n - 1).$$

Hieraus hat man durch Versuche die ganzen Zahlen n, l zu bestimmen. Ist das geschehen und σ_n auf $k+l$ Stellen berechnet, so wird σ_n unter Berücksichtigung der Correctur auf k Stellen abgerundet, wodurch man erhält

$$\sigma_n = \beta + \varrho, \qquad -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k} < \varrho \leq +\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k}.$$

Man kann aber aus der Relation $a - \beta = a - \sigma_n + \varrho$ nur schliefsen $|a - \beta| < 10^{-k}$, d. h. der Decimalbruch β bildet entweder den Anfang der Zahl a bis zu den Einheiten der Ordnung 10^{-k} einschliefslich oder seine letzte Ziffer ist um eine Einheit höher als die gleichstellige in a.

Um den gesuchten Näherungswerth α zu erhalten, mufs man die soeben angezeigte Rechnung zum mindesten um eine Stelle weiter führen. Wenn man von der ersten, auf diese Weise gefundenen Zahl β', welche also der Relation $a - \beta' < 10^{-k-1}$ genügt, die letzte Decimale wegläfst, so bleibe β übrig. Da nun

$$\beta' = \beta + \frac{c_{k+1}}{10^{k+1}} \qquad (0 \leq c_{k+1} \leq 9)$$

$$a - \beta = (a - \beta') + \frac{c_{k+1}}{10^{k+1}}$$

$$a - \left(\beta + \frac{1}{10^k}\right) = (a - \beta') - \frac{10 - c_{k+1}}{10^{k+1}};$$

so wird man, je nachdem c_{k+1} einen der Werthe 0 bis 4 oder einen der Werthe 6 bis 9 annimmt, $\alpha = \beta$ oder $\alpha = \beta + 10^{-k}$ setzen. Im Falle $c_{k+1} = 5$ mufs die Rechnung so lange fortgesetzt werden, bis die letzte Ziffer des bezüglichen Werthes β von 5 verschieden ausfällt.

82. Im Falle einer Potenzreihe kann man in folgender Art Functionen R_n zur Schätzung des Restes

$$r_n = a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots\cdots$$

aufstellen. Weifs man, dafs die Glieder der Potenzreihe von

$$a_{n+1}x^{n+1}$$

an für einen Werth $x = \pm R$ unter einer Zahl g_n verbleiben — was stets der Fall ist, wenn die Reihe für $x = \pm R$ convergirt — so findet man nach Nr. 22, wenn $|x| = X < R$,

$$|r_n| < g_n\left(\frac{X}{R}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{X}{R}\right). \tag{1}$$

Nehmen die Glieder A_nR^n mit wachsendem n beständig ab, so kann

$$g_n = A_{n+1}R^{n+1}$$

gesetzt werden, wodurch sich ergiebt für $X < R$

$$|r_n| < A_{n+1}X^{n+1} : \left(1 - \frac{X}{R}\right) \qquad A_n = |a_n|. \tag{2}$$

Wenn aufserdem der Quotient $A_{n+1} : A_n$ mit wachsendem n beständig abnimmt, so hat man

$$\frac{A_{n+k}}{A_{n+1}} = \frac{A_{n+k}}{A_{n+k-1}}\cdot\frac{A_{n+k-1}}{A_{n+k-2}}\cdots\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} < \left(\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}\right)^{k-1},$$

und damit, wenn $X < R$,

$$\begin{aligned}|r_n| &< A_{n+1}X^{n+1}\left\{1 + \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}X + \left(\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}X\right)^2 + \cdots\right\} \\ &= A_{n+1}X^{n+1} : \left(1 - \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}X\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Denn es ist wegen $A_{n+1}R^{n+1} < A_nR^n$

$$A_{n+1}R < A_n,$$

also

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}X < \frac{X}{R} < 1.$$

Wenn die Coefficienten der Potenzreihe sämmtlich gleichbezeichnet, z B. positiv und die Reihe für den positiven Werth $X = R$ convergirt, so dafs

$$\sum a_nR^n = b;$$

so findet man, falls $X < R$,

$$|r_n| < \left(\frac{X}{R}\right)^{n+1} \sum_{1}^{\infty} {}_s a_{n+s} R^{n+s},$$

d. i.

$$|r_n| < \left(\frac{X}{R}\right)^{n+1} \cdot \left\{ b - \sum_{0}^{n} {}_r a_r R^r \right\}. \tag{4}$$

Wenn die Zeichen der geltenden Glieder von

$$\sum a_n x^n$$

alterniren und dabei die Glieder dem absoluten Betrage nach beständig und unter jede Zahl sinken, so wendet man den Satz von Nr. 8 an.

XI. Abschnitt.

Die Potenzreihen für die Expontialfunction, die Potenz und den Logarithmus.

1. Mit Benutzung des im IX. Abschnitte entwickelten Begriffes einer stetigen Function können wir die Erörterungen in VIII. 6—8 auch als Lösung der von Cauchy[1]) formulirten Aufgabe hinstellen: „Eine eindeutige, zwischen beliebigen Grenzen der Veränderlichen x stetige Function derselben zu finden, welche für alle Werthe von $x\ y$ die Gleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (1)$$

befriedigt. Aufserdem soll $f(1)$ eine gegebene positive Zahl a sein." Die gesuchte Function kann nämlich keine andere sein als die Potenz

$$f(x) = \left[f(1)\right]^x = a^x.$$

Versuchen wir nun, ob sich die Exponentialfunction $f(x)$ nicht durch eine innerhalb eines endlichen von Null verschiedenen Intervalles convergente Potenzreihe darstellen lasse.[2]) Unter Voraussetzung, dafs

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

folgern wir aus (1) nach X. 28, dafs die Coefficienten von $x^m y^n$ auf beiden Seiten dieser Gleichung übereinstimmen müssen, d. i.

$$a_m a_n = \binom{m+n}{m} a_{m+n}, \quad \binom{m}{n} = 0,\ 1,\ 2 \ldots \qquad (2)$$

Aus $a_0^2 = a_0$ mufs man schliefsen $a_0 = 1$, da die Annahme $a_0 = 0$ auch $a_m = 0$ d. i. $f(x) = 0$ nach sich ziehen würde. Man findet ferner für $m = 1$, $n = 1,\ 2 \ldots$

$$a_1^2 = 2a_2, \quad a_1 a_2 = 3a_3, \quad \ldots\ldots \; a_1 a_{n-1} = n a_n,$$

somit durch Multiplication dieser Gleichungen, da keine der Zahlen a_1, $a_2 \ldots$ Null sein kann,

$$a_n = \frac{a_1^n}{n!}.$$

Dieser Ausdruck genügt in der That der Relation (2) wegen

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}.$$

Wir sehen demnach, dafs

$$f(x) = 1 + a_1 x + \frac{(a_1 x)^2}{2!} + \cdots\cdots\cdots \qquad (3)$$

sein mufs. Das ist in der That eine Potenzreihe, welche nicht etwa blofs für $x = 0$ convergirt, ja sogar eine beständig convergente (X. 22). Man überzeugt sich auch sofort, dafs sie wirklich die Gleichung (1) befriedigt.

Die Summe der unendlichen Reihe (3), welche die willkürliche Constante a_1 enthält, ist eine eindeutige und stetige Function von x für jeden endlichen Werth von x. Sie mufs daher mit a^x übereinstimmen, wenn

$$f(1) = a = 1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \cdots\cdots$$

ist. Setzt man zunächst $a_1 = 1$, so ergiebt sich nach VII. 5

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

(Basis der natürlichen Logarithmen) und somit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots \qquad (4)$$

Unter „Exponentialfunction" versteht man häufig die specielle Function e^x, die auch die „natürliche Potenz" heifst.

Für die allgemeinere Function a^x ist

$$a = f(1) = e^{a_1},$$

d. i.

$$a_1 = la,$$

also

$$a^x = e^{x\,la} = 1 + x\,la + \frac{(x\,la)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x\,la)^n}{n!} + \cdots\cdots \qquad (5)$$

Die Gleichungen (4) und (5) gelten für jeden endlichen Werth von x, so dafs eine vollständige analytische Darstellung der Functionen e^x, a^x erlangt worden ist.

2. Die Binomialreihe. Der Eingangs der vorigen Nr. erwähnte Satz führt auch zur Lösung der Aufgabe: „den Grenzwerth der Potenzreihe

$$\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots + \mu_n x^n + \cdots\cdots, \qquad (6)$$

worin

$$\mu_0 = 1, \qquad \mu_n = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,n},$$

zu bestimmen im Falle, dafs sie convergirt."

Wenn μ eine natürliche Zahl oder 0 ist, so reducirt sich die Reihe (6) auf eine endliche, deren Summe nach VIII. 3 $(1+x)^\mu$ ist.

Ist aber die Reihe (6) unendlich, so hat man zunächst zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sie convergirt.

1) Zur Binomialreihe gehört das Convergenzintervall $(-1, +1)$. — Unmittelbar nach X. 22, indem

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} = \frac{\mu - n + 1}{n},$$

$$\frac{(-1)^n \mu_n}{(-1)^{n-1}\mu_{n-1}} = \left|\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\right| = 1 - \frac{\mu+1}{n} \quad (n > \mu + 1); \qquad (7)$$

also bei $\lim n = +\infty$

$$\lim \left|\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\right| = +1$$

ist. — Nach X. 19 folgt daraus ferner, dafs falls $n > \mu + 1$, $(-1)^n \mu_n$ stets dasselbe Zeichen hat, somit die Binomialcoefficienten μ_n abwechselnd positiv und negativ sind, und dafs bei $\lim n = +\infty$ $\lim |\mu_n| = 0$ oder $+\infty$, je nachdem $\mu >$ oder < -1. $\binom{-1}{n}$ ist $(-1)^n$.

2) Für $x = -1$ werden die Glieder von (6), wenn n die Zahl $\mu + 1$ übersteigt, gleichbezeichnet. Die Reihe convergirt dann und nur dann, wenn $\mu > 0$. — Nach X. 19 zufolge (7).

3) Für $x = +1$ sind, wenn n die Zahl $\mu + 1$ über-

steigt, die Glieder abwechselnd positiv und negativ. Die Reihe convergirt dann und nur dann, wenn $\mu > -1$ und zwar absolut nur, wenn $\mu > 0$. — Nach X. 20 zufolge (7).

Im Falle der Convergenz sei

$$\sum_0^\infty \mu_n x^n = \varphi(\mu, x).$$

Bedeutet m eine natürliche Zahl oder 0, so hat man, wie erwähnt,

$$\varphi(m, x) = (1 + x)^m.$$

Da somit

$$\varphi(m, x)\, \varphi(n, x) = \varphi(m + n, x), \qquad (7^*)$$

so liegt es nahe, das Product $\varphi(\mu, x) \cdot \varphi(\nu, x)$ im Allgemeinen zu untersuchen. Hierbei ergiebt sich leicht der Satz: „Es ist

$$\varphi(\mu, x)\, \varphi(\nu, x) = \varphi(\mu + \nu, x), \qquad (8)$$

wenn nur die drei hier vorkommenden Reihen convergiren."

Mit Rücksicht auf X. 23 genügt es, den Satz unter der Voraussetzung, dafs $|x| < 1$ sei, zu beweisen, in welchem Falle die Reihen $\varphi(\mu, x)\ \varphi(\nu, x)$ absolut convergiren. Man findet daher nach X. 10

$$\varphi(\mu, x)\, \varphi(\nu, x) = \sum_0^\infty c_r x^r,$$

wo

$$c_r = \mu_0 \nu_r + \mu_1 \nu_{r-1} + \cdots + \mu_{r-1} \nu_1 + \mu_r \nu_0.$$

Es ist nun

$$c_1 = \binom{\mu + \nu}{1}, \qquad c_2 = \binom{\mu + \nu}{2} \cdots$$

und allgemein

$$c_r = \sum_0^r \mu_s \nu_{r-s} = \binom{\mu + \nu}{r}. \qquad (9)$$

Wir könnten diese Gleichung durch den Schlufs von r auf $r+1$ beweisen. Tiefer in das Wesen der Sache dringt aber die folgende Überlegung. Durch Ausrechnung des Productes $\varphi(m, x) \cdot \varphi(n, x)$ in (7*) erkennt man, dafs die Gleichung (9) besteht, falls μ, ν beide natürliche Zahlen m, n sind. Also stimmen die ganzen Functionen von $\mu\ \nu$ $\binom{\mu + \nu}{r}$ $\sum_s \mu_s \nu_{r-s}$

überein für alle Werthsysteme $\mu = m \quad \nu = n$, somit die ganzen Functionen von $1 : \mu$, $1 : \nu$

$$\frac{1}{\mu^r \nu^r}\binom{\mu+\nu}{r} \qquad \frac{1}{\mu^r \nu^r}\sum_0^r{}_s \mu_s \nu_{r-s}$$

für jedes aus den Reihen

$$\frac{1}{\mu} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{m} \cdots, \qquad \frac{1}{\nu} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \cdots$$

entnommene Werthsystem $1 : \mu$, $1 : \nu$. Da die Glieder in jeder der Reihen zur Null convergiren, so sind nach X. 28 die beiden letzteren Ausdrücke identisch, daher auch die beiden ersteren.

Die Gleichung (9), welche das Additionstheorem der Binomialcoefficienten genannt wird, enthält als specielle Fälle die Relationen

$$\nu = -1 \qquad \sum_0^r{}_s (-1)^s \mu_s = (-1)^r \binom{\mu - 1}{r},$$

$$\nu = +1 \qquad \binom{\mu}{r} + \binom{\mu}{r-1} = \binom{\mu+1}{r}.$$

Letztere kann wie in VIII. 3 unmittelbar verificirt werden.

Nachdem gezeigt ist, dafs die Function $\varphi(\mu, x)$ der Relation (8), d. i. (1) Genüge leistet, haben wir zu beweisen, dafs sie bei constantem dem absoluten Betrage nach unter 1 liegendem x eine stetige Function von μ ist und zwar für jeden endlichen Werth von μ. Da nach (8)

$$\varphi(\mu + \nu, x) - \varphi(\mu, x) = \varphi(\mu, x)\{\varphi(\nu, x) - 1\},$$

so ist das der Fall, wenn

$$\lim_{\nu = 0} \varphi(\nu, x) = 1 \qquad (|x| < 1)$$

ist. Und diese Relation besteht sicher, falls die Reihe (6) gleichmäfsig für alle Werthe von $\mu = \nu$ im Intervalle $(-M, +M)$ convergirt. Indem $-|\nu| = N$ gesetzt, —

$$|\dot{\nu}_n| \leq \frac{N(N+1)\cdots(N+n-1)}{n!} = (-1)^n \binom{-N}{n};$$

so folgt, dafs für

$$-M \leq \nu < +M, \quad |\nu_n| \leq (-1)^n \binom{-M}{n}.$$

Man findet somit

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} \binom{\nu}{r} x^r \right| < \sum_{n+1}^{\infty} (-1)^n \binom{-M}{n} |x|^n,$$

wodurch die oben erwähnte gleichmäfsige Convergenz aufser Zweifel gesetzt ist. — Die Stetigkeit von $\varphi(\mu, x)$ nach μ folgt auch daraus, dafs $\varphi(\mu, x)$ in eine Potenzreihe nach μ verwandelt werden kann. (Vgl. Nr. 5.)

Nach dem Vorstehenden können wir schliefsen, dafs, wenn

$$-1 < x < +1, \quad \varphi(\mu, x) = \varphi(1, x)^\mu = (1+x)^\mu. \quad (10)$$

Was die Fälle $x = -1$ und $+1$ betrifft, so gilt auch für sie diese Gleichung, wenn überhaupt die Reihe (6) convergirt. Denn es ist dann sowohl $(1+x)^\mu$ bei $x = \pm 1$ eine stetige Function von x, als auch nach X. 23 die Summe der Reihe $\varphi(\mu, x)$.

Wir sind somit zu dem Satze gelangt: „In allen Fällen, wo die Binomialreihe convergirt, ist ihre Summe $(1+x)^\mu$.“ [3]) — Wenn sie nicht absolut convergirt (d. i. für $x = +1$, $0 < \mu < -1$), sind die Glieder in der durch (6) angegebenen Ordnung zu summiren.

3. Näherungswerthe für die absoluten Wurzeln. Ist $1 \geq x > 0$ und $0 < \mu < 1$, so wechseln die Glieder der Binomialreihe vom zweiten angefangen das Zeichen. Dabei ist bei $\lim n = +\infty$ $\lim \mu_n = 0$. Man hat somit nach X. 8

$$1 + \mu x + \mu_2 x^2 < (1+x)^\mu < 1 + \mu x,$$

oder

$$0 < 1 + \mu x - (1+x)^\mu < \frac{\mu(1-\mu)}{2} x^2. \quad (11)$$

Der zweite Theil der Relation (11) setzt nach dieser Ableitung $x \leq 1$ voraus; er gilt jedoch, sowie der erste schon in VIII. 8 bewiesene, wenn x irgend einen positiven Werth erhält. Setzt man nämlich

$$\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x}{1+x},$$

so ist der Subtrahend kleiner als 1. $\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{\mu}$ liefert nun eine Binomialreihe, in der alle Glieder vom zweiten an negativ sind. Man findet also

$$\frac{1}{(1+x)^{\mu}} < 1 - \mu\frac{x}{1+x} + \mu_2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2,$$

und

$$(1+x)^{\mu} < 1 : \left\{1 - \mu\frac{x}{1+x} + \mu_2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right\}.$$

Subtrahirt man von der rechten Seite den Ausdruck

$$1 + \mu x + \mu_2 x^2,$$

so ergiebt sich ein positiver Unterschied; somit ist auch jetzt

$$(1+x)^{\mu} > 1 + \mu x + \mu_2 x^2.$$

Mittelst der Relation (11) kann man einen, etwa auf die gewöhnliche Art gefundenen Näherungswerth α für die $\sqrt[m]{a}$ verbessern. Kennt man von $\sqrt[m]{a}$ $n+1$ Stellen (von der ersten geltenden an gerechnet) genau, welche den Näherungswerth α bilden, so findet man weitere Stellen der Wurzel, indem man $a - \alpha^m$ durch $m\alpha^{m-1}$ dividirt. Man kann, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dafs die Ziffern α bis zu den Einern einschliefslich reichen, so dafs

$$\alpha < \sqrt[m]{a} < \alpha + 1.$$

Wäre in der That die letzte Ordnung in α 10^p, so ersetzt man a, α bezüglich durch $a \cdot 10^{-mp}$, $\alpha \cdot 10^{-p}$. — Es sei

$$a = \alpha^m + b, \quad \sqrt[m]{a} = \alpha\sqrt[m]{1+\frac{b}{\alpha^m}} = \alpha + z, \quad 0 < z < 1.$$

Setzt man in (11)

$$\mu = 1 : m, \qquad x = b : \alpha^m,$$

so folgt

$$0 < 1 + \frac{b}{m\alpha^{m-1}} - \sqrt[m]{1+\frac{b}{\alpha^m}} < \frac{m-1}{2}\left(\frac{b}{m\alpha^m}\right)^2,$$

d. i.

$$0 < \alpha + \frac{b}{m\alpha^{m-1}} - \sqrt[m]{a} < \frac{m-1}{2\alpha}\left(\frac{b}{m\alpha^{m-1}}\right)^2.$$

Wenn nun

$$\alpha = c_0 \cdot 10^n + c_1 \cdot 10^{n-1} + \cdots + c_n \quad (c_0 \geq 1,\ n \geq 1),$$

und

$$b : m\alpha^{m-1} < 1,$$

so ergiebt sich

$$0 < \alpha + \frac{b}{m\alpha^{m-1}} - \sqrt[m]{a} < \frac{m-1}{2c_0} \cdot \frac{1}{10^n}. \qquad (12)$$

Daraus kann man Folgendes ableiten.

1) Ist $m = 2$ und $c_0 < 5$, so kann man das letzte Glied in (12) durch 10^{-n} ersetzen. Demgemäfs berechne man auch $b : m\alpha^{m-1}$ auf n Stellen, so dafs

$$\frac{b}{2\alpha} = \beta + r, \qquad 0 \leq r < \frac{1}{10^n}.$$

Sodann findet man aus (12)

$$(\alpha + \beta) - \frac{1}{10^n} < \sqrt{a} < (\alpha + \beta) + \frac{1}{10^n}.$$

Ist aber $c_0 \geq 5$, so kann man hier 10^n durch 10^{n+1} ersetzen, wenn man auch β auf $n + 1$ Stellen berechnet hat. Das liefert den folgenden Satz: „Wenn man von $\sqrt{a}$ $n + 1$ Stellen genau kennt, und man berechnet den eine Einheit der letzten Stelle in α nicht erreichenden Quotienten $(a - \alpha^2) : 2\alpha$ auf n oder $n + 1$ Stellen β, je nachdem die höchste Stelle in α kleiner als 5 ist oder nicht; so hat man n bez. $n + 1$ weitere Stellen von $\sqrt{a}$ gefunden. Doch kann der Decimalbruch $\alpha + \beta$ um eine Einheit der letzten Stelle zu grofs sein.“ [4])

2) Ist $m \geq 3$, so rechne man $b : m\alpha^{m-1}$ auf n Stellen, so dafs

$$\frac{b}{m\alpha^{m-1}} = \beta + r, \qquad 0 \leq r < \frac{1}{10^n}.$$

Dann ergiebt sich aus (12)

$$(\alpha + \beta) - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} < \sqrt[m]{a} < (\alpha + \beta) + \frac{1}{10^n}.$$

„Kennt man von $\sqrt[3]{a}$ $n + 1$ Stellen α und man berechnet den eine Einheit der letzten Stelle von α nicht erreichenden Quotienten $(a - \alpha^3) : 3a^2$ auf n Stellen β; so hat man n weitere Stellen von $\sqrt[3]{a}$ gefunden. Doch kann der

Decimalbruch $\alpha + \beta$ um eine Einheit der letzten Stelle zu grofs sein.“ U. s. f.

Indem $z < b : m\alpha^{m-1}$, so kann $b : m\alpha^{m-1} \geqq 1$ sein. In einem solchen Falle kann man sich die Ausführung obiger Division ersparen. Man erhält aus

$$b = (\alpha + z)^m - \alpha^m = m\alpha^{m-1} z + m_2 \alpha^{m-2} z^2 + \cdots + z^m$$

$$z = \frac{b}{m\alpha^{m-1}} - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{z^2}{\alpha} - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{z^3}{\alpha^2}$$

$$- \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{z^4}{\alpha^3} - \cdots,$$

somit

$$z > 1 - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{1}{\alpha^2}$$

$$- \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{1}{\alpha^3} - \cdots$$

1) Für $m = 2$ ergiebt sich hieraus

$$\alpha + 1 - \frac{1}{2c_0} \cdot \frac{1}{10^n} < \sqrt{a} < \alpha + 1.$$

D. h. „Ist $(a - \alpha^2) : 2\alpha$ gleich oder gröfser als eine Einheit der letzten Stelle in α, so folgen in $\sqrt{a}$ auf α mindestens n oder $n + 1$ Neuner, je nachdem die höchste Stelle in α kleiner als 5 ist oder nicht.“

2) Für $m = 3$ hat man

$$\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha \cdot 10^n} < \sqrt[3]{a} < \alpha + 1,$$

woraus man den Satz folgert: „Ist $(a - \alpha^3) : 3\alpha^2$ gleich oder gröfser als eine Einheit der letzten Stelle in α, so folgen in $\sqrt[3]{a}$ auf α mindestens n Neuner.“

3) Wenn $m > 3$, und α so grofs ist, dafs

$$\frac{m-3}{4} \cdot \frac{1}{\alpha} < 1,$$

so hat man, da die Brüche $(m - k + 1) : k$ mit wachsendem k abnehmen,

$$z > 1 - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \left\{ 1 + \frac{m-3}{4\alpha} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{m-3}{4\alpha} \right)^2 + \cdots \right\},$$

d. i.

$$z > 1 - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{1}{\alpha^2} : \left(1 - \frac{m-3}{4\alpha} \right).$$

Daraus folgt

$$\alpha + 1 - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{(m-1)(m-2)}{6\alpha \cdot 10^n} : \left(1 - \frac{m-3}{4 \cdot 10^n}\right) < \sqrt[m]{a} < \alpha + 1,$$

woraus man ähnliche Schlüsse wie oben ziehen kann. Die Summe der beiden letzten Glieder links liegt unter $\frac{m-1}{2} 10^{-n}$, wenn

$$\alpha \geqq 10^n + \frac{m-2}{3} : \left(1 - \frac{m-3}{4} \cdot \frac{1}{10^n}\right).$$

4. Wenn man zur Verbesserung eines Näherungswerthes α der $\sqrt[m]{a}$ auch noch das Glied mit der zweiten Potenz in der Binomialreihe (6) heranziehen will, so bedient man sich mit Vortheil der Lambert'schen Formeln.[5])

Multiplicirt man die Binomialreihe mit einer linearen Function $1 + \gamma x$, so findet man, sicher so lange $|x| < 1$,

$$(1+x)^\mu (1+\gamma x) = 1 + (\mu + \gamma)x + (\mu_2 + \mu\gamma)x^2 + \cdots + (\mu_n + \mu_{n-1}\gamma)x^n + \cdots \quad (13)$$

Hier bestimmt man γ so, dafs das Glied mit x^2 ausfällt, d. i. man setzt

$$\mu_2 + \mu\gamma = 0, \qquad \gamma = \frac{1-\mu}{2}.$$

Nunmehr erhält man

$$\lambda_3 = \mu_3 + \mu_2\gamma = \frac{\mu(1-\mu^2)}{12},$$

$$\lambda_n = \mu_n + \mu_{n-1}\gamma = (-1)^{n-1}\mu(1-\mu^2)(2-\mu)\ldots(n-2-\mu)(n-2) : 2 \cdot n! \quad (n > 3).$$

Unter der Voraussetzung, dafs $0 < \mu < 1$ und $x > 0$ sei, wechseln die Glieder der Reihe (13) von $n = 3$ an ihr Zeichen. Da

$$\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right| = \frac{n-2-\mu}{n} \cdot \frac{n-2}{n-3} = \left(1 - \frac{2+\mu}{n}\right) \frac{1 - \frac{2}{n}}{1 - \frac{3}{n}} = 1 - \frac{\mu+1}{n} + \cdots,$$

so ergiebt sich nach X. 19, dafs $|\lambda_n|$ bei wachsendem n beständig abnimmt (und zwar von $n = 3$ an) und bei $\lim n = +\infty$

den Grenzwerth 0 hat. Es convergirt somit die Reihe (13) auch für $x = +1$ und ihre Summe ist $(3-\mu)2^{\mu-1}$.

Nach X. 8 findet man nun

$$0 < (1+x)^{\mu}\left(1+\frac{1-\mu}{2}x\right) - \left\{1+\frac{1+\mu}{2}x\right\} < \frac{\mu(1-\mu^2)}{12}x^3, \tag{14}$$

oder

$$0 < (1+x)^{\mu} - \left[1+\frac{\mu x}{1+\frac{1-\mu}{2}x}\right] < \frac{\mu(1-\mu^2)}{12}x^3 : \left(1+\frac{1-\mu}{2}x\right).$$

Hier setze man, wie oben $\mu = 1:m$ $x = b:a^m$, welche Zahl wir jetzt ≤ 1 annehmen; dadurch ergiebt sich durch Multiplication mit α

$$0 < \sqrt[m]{a} - \left[\alpha + \frac{b}{m\alpha^{m-1} + \frac{m-1}{2}\frac{b}{\alpha}}\right] < \frac{m^2-1}{12\alpha^2}\cdot\left(\frac{b}{m\alpha^{m-1}}\right)^3.$$

$$L = b : \left\{m\alpha^{m-1} + \frac{m-1}{2}\frac{b}{\alpha}\right\}$$

ist die Lambert'sche Ergänzung des Näherungswerthes α. Der Fehler liegt, wenn $b : m\alpha^{m-1} < 1$ ist, unter

$$\frac{m^2-1}{12 \cdot c_0^2 \cdot 10^{2n}}.$$

Daraus ergeben sich ähnliche Sätze wie in der vorigen Nummer. Ist z. B.

$$1 \geq \frac{m^2-1}{12 \cdot c_0^2} > \frac{1}{10},$$

so berechne man L auf $2n$ Stellen, so dafs

$$L = \lambda + r, \qquad 0 \leq r < 10^{-2n};$$

worauf man finden wird:

$$\alpha + \lambda < \sqrt[m]{a} < \alpha + \lambda + \frac{2}{10^{2n}}.$$

D. h. man hat $2n$ weitere Stellen von $\sqrt[m]{a}$ erhalten; doch kann die letzte Stelle um eine Einheit zu klein sein.

5. Reihenentwickelung für den Logarithmus. Nach (5) und (6) bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(1+x)^{\mu} &= 1+\mu l(1+x)+\frac{\mu^2[l(1+x)]^2}{2!}+\cdots\\ &= 1+\mu x+\mu_2 x^2+\cdots\end{aligned}\right\} \quad |x|<1.$$

Ist es gestattet, die untere Reihe nach Potenzen von μ zu ordnen, so erhalten wir zufolge des Satzes in X. 24, indem wir die Coefficienten der gleichen Potenzen von μ in beiden Zeilen einander gleichsetzen, Potenzreihen für $l(1+x)$, $[l(1+x)]^2$ u. s. f.[6]) Da μ_n nach Potenzen von μ entwickelt den Ausdruck

$$\mu_n = -\frac{\mu}{n}+a_{n,2}\mu^2+\cdots+\frac{\mu^n}{n!} \tag{15}$$

liefert, so ergiebt sich auf diese Weise die Entwickelung

$$l(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \tag{16}$$

Dafs sich die Binomialreihe, wenn x numerisch kleiner als 1 ist, in eine Potenzreihe von μ verwandeln läfst, folgt aus dem 3. Satze in X. 11. Nach demselben hat man zunächst die absoluten Beträge der Glieder in (15) zu summiren, wodurch man — $|\mu| = M$ gesetzt —

$$\frac{M(M+1)\cdots(M+n-1)}{n!} = (-1)^n\binom{-M}{n}$$

erhält. Denn dieser Ausdruck liefert, nach Potenzen von M entwickelt, Coefficienten von demselben numerischen Werthe wie die in (15). Weiter ist zu bemerken, dafs die aus den eben genannten mit X^n multiplicirten Ausdrücken gebildete Reihe

$$1+MX+\binom{-M}{2}(-X)^2+\cdots+\binom{-M}{n}(-X)^n+\cdots \qquad X=|x|$$

in der That convergirt, so lange $X<1$.

Die Gleichung (16) besteht somit für alle Werthe von x, welche dem absoluten Betrage nach unter 1 liegen. Sie gilt auch noch für $x=1$, da die rechte Seite convergirt und sowohl die Function $l(1+x)$ als auch die Summe

der Potenzreihe für $x = 1$ wenigstens nach rückwärts stetig sich ändern (X. 23). Wir haben somit für die nicht absolut convergirende, schon in X. 8 erwähnte Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ den Grenzwerth $l2$. In allen anderen Fällen ist die logarithmische Reihe divergent.

Man erhält die Reihe für $y = l(1 + x)$ auch aus der Gleichung $e^y = 1 + x$, d. i.

$$e^y - 1 = y + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \cdots = x,$$

durch Umkehrung der links stehenden Reihe. Nach X. 30 genügt ihr eine und nur eine convergente Potenzreihe

$$y = g(x) = x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

Die Bestimmung der Coefficienten kann vermittelst der Gleichung (10) a. a. O. erfolgen. Wegen

$$e^{y+h} - e^h = e^y(e^h - 1) = e^y\left(h + \frac{1}{2}h^2 + \cdots\right)$$

folgt

$$D_y e^y = e^y,$$

somit

$$1 = e^y g'(x),$$

oder

$$\frac{1}{1+x} = 1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots,$$

woraus sofort sich ergiebt $nc_n = (-1)^{n-1}$.

Vertauscht man in (16) x mit $-x$, so erhält man

$$-l(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \qquad -1 < x < +1;$$

somit durch Addition dieser und der Formel (16)

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right\} \qquad -1 < x < +1. \quad (17)$$

Nach X. 32 hat man als Fehlergrenze — wenn $|x| = X$ —

$$r_k = \frac{X^{2k+1}}{2k+1} + \frac{X^{2k+3}}{2k+3} + \cdots < \frac{X^{2k+1}}{2k+1} : (1 - X^2). \quad (18)$$

Wenn irgend eine positive Zahl N vorgelegt wird, so liefert die Gleichung

$$\frac{1+x}{1-x} = N \qquad x = \frac{N-1}{N+1},$$

also für x einen Werth, der seinem absoluten Betrage nach unter der Einheit liegt. Somit kann lN durch die Reihe (17) erhalten werden, jedoch zur numerischen Berechnung ist sie in der Regel nicht geeignet. Auf diese Weise ist berechnet worden

$$l2 = 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \cdots\right\}.$$

Setzt man

$$N = (a + h) : a,$$

unter a eine positive, unter h eine Zahl $> -a$ verstanden; so wird

$$x = h : (2a + h)$$

und man findet

$$l(a + h) - la = 2\left\{\frac{h}{2a + h} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2a + h}\right)^3 + \cdots\right\}. \quad (19)$$

Der Unterschied der Logarithmen zweier Zahlen läfst sich in eine nach den ungeraden Potenzen des Quotienten: Unterschied der Zahlen dividirt durch ihre Summe, fortschreitende Reihe entwickeln. Für $a = 4$, $h = 1$ folgt aus (19)

$$l5 = 2l2 + 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{9^3} + \cdots\right\}.$$

Man hat nun auch

$$l10 = l2 + l5$$

und damit den Modulus M des Briggischen Systemes

$$M = 1 : l10 = 0,\ 43429\ 44819\ \ldots$$

6. Nach Ermittelung des Modulus lassen sich die Reihen (17), (19) auch zur Berechnung der gemeinen Logarithmen verwenden. So findet man aus (19) durch Multiplication mit M (VIII. 9)

$$\log(a + h) = \log a + 2M\left\{\frac{h}{2a + h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2a + h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2a + h}\right)^5 + \cdots\right\} \quad (20)$$

Das erste Glied dieser Reihe reicht, wie Koralek bemerkt hat,[7]) hin, um die Logarithmen aller Zahlen N von 10^6 bis 10^7 auf sieben Decimalen zu berechnen, wenn die Logarithmen von 2, 3, 7, 11, 13 bekannt sind. Setzt man $h = au$, so

wird nach (18) und X. 31 $\log(a+h)$ bis auf eine halbe Einheit der 7ten Decimale bestimmt sein, wenn

$$\pm\frac{2M}{3}\left(\frac{u}{2+u}\right)^3 : \left\{1-\left(\frac{u}{2+u}\right)^2\right\} < \frac{1}{2\,.\,10^{7+l}}(10^l-2).$$

Hier setzen wir $l=1$ und beachten, dafs u seinem absoluten Betrage nach $\frac{1}{126}$ nicht zu übersteigen braucht. Unter dieser Voraussetzung ist in der That

$$\pm\frac{2Mu^3}{3\,.\,4\,(2+u)\,(1+u)} < \frac{4}{10^8}.$$

Die linke Seite ist nämlich, da $2M<1$, numerisch kleiner als

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{250^3} = \frac{2{,}1\dot{3}}{10^8}.$$

Die Einschränkung $|u|<1:126$ erzielt Koralek auf folgende Art. Zunächst dividiren wir die gegebene Zahl N durch 10 000 und multipliciren den Quotienten ν mit einer solchen Zahl p, deren Logarithmus aus den gegebenen sich unmittelbar ergiebt, so dafs

$$800 < p\nu < 1000.$$

Derartige Factoren sind:

$p=9$	für die Zahl	ν	zwischen	100	und	111		
8	„	„	„	„	„	111	„	125	
7	„	„	„	„	„	125	„	142	
6	„	„	„	„	„	142	„	166	
5	„	„	„	„	„	166	„	200	($\log 5 = 1-\log 2$)
4	„	„	„	„	„	200	„	250	
$\frac{7}{2}$	„	„	„	„	„	250	„	285	
3	„	„	„	„	„	285	„	333	
$\frac{5}{2}$	„	„	„	„	„	333	„	400	
2	„	„	„	„	„	400	„	500	
$\frac{5}{3}$	„	„	„	„	„	500	„	600	
$\frac{3}{2}$	„	„	„	„	„	600	„	666	
$\frac{7}{4}$	„	„	„	„	„	666	„	800.	

Somit ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Berechnung der Logarithmen der ganzen Zahlen zwischen 800 und 1000. 25 von diesen Zahlen enthalten nur die Primfactoren 2, 3, 5, 7, 11, 13; ihre Logarithmen sind somit bekannt. Diese Zahlen sind 800, 810, 819, 825, 832, 840, 845, 858, 864, 875, 880, 891, 896, 900, 910, 924, 936, 945, 960, 968, 972, 975, 980, 990, 1000. Bilden wir den Unterschied je zweier benachbarten und dividiren ihn durch die doppelte kleinere Zahl, so erhalten wir höchstens

$$\frac{960-945}{2\,.\,945} = \frac{1}{126}.$$

Das ist das Maximum von $|u|$.

Die Logarithmen der Zahlen 2, 3, 7, 11, 13 müssen mit Hilfe der Reihe (20) auf mehr als 7 Stellen berechnet werden. Man hat

$$10\log 2 = \log 1024 = \log 1000 + 2M\left\{\frac{24}{2024} + \frac{1}{3}\left(\frac{24}{2024}\right)^3 + \cdots\right\},$$

$$4\log 3 = \log 81 = \log 80 + 2M\left\{\frac{1}{161} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{161}\right)^3 + \cdots\right\},$$

$$4\log 7 = \log 2401 = \log 2400 + 2M\left\{\frac{1}{4801} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4801}\right)^3 + \cdots\right\},$$

$$\log 13 + \log 11 + \log 7 = \log 1001 = \log 1000 + 2M\left\{\left(\frac{1}{2001}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2001}\right)^3 + \cdots\right\}.$$

7. Ein sehr bequemes Verfahren, natürliche oder gemeine Logarithmen auf jede beliebige Anzahl von Decimalen zu berechnen, beruht auf dem folgenden Satze, wonach jede positive Zahl in ein unendliches Product verwandelt werden kann.

Satz. „Es sei N eine beliebige positive Zahl, a ihre erste geltende Ziffer und zwar von der Ordnung 10^m, so dafs

$$a \cdot 10^m \leqq N < (a+1)\, 10^m.$$

Dann lassen sich n einzifferige Zahlen

$$c_1, c_2 \ldots c_n \qquad (0 \leqq c_r \leqq 9)$$

finden (und zwar kann es auch mehr als ein solches System c_r geben), so dafs das Product

$$P_n = \frac{N}{(a+1)\, 10^m} \prod_1^n \left(1 + \frac{c_r}{10^r}\right) \tag{a}$$

zwischen den Grenzen $1 - \frac{1}{10^n}$ und 1 liegt:

$$0 < 1 - P_n < \frac{1}{10^n}.“ \tag{b}$$

Da $a \geqq 1$, so ist der echte Bruch $\nu = N : (a+1)\, 10^m$ gröfser als $\frac{1}{2}$, wobei wir den Fall $N = 10^m$ nicht berücksichtigen. Ist $\nu > 0{,}9$, so setze man $c_1 = 0$; ist $\nu \leqq 0{,}9$, so können

wir eine Ziffer c_1 bestimmen, so dafs

$$0{,}9 < \nu\left(1 + \frac{c_1}{10}\right) < 1;$$

denn es liegt

$$1 + \frac{c_1}{10}$$

zwischen den Grenzen 1 und 2. c_1 kann höchstens zwei Werthe haben; denn es ist bereits

$$\nu\left(1 + \frac{c_1 + 2}{10}\right) > 0{,}9 + 2 \,.\, 0{,}05 = 1.$$

Zwei Werthe von c_1 kommen in der That manchmal vor, wie wir sogleich sehen werden. — Wenn $P_1 > 0{,}99$, so nimmt man $c_2 = 0$; ist aber $P_1 \leq 0{,}99$, so liefert die Relation

$$P_1 = \nu\left(1 + \frac{c_1}{10}\right), \qquad 0{,}99 < P_1\left(1 + \frac{c_2}{10^2}\right) < 1,$$

$$1 < 1 + \frac{c_2}{10^2} < \frac{10}{9} = 1{,}\dot{1},$$

so dafs die Werthe $c_2 = 10, 11$ nicht ausgeschlossen erscheinen. Kommt man auf den Werth $c_2 = 10$, so ist auch

$$\nu\left(1 + \frac{c_1 + 1}{10}\right) < \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{c_1}{10}\right) 1{,}1}$$

$$= \frac{10}{11}\left\{1 + \frac{1}{10 + c_1}\right\} \leq 1;$$

es kann somit c_1 durch $c_1 + 1$ ersetzt werden, was auch im Falle $c_2 = 11$ möglich ist. Gebraucht man nun anstatt P_1

$$P_1' = \nu\left(1 + \frac{c_1 + 1}{10}\right) = P_1 + \frac{\nu}{10},$$

so ist

$$1 + \frac{c_2'}{10^2} < \frac{1}{P_1'} < \frac{1}{0{,}9 + 0{,}05} < 1{,}1;$$

somit mufs die ganze Zahl $c_2' < 9$ sein. U. s. f. Angenommen, man hätte $n - 1$ Ziffern $c_1\, c_2 \ldots c_{n-1}$ gefunden, so dafs die Relationen bestehen

$$(n \geq 3), \quad 1 - \frac{1}{10^{n-r}} < P_{n-r} < 1 \qquad (r = 1, 2 \ldots n - 1),$$

so kann man stets einen Multiplicator

$$1 + \frac{c_n}{10_n},$$

wo c_n eine einzifferige ganze Zahl bedeutet, finden, wodurch

$$1 - \frac{1}{10^n} < P_{n-1}\left(1 + \frac{c_n}{10^n}\right) < 1 \qquad (c)$$

wird. Ist P_{n-1} schon

$$> 1 - \frac{1}{10^n},$$

so setzt man $c_n = 0$. Ist aber

$$P_{n-1} \leq 1 - \frac{1}{10^n},$$

so erhält man freilich für

$$1 + \frac{c_n}{10^n}$$

zunächst die Grenzen 1 und

$$1 : \left(1 - \frac{1}{10^{n-1}}\right) = 1 + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^{2n-2}} + \cdots;$$

wodurch der Werth $c_n = 10$ nicht ausgeschlossen wird. Sollte in der That $c_n = 10$ sich ergeben, so läfst sich an Stelle von P_{n-1}

$$P'_{n-1} = P_{n-2}\left(1 + \frac{c_{n-1} + 1}{10^{n-1}}\right) = P_{n-1} + \frac{P_{n-2}}{10^{n-1}}$$

setzen, worauf in der Relation (c) $c_n' \leq 9$ genommen werden kann. Man hat nämlich einerseits

$$P'_{n-1} < \frac{1}{1 + \frac{1}{10^{n-1}}}\left[1 + \frac{1}{10^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{c_{n-1}}{10^{n-1}}}\right] \leq 1;$$

andererseits

$$P'_{n-1} > 1 - \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{10^{n-2}}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{10^{2n-3}} > \frac{1}{1 + \frac{1}{10^{n-1}}},$$

somit

$$1 + \frac{c_n'}{10^n} < \frac{1}{P'_{n-1}} < 1 + \frac{1}{10^{n-1}}.$$

Die Berechnung der Zahlen $c_1\ c_2 \ldots$ wird durch die folgenden Bemerkungen wesentlich erleichtert. Setzt man

$\nu = 1 - \varrho$ und

$$\varrho = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \quad (0 < a_1 < 4),$$

so ist

$$1 - P_1 = \frac{a_1 - c_1}{10} + \frac{a_2 + a_1 c_1}{10^2} + \cdots$$

Daraus folgt, dafs $c_1 \geq a_1$ sein mufs. Setzt man ferner

$$z_n = 1 - P_n = \frac{a_{n+1}^{(n)}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}^{(n)}}{10^{n+2}} + \cdots \quad (n \geq 1),$$

so kann man leicht zeigen, dafs

$$a_n^{(n-1)} + 2 > c_n \geq a_n^{(n-1)} \qquad (n \geq 2)$$

sein mufs. Es ist nämlich

$$z_n = \frac{a_n^{(n-1)} - c_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}^{(n-1)}}{10^{n+1}} + \cdots$$

und nach (c)

$$1 + \frac{c_n}{10^n} < \frac{1}{1 - z_{n-1}}$$

$$\frac{1}{1 - z_{n-1}} < 1 + \frac{a_n^{(n-1)} + 2}{10^n}.$$

Letztere Ungleichung erhellt unmittelbar, wenn man

$$z_{n-1} = \frac{a_n^{(n-1)} + \varrho^{(n-1)}}{10^n} \qquad 0 < \varrho^{(n-1)} < 1$$

setzt und die linke Seite derselben von der rechten subtrahirt. Man hat somit bezüglich c_n die Wahl zwischen den Werthen $a_n^{(n-1)}$ und $a_n^{(n-1)} + 1$; es wird jedoch, wie aus der Betrachtung der Differenz

$$1 + \frac{a_n^{(n-1)}}{10^n} - \frac{1}{1 - z_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{(1 - z_{n-1})\, 10^n} \left[1 - \frac{a_n^{(n-1)2}}{10^n} - \varrho^{(n-1)} \left(1 + \frac{a_n^{(n-1)}}{10^n} \right) \right]$$

unmittelbar folgt, die letztere Annahme mit wachsendem n immer seltener. Sie setzt nämlich voraus

$$\varrho^{(n-1)} > \left(1 - \frac{a_n^{(n-1)^2}}{10^n}\right) : \left(1 + \frac{a_n^{(n-1)}}{10^n}\right) \geqq \left(1 - \frac{81}{10^n}\right) : \left(1 + \frac{9}{10^n}\right).$$

Bei der Berechnung der $z_1 z_2 \ldots z_n$ benutzt man nach R. Hoppe[8]) mit Vortheil die Relationen

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 1 - \nu \left\{1 + \frac{c_1}{10}\right\} = \varrho + \frac{\varrho c_1}{10} - \frac{c_1}{10} \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n &= 1 - P_{n-1}\left(\frac{c_n}{10^n}\right) = 1 - (1 - z_{n-1})\left(1 + \frac{c_n}{10^n}\right) \\ &= z_{n-1} + z_{n-1}\frac{c_n}{10^n} - \frac{c_n}{10^n}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

Die Anordnung der Rechnung wird sich am besten aus einem Beispiele ergeben. „Es sei $N = 131$ und es seien die Zahlen $c_1, c_2 \ldots c_{10}$ zu ermitteln." Dabei bedienen wir uns der Abkürzung $1 . 0^{n-1} c_n$ statt $1 + \frac{c_n}{10^n}$.

Man findet

$$\nu = \frac{131}{200} = 0{,}655 \qquad \varrho = 1 - \nu = 0{,}345.$$

Für c_1 kann 4 genommen werden. Bei Berechnung der $z_1, z_2 \ldots$ werden, damit c_{10} noch sicher angegeben werden kann, 12 Decimalen angesetzt. Unter Anwendung der vorstehenden Sätze, insbesondere der Relation (d) gestaltet sich die Rechnung folgendermafsen:

ϱ	0,345				1,4
$0{,}4\,\varrho$	1380				
z_1	83				1,08
$0{,}08\,z_1$	664				
z_2	964				$1{,}0^2 9$
$0{,}0^2 9\,z_2$	8	676			
z_3	72	676			$1{,}0^3 7$
$0{,}0^3 7\,z_3$		5087	32		
z_4	2	72687	32		$1{,}0^4 2$
$0{,}0^4 2\,z_4$		5	45		
z_5		72692	77		$1{,}0^5 7$
$0{,}0^5 7\,z_5$			51		
z_6		2693	28		$1{,}0^6 2$
z_7		693	28		$1{,}0^7 6$

(e)

Dabei sind die anfänglichen Nullen in $z_1 = 0{,}083$ u. s. w. weggelassen. Man setzt $c_2 = 8$ d. i. der Anzahl der Hundertel in z_1, was sich bewährt, da z_2 in der That positiv und kleiner als 0,01 ausfällt. Für c_3 nimmt man die Anzahl der Tausendtel in z_2 u. s. f. Für $n > 7$ verlieren die Producte $z_{n-1}\frac{c_n}{10^n}$ jeden Einfluſs, von da an ist einfach

$$c_8 = 6, \quad c_9 = 9, \quad c_{10} = 3, \quad z_{10} = 0{,}0^{10}28$$

zu setzen. Demnach findet man

$$\tfrac{131}{200} \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}0^{2}9 \cdot 1{,}0^{3}7 \cdot 1{,}0^{4}2 \cdot 1{,}0^{5}7 \cdot 1{,}0^{6}2 \cdot 1{,}0^{7}6 \cdot 1{,}0^{8}9 \cdot 1{,}0^{9}3 = 1 - z_{10},$$

wo

$$0 < z_{10} < \frac{1}{10^{10}}.$$

Man hätte auch $c_1 = 5$ setzen können, wonach sich ergeben würde

$$c_2 = 1 \quad c_3 = 7 \quad c_4 = 7 \quad c_5 = 2 \quad c_6 = 9 \quad c_7 = 2 \quad c_8 = 3$$
$$c_9 = 5 \quad c_{10} = 7 \quad z_{10} = 0{,}0^{10}75.$$

Nun ist noch zu untersuchen, ob alle c_n auch die richtigen Werthe erhalten haben, d. h. man hat den in Folge der vernachlässigten Stellen entstandenen Fehler von z_{10} zu schätzen. Es sei φ_n eine obere Grenze für den absoluten Betrag des Fehlers z_n. Dann ist, so lange die Producte $z_{n-1}\frac{c_n}{10^n}$ noch angeschrieben werden können, zufolge (d)

$$\varphi_n < \varphi_{n-1} + \left\{\varphi_{n-1} + \frac{1}{2}\,10^{-q+n-1}\right\}\frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{2}\,10^{-q}$$
$$= \varphi_{n-1} + \varphi_{n-1}\frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c_n}{10}\right)10^{-q},$$

worin q den Index der letzten noch berücksichtigten Decimale bedeutet. Denn bei der Multiplication mit $\frac{c_n}{10^n}$ kommt erst die Ordnung 10^{-q+n} vollständig in Betracht; man corrigirt nun die darauf folgende Ziffer, so daſs absolut genommen auſser φ_{n-1} höchstens $\frac{1}{2}\cdot 10^{-q+n-1}$ vernachlässigt wird, und schreibt von dem Product derselben mit c_n soviel an, daſs der Fehler weniger als $\frac{1}{2}\cdot 10^{-q}$ beträgt. Wird aber vom

Producte $\varepsilon_{n-1}\frac{c_n}{10^n}$ nichts mehr angeschrieben, so hat man

$$\varphi_n < \varphi_{n-1} + \varepsilon_{n-1}\frac{c_n}{10^n} < \varphi_{n-1} + \frac{c_n}{10^{2n-1}} \leq \varphi_{n-1} + \frac{9}{10^{2n-1}}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Regeln findet man für den Fehler von ε_{10} in (e), absolut genommen, die obere Grenze $\frac{1{,}67}{10^{12}}$. Somit ist in $\varepsilon_9 = 0{,}0^{9}328$ die Ziffer 3 völlig sicher.

Aus der Gleichung

$$\frac{N}{(a+1)\,10^m} \cdot \prod_1^n \left(1 + \frac{c_r}{10^r}\right) = 1 - \varepsilon_n \qquad 0 < \varepsilon_n < \frac{1}{10^n}$$

folgt für jeden Logarithmus von N

$$\log N = m \log 10 + \log (a+1) + \log (1 - \varepsilon_n) - \sum_1^n \log \left(1 + \frac{c_r}{10^r}\right), \tag{f}$$

worin

$$\log (1 - \varepsilon_n) = - M \left\{\varepsilon_n + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 + \cdots\right\}.$$

Läfst man $\log (1 - \varepsilon_n)$ hier weg, so begeht man einen Fehler zwischen den Grenzen $-\frac{M\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}$ und 0. Sind die übrigen Logarithmen auf je $n + l$ Stellen bekannt, so tritt hierzu noch ein Fehler zwischen

$$-\frac{n+2}{2} \cdot \frac{1}{10^{n+l}} \quad \text{und} \quad \frac{n+2}{2} \cdot \frac{1}{10^{n+l}}.$$

Hat man auch ε_n auf $n + l$ Stellen gerechnet, so ist es vortheilhaft $\log (1 - \varepsilon_n)$ in (f) durch $- M\varepsilon_n$ zu ersetzen, wodurch der davon herrührende Fehler von $\log N$ innerhalb die Grenzen

$$M\left(\pm \varphi_n - \frac{\varepsilon_n^2}{2(1-\varepsilon_n)}\right)$$

gebracht wird.

Die Berechnung von $\log N$ ist hiermit zurückgeführt auf die Logarithmen der Zahlen

$$2 - 10 \quad \text{und} \quad 1 + \frac{c_r}{10^r} \qquad (c_r = 1, 2 \ldots 9)$$

und zwar um einige Stellen weiter, als für $\log N$ verlangt sind. Die $\log\left(1+\frac{c_r}{10^r}\right)$ können nach den Reihen in Nr. 5 und 6 berechnet werden. Man findet die gemeinen Logarithmen solcher Zahlen auf 15 Stellen in den Tafeln von Gernerth, die natürlichen Logarithmen auf 33 Stellen bei Hoppe.

Vermittelst der ersteren ergiebt sich in unserem Beispiele aus (e)

$$\log 131 = 2{,}11727\ 12956\ 57$$

mit den Fehlergrenzen $\pm 6 \cdot 2 : 10^{12}$. Man darf somit setzen

$$\log 131 = 2{,}11727\ 12957.$$

8. Reihen für einige zusammengesetzte Functionen.

a) Wenn

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$$

eine endliche oder eine im Intervalle $-R < x < +R$ convergente unendliche Potenzreihe bedeutet, so läfst sich nach dem Satze in X. 25 die Function $e^{f(x)}$ für eben dieselben Werthe von x in eine Potenzreihe nach x verwandeln.

$$e^{f(x)} = e^{a_0}\left[1+\sum_0^\infty \frac{[f(x)-a_0]^n}{n!}\right] = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = g(x). \qquad (1)$$

Das folgt aus der beständigen Convergenz der e^f-Reihe.

Wir wollen nun zeigen, dafs die Coefficienten $b_1, b_2 \ldots$ recurrirend aus $b_0 = e^{a_0}$ sich bestimmen lassen. Es sei x ein Werth innerhalb des Intervalles $(-R, +R)$. Dann hat man

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots$$
$$g(x+h) = g(x) + hg'(x) + \ldots$$
$$e^{f(x)+hf'(x)+\cdots} = g(x) + hg'(x) + \ldots$$

Verwandelt man auch die linke Seite in eine Reihe nach

Potenzen von h, so folgt nach X. 24 — indem diese Gleichung für alle Werte $|h| < R - |x|$ besteht — die Identität der Coefficienten derselben Potenzen von h. Somit ist

$$g(x)f'(x) = g'(x)$$

d. i.

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \ldots)(a_1 + 2a_2 x^2 + \ldots) = b_1 + 2b_2 x + \ldots, \quad (2)$$

woraus nach dem soeben erwähnten Satze die gesuchten Recursionsformeln sich ergeben:

$$b_0 a_1 = b_1$$
$$2b_0 a_2 + b_1 a_1 = 2b_2$$
$$3b_0 a_3 + 2b_1 a_2 + b_2 a_1 = 3b_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$nb_0 a_n + (n-1)\, b_1 a_{n-1} + \ldots + b_{n-1} a_1 = nb_n.$$

Beispiel. Aus der Gleichung

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{l(1+x)}{x}} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \ldots}$$

folgt

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \ldots\right) \qquad -1 < x < +1.$$

Dabei wird der Function für $x = 0$, wofür sie nicht definirt ist, der Werth e beigelegt. Und zwar ist das Intervall $(-1, +1)$ der vollständige Convergenzbereich. Denn würde derselbe über dieses Intervall hinausragen, so müfste die Reihe rechts für $x = -1$ convergiren und es müsste

$$\lim_{x=-1+0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

endlich sein (X. 23). Der Grenzwerth ist aber $+\infty$, folglich convergirt die vorstehende Reihe für $x = -1$ nicht.

b) Ist $a_0 > 0$, so hat man

$$l f(x) = l a_0 + l \frac{f(x)}{a_0} = l a_0 + \frac{f(x) - a_0}{a_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{f(x) - a_0}{a_0}\right)^2 + \ldots,$$

somit läfst sich nach X. 25 eine positive Zahl K angeben so, dafs $l f(x)$ für alle Werthe von x: $|x| < K$ in eine Potenzreihe von x entwickelt werden kann. Das vollständige Convergenzintervall derselben erfährt man jedoch auf diesem Wege nicht. Setzt man nun

$$lf(x) = la_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = g(x), \qquad (3)$$

so ist

$$e^{g(x)} = f(x);$$

woraus man wegen der beständigen Convergenz der e^g-Reihe schliefst, dafs die Gleichung (3) genau soweit gilt, als die Reihe $g(x)$ convergirt. Es besteht ferner für alle Werthe von x, die innerhalb der Convergenzbereiche der beiden Potenzreihen $f(x)$, $g(x)$ liegen, die der Gleichung (2) entsprechende

$$f(x) \cdot g'(x) = f'(x),$$

woraus die Coefficienten $b_1, b_2 \ldots$ recurrirend bestimmt werden können:

$$na_0 b_n + (n-1)a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 = na_n \quad (n = 1, 2 \ldots).$$

Beispiel. $\log(x + \sqrt{1+x^2})$, die Wurzel positiv gedacht. Hier ist

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Setzt man die binomische Reihe für $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, so folgt $b_{2k} = 0$ und

$$(2k+1)\, b_{2k+1} = \binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2k}$$

$$(k = 0, 1, 2 \ldots),$$

$$-\frac{b_{2k+1}}{b_{2k-1}} = \frac{(2k-1)^2}{2k(2k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^2 : \left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

$$= 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k} + \ldots$$

Das Convergenzintervall der Reihe $g(x)$ ist somit $(-1, +1)$ und man hat für alle Werthe $-1 < x \leq +1$

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \ldots$$

c) Der allgemeine polynomische Satz.[9]) Es soll unter Voraussetzung, dafs $a_0 > 0$, $f(x)^\mu$ nach Potenzen von x entwickelt werden. Da

$$f(x)^\mu = e^{\mu lf(x)} = a_0^\mu \cdot \left\{1 + \frac{f(x) - a_0}{a_0}\right\}^\mu, \qquad (4)$$

so erhellt sofort, dafs die Entwickelung möglich ist für die Werthe $|x| < K$. Ist demnach

$$f(x)^\mu = a_0{}^\mu(1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = a_0{}^\mu g(x),$$

so hat man wie in a)

$$\{f(x) + hf'(x) + \ldots\}^\mu = a_0{}^\mu\{g(x) + hg'(x) + \ldots\},$$

also

$$g(x) \cdot \frac{\mu f'(x)}{f(x)} = g'(x).$$

Hierbei ist aber auch vorausgesetzt, dafs $f(x) > 0$ sei, was für die Werthe $-K < x < K$ in der That der Fall ist. Aus der Gleichung

$$\mu g(x) \cdot f'(x) = g'(x) f(x)$$

folgen Recursionsformeln für die $b_1, b_2 \ldots$,

$$\mu(n a_n + (n-1) a_{n-1} b_1 + \ldots + 2 a_2 b_{n-2} + a_1 b_{n-1})$$
$$= a_{n-1} b_1 + 2 a_{n-2} b_2 + \ldots + (n-1) a_1 b_{n-1} + n a_0 b_n$$
$$(n = 1, 2 \ldots)$$

oder

$$n a_0 b_n + (n - 1 - \mu) a_1 b_{n-1} + (n - 2 - 2\mu) a_2 b_{n-2} + \ldots$$
$$+ \{1 - (n-1)\mu\} a_{n-1} b_1 = n \mu a_n.$$

Auch independente Formeln für die b_n lassen sich leicht ableiten. Aus der Formel (4)

$$g(x) = \left[1 + \frac{f(x) - a_0}{a_0}\right]^\mu = 1 + \sum_1^\infty \binom{\mu}{r} \left(\frac{f(x) - a_0}{a_0}\right)^r,$$

worin

$$\frac{f(x) - a_0}{a_0} = \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_0} x^n + x^{n+1} R_n(x),$$

folgt, dafs x^n nur aus solchen Gliedern kommen kann, wofür $r \leqq n$. Und auch in diesen Gliedern stammt x^n nur aus der Potenz

$$\left[\frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_0} x^n\right]^r.$$

Man findet demnach nach dem polynomischen Satze für ganze positive

Exponenten (VIII. 3), wenn $p_1 \ldots p_n$ ganze Zahlen bedeuten, jede d Werthe 0 bis n fähig,

$$b_n = \sum_1^n \binom{\mu}{r} \sum \frac{r!}{p_1!\,p_2!\ldots p_n!} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{p_1} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{p_2} \cdots \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{p_n}$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + \ldots + p_n = r \\ p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = \end{cases}$$

oder

$$b_n = \sum \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-r+1)}{p_1!\,p_2!\ldots p_n!} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{p_1} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{p_2} \cdots \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{p_n}.$$

Anmerkungen und Zusätze.

Zum I. Abschnitte.

[1]) Vgl. Hankel, Zur Gesch. d. Math. 1874, p. 391.

[2]) H. Grafsmann, Lehrbuch d. Arithm. 1861, p. 1.

[3]) R. Grafsmann, Die Formenlehre od. Math. 1872, p.

[4]) F. C. Hauber, Scholae logico-mathematicae 182 § 291.

Zum II. Abschnitte.

[1]) Die Vergleichung der Vielheiten oder Anzahlen i hervorgehoben von Weierstrafs (vgl. E. Kossak, d. Ele d. Arithm. 1872, p. 16) und von E. Schröder, der insb sondere die i. T. angegebene Frage aufwarf (vgl. sein in di sem Abschnitte mehrmals benutztes Lehrbuch der Arithmeti und Algebra I. B. 1873, p. 8, 14).

[2]) Schröder, l. c. p. 219. Die zur Deutung von Au drücken, in denen keine Klammern vorkommen, aufgestellte Grundsätze, welche Schröder die erste und zweite Conve tion nennt, sind früher zu wenig beachtet worden. Beid sind bereits richtig angegeben in den Resultaten zur Au gabensammlung von Bardey 1871, p. 2.

[3]) Nach Dirichlet's Vorlesungen üb. Zahlentheorie hrs v. Dedekind § 3—8.

Zum III. Abschnitte.

[1]) Die Nr. 1—9 durchgeführte Untersuchung rührt mit Ausnahme der darin vorkommenden Vergleichungen im Wesentlichen von Hankel her, welcher den formalen Gebrauch der Begriffe „gröfser, kleiner“ nicht zuliefs (vgl. Theorie d. complexen Zahlensysteme 1867 § 4, 5 und p. 46). Hankel benutzt für die allgemeine Thesis und Lysis die fremdartigen und schleppenden Bezeichnungen $\Theta(a, b)$, $\lambda(a, b)$, wofür Hoüel (Mém. d. l. soc. d. Bordeaux 2. s. I, p. 5) $a^{\frown}b$, $a_{\smile}b$ setzt. Die letztere habe ich beibehalten. — Eigene Bezeichnungen sind dem Gebrauche von $+$ $-$ oder $.$: im allgemeinen Sinne vorzuziehen.

[2]) Das arithmetische Mittel zweier rationalen Zahlen $\frac{1}{2}(A + B)$ ist eine commutative, aber nicht associative Thesis. Denn es sind die Zahlen

$$(A \circ B) \circ \Gamma = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{A+B}{2} + \Gamma\right\}$$

$$A \circ (B \circ \Gamma) = \tfrac{1}{2}\left\{A + \frac{B+\Gamma}{2}\right\}$$

nur dann gleich, wenn $A = \Gamma$. (Hankel l. c. p. 21.)

[3]) Der Beweis nach Dirichlet (l. c. § 2). Die dabei angewandte Methode ist die Induction, zu einer Beweisart erhoben durch ein „dem Schlusse von n auf $n + 1$“ (vgl. z. B. VIII. 3) ähnliches Verfahren.

[3*]) Wenn die Verknüpfung $\circ$ associativ ist, so ist die durch Verknüpfung von n gleichen Gröfsen a erzeugte Gröfse $a \circ a \circ \ldots a$ durch die Gröfse a und den Wiederholungsindex n vollständig bestimmt. Sonst wäre es ungewifs, ob die Gröfsen $(a \circ a) \circ a$ $a \circ (a \circ a)$ gleich sind und wenn das auch der Fall wäre, ob $(a \circ a \circ a) \circ a$ und $(a \circ a) \circ (a \circ a)$ gleich sind u. s. f. Die Begriffe des Vielfachen na (II. 6) und der Potenz a^n (II. 9) setzen voraus, dafs die Addition, bezw. Multiplication associativ sind.

[3**]) Denkt man sich $(a \circ m) \smile (b \circ m)$ gegeben, so gilt die Gleichung

$$(a \circ m) \smile (b \circ m) = a \smile b$$

sicher nur dann, wenn aufser der Möglichkeit dieser beiden lytischen Symbole noch die des Ausdruckes $(a \circ m) \smile m$ feststeht.

[4]) Hankel l. c. p. 32.

[5]) Hankel l. c. p. 26. Wir heben noch ausdrücklich hervor, dafs Gleichungen wie z. B.

$$1 - 2 = 3 - 4 \qquad 1 : 2 = 2 : 4$$

auf dem formalen Standpunkte sich nicht beweisen lassen.

[6]) Der anderen Anordnung ist Hankel gefolgt (l. c. § 10, 11). Um diese Darstellung zu erhalten, hat man eigentlich nichts weiter zu thun, als die Theile I III einer- und II IV andererseits unter einander zu vertauschen. — Der Gedanke, die rationalen Zahlen auf rein formale Weise zu definiren, wurde in Deutschland wohl zuerst von M. Ohm durchgeführt (vgl. Versuch e. vollk. conseq. Systems d. Math. 1822 I. p. 37 ff.).

[7]) Nach H. Grafsmann, Lehrbuch d. Arithm. Nr. 53 und Hankel l. c. § 9.

[8]) Zum Theil nach Hankel l. c. § 12.

Zum IV. Abschnitte.

[1]) Vgl. P. du Bois Reymond, allgemeine Functionentheorie I. 1882, p. 52.

[2]) Man erhält die Regel über das Zeichen der Producte, nachdem man den positiven Drehungssinn für die Winkel und Flächen in der Ebene festgesetzt hat. Dem Rechtecke $ABCD$ (hier mit rationalen Seiten) entspreche eine positive oder negative Zahl, je nachdem der Umlauf längs des Umfanges in der vorgeschriebenen Richtung $ABCD$ einem im Innern des Rechteckes befindlichen Beobachter positiv oder negativ erscheint. Bezeichnet man nun eine der Richtungen (a) in der Geraden AB als positiv und bestimmt in BC die positive Richtung b so, dafs der Winkel $a \wedge b = +90^0$, so braucht man nur als Product $AB \,.\, BC$ das Rechteck $ABCD$ mit seinem Zeichen aufzustellen.

Zum V. Abschnitte.

[1]) Dafs III. aus I. und II. nicht folgen kann, lehrt die folgende Bemerkung. Läfst man aus der endlosen Reihe der natürlichen Zahlen den Anfang (1 bis zu einer beliebigen Zahl) weg, so entsteht ein Gröfsensystem, das den Forde-

rungen I. und II. noch genügt. Gleichwohl wird die Gleichung $b + x = a$ nicht immer durch eine Gröfse dieses Systemes befriedigt.

[2]) Vgl. Archimedes de sphaera et cylindro I. postul. 5 und die Vorrede zur Schrift de quadratura parabolae.

[3]) Euclid Elem. X. prop. 1—3.

[4]) Die Darstellung in Euclid's Elementen ist nicht ganz gleichartig. So findet man neben dem 1. Grundsatze: „Was einem und demselben gleich ist, ist einander gleich" im 5. Buche bewiesen den Satz (prop. 11): „Verhältnisse, die einem und demselben Verhältnisse gleich sind, sind einander gleich." Allerdings bezeichnet Euclid die Verhältnisse in einer Proportion niemals als ἴσοι, sondern immer als οἱ αὐτοί. Jedoch schon im Alterthume wurde neben ταυτότης auch ἰσότης τῶν λόγων gebraucht (vgl. Hankel, z. Gesch. d. Math. p. 395). — Consequenter verfuhr Apollonius, welcher mittelst des 7. Grundsatzes den 1. bewies. Näheres darüber in zwei Aufsätzen von P. Tannery (Darboux Bulletin XVI. 1, p. 124 und XIX. 1, p. 162).

[5]) Die Annahmen 13) und 14) können hier dadurch vermieden werden, dafs man die Winkel durch concentrische Kreisbögen ersetzt.

Statt die Winkel, wie i. T. angenommen ist, als abstracte Gröfsen aufzufassen (d. h. lediglich die Ausdrucksweise festzusetzen, dafs, wenn die Punkte A, B, C nicht in einer Geraden liegen, die Halbstrahlen BA und BC einen Winkel bilden), kann man auch die unbegrenzten Winkelflächen ABC der als nicht geschlossen vorausgesetzten Ebene als Gröfsen einführen. Die Vergleichung je zweier ABC, $A'B'C'$ wird vollzogen, indem man die Scheitel BB' und irgend zwei Schenkel BA, $B'A'$ aufeinanderlegt. Fallen dann auch die anderen Schenkel BC, $B'C'$ in eine Gerade, so heifsen die Winkelflächen ABC, $A'B'C'$ einander gleich; fällt $B'C'$ innerhalb ABC, so heifst ABC die gröfsere Winkelfläche. Man hat geglaubt, mit Hilfe dieses Gröfsensystemes das Parallelenaxiom beweisen zu können, d. i. den Satz: „Nimmt man auf derselben Seite der Geraden ABB' die Punkte CC' so an, dafs $\angle ABC = AB'C'$ und

zieht innerhalb der Winkelfläche $BB'C'$ eine Gerade $B'D$, so mufs sie BC schneiden.“ Dann wäre das nicht der Fall, so müfste die Winkelfläche $BB'D$ kleiner als die Winkelfläche $AB'C'$ und vermöge des 8. Grundsatzes gröfser als die der letzteren gleiche ABC sein. Es entspricht jedoch nur die erste Behauptung der obigen Festsetzung, die zweite widerspricht ihr geradezu; so dafs kein Beweis zu Stande gebracht ist. Gegen die ältere Darstellung von Bertrand, welche auf die Vergleichung von Winkelflächen ABC und Streifen $CBB'C'$ gegründet ist, läfst sich Folgendes einwenden. Um die Vergleichung überhaupt zu bewerkstelligen, müfste man von vorneherein die Annahme der Gaufs'schen Geometrie machen, dafs es innerhalb des $\angle AB'C'$ Halbstrahlen gebe, die BC nicht schneiden.

[7]) Der Beweis dieses Hilfssatzes beruht auf folgenden, aus dem Vorhergehenden abzuleitenden Sätzen. 1) „Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich. 2) Das Trapez ist gleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie gleich der Summe der beiden parallelen Seiten des Trapezes und dessen Höhe gleich der Höhe desselben. 3) Das auf einer Parallelen zur Grundlinie AB des Dreieckes ABC durch die beiden anderen Seiten bestimmte Stück PQ wird durch die Verbindungslinie des Scheitels C mit dem Mittelpunkte D der Grundlinie halbirt.“ — Der letzte Satz wird indirect gezeigt. Ist S der Mittelpunkt von PQ, so müssen nach 1) und 2) die $ADSCA$ und $DBCSD$ einander gleich sein. Würde nun S nicht in CD liegen, sondern z. B. auf derselben Seite davon wie P, so wäre die erste der soeben genannten Figuren kleiner, die zweite gröfser als das Dreieck ADC, was sich mit ihrer Gleichheit nicht verträgt.

Dieses vorausgesetzt, denke man sich in der i. T. befindlichen Figur durch O die Gerade $QR \parallel BC$ gezogen, die HK in S schneidet. Wegen $DR = RC$ ist $MS = SE$ und $HM = EK$, also wegen $EK = FB$, $HM = FB$, somit $FH \parallel BD$. Ebenso folgt aus $MK = HE$ $HE = DG$, $MK = DG$ und $KG \parallel BD$.

[8]) Handelt es sich um die Vergleichung zweier gleichartigen Gröfsen AB, deren Beziehung nicht mehr nach Nr. 5

oder einem damit äquivalenten Verfahren herauszubringen ist, so sucht man für jede derselben zwei Reihen von solchen mit ihnen gleichartigen Gröfsen, die sich auf die genannte Art vergleichen lassen und zwar die eine bestehend aus Gröfsen, welche kleiner, die andere aus Gröfsen, welche gröfser sind als A bezw. B. Es sei also

$$C_m < A < D_n, \qquad E_m < B < F_n, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots .$$

Die Gröfsenreihen $C_1, C_2 \ldots$ u. s. w. sind ferner so zu wählen, dafs zu jeder mit $A\,B$ gleichartigen Gröfse E Werthe $m\,n$ gehören derart, dafs sowohl $D_n - C_m < E$ als auch $F_n - E_m < E$. Wenn nun für zwei bestimmte Werthe von $m\,n$ $D_n \leqq E_m$ bezw. $F_n \leqq C_m$, so weifs man, dafs $A < B$ bezw. $A > B$. Ist aber, wie auch $m\,n$ gewählt werden, stets $D_n > E_m$ und $F_n > C_m$, so ist $A = B$. Angenommen nämlich, es sei $A > B$. Man hat dann

$$A - B < D_n - E_m.$$

Da bei passender Wahl von $m\,n$

$$D_n < C_m + E \quad \text{und} \quad E_m > F_n - E > C_m - E,$$

so folgt $A - B < 2E$, mithin wegen der Willkürlichkeit von E, $A \leqq B$. Auf ähnliche Weise ergiebt sich $B \leqq A$, somit mufs $A = B$ sein.

Solche Gröfsen $C_m\,D_n$ findet man mittelst des 8. Grundsatzes von Euclid oder der Annahmen des Archimedes im 1. Buch der Schrift de sphaera et cylindro (die von uns in Nr. 1 erwähnte fünfte abgerechnet) d. i. der Sätze: „Unter allen Linien, welche dieselben Endpunkte haben, ist die Gerade die kürzeste“ u. s. w. Sind $A\,B$ z. B. ebene Flächen, von denen eine krummlinig begrenzt ist, so müssen die C_m u. s. w. Polygone sein.

[9]) Ein solches Beispiel habe ich angegeben Math. Annalen XVIII, p. 276. — Die Methode der Alten kann in der Anwendung niemals zu Widersprüchen führen, während, wie H. Schwarz bemerkt hat (vgl. Hermite, Cours 2. édit. 1883, p. 35), die Methode der Grenzwerthe nicht ohne Einschränkung benutzt werden darf.

[10]) Vgl. Bolzano, die drey Probleme u. s. w. (1817) § 11—25.

[11]) G. Cantor hat in den Math. Annalen XXI, p. 576 eine stetige Gröfsenmenge durch „zusammenhängend und perfect“ erklärt. Mit dem ersteren Prädicate stimmt mein späteres (a. a. O. XXII, p. 509) „allenthalben überall-dicht“ überein, mit dem letzteren das von R. Dedekind (vgl. Stetigkeit und irrationale Zahlen 1872) zuerst hervorgehobene, in die i. T. gegebene Definition eines stetigen Gröfsensystemes an zweiter Stelle aufgenommene Merkmal.

Zum VI. Abschnitte.

[1]) Eine Verwechslung des Verhältnisses $A:B$ mit einem Quotienten ist nicht zu befürchten, da von der Division der allgemeinen absoluten Gröfsen nicht die Rede sein wird.

[2]) Wenn man sich auf die Verhältnisse der Strecken beschränkt, so kann man mit R. Hoppe (Archiv d. Math. 62. Bd., p. 162) $A:B$ und $A':B'$ als einander gleich erklären, wenn das Rechteck aus den Seiten AB' (nach V. 5) gleich ist dem aus den Seiten $A'B$. Eleganter setzte H. Grafsmann (Ausdehnungslehre 1844, 2. Aufl., p. 111) als Bedingung der Gleichheit dieser Verhältnisse fest, dafs, wenn man von zwei Punkten die Strecken AB einer- und die Strecken $A'B'$ andererseits nach derselben Seite parallel legt, die Verbindungslinie der Endpunkte von AA' parallel sein soll der von BB'.

Bei Vergleichung von Verhältnissen wird manchmal das Zeichen : : anstatt = gebraucht.

Man bemerke noch die Sätze (Eucl. El. X. prop. 5, 6): „Commensurabele Gröfsen AB verhalten sich wie natürliche Zahlen $a\,b$, und umgekehrt: verhalten sich natürliche Zahlen $a\,b$ wie Gröfsen AB, so sind die letzteren commensurabel.“ Denn wenn $A = aM$, $B = bM$, so hat man, falls $m\,n$ nur so gewählt sind, dafs $mA \gtrless nB$, entsprechend $ma \gtrless nb$, d. i. $A:B = a:b$. Und aus den entsprechenden Relationen $ma \lesseqgtr nb$, $mA \gtrless nB$ folgt nach dem Satze i. T. wegen $ba = ab$ auch $bA = aB$. Wird $A = aM$ gesetzt, so ist mithin $B = bM$. — Somit können sich incommensurabele Gröfsen nicht verhalten wie Zahlen.

[3]) Die eingeklammerten Verweise beziehen sich auf die

Sätze des 5. Buches der Euclid'schen Elemente. Hinsichtlich der Ungleichungen unter den Verhältnissen vgl. die Dissertation von C. F. Hauber: Propositionum de rationibus inter se diversis demonstrationes etc. Tubingae 1793. — Die Sätze in Nr. 4, 5 sind nach Euclid's Vorgang begründet, ohne vom Satze in Nr. 6 Gebrauch zu machen. Fügt man zu den in Nr. 4 noch den folgenden: „Aus

$$A : M = A' : M', \qquad B : M > B' : M'$$

folgt

$$(A + B) : M > (A' + B') : M'$$

der mit dem 7. und 11. Satze so zusammenhängt, wie der 17. mit dem 6. und 10., und läfst die Sätze 8, 14, 15 weg; so hat man von den Sätzen, welche bei Begründung des Rechnens mit den Verhältnissen nothwendig sind, diejenigen beisammen, welche auf dem soeben bezeichneten Wege zu erlangen sind.

[4]) Darf man von der hier benutzten Definition des stetigen Gröfsensystemes keinen Gebrauch machen, so wird der Satz von Nr. 6 manchmal als Grundsatz aufzustellen sein. Als solcher kommt er vor in Euclid's Elem. z. B. XII. prop. 2 und liegt seinem Begriffe des zusammengesetzten Verhältnisses zu Grunde. An der ersteren Stelle hätte die Geometrie der Alten davon absehen können, wie C. F. Pfleiderer (de dimensione circuli Pars II. (1790) § 48) und auf eine andere Art der Verfasser (Math. Annalen XXII, p. 517) gezeigt hat.

[5]) Euclid. Elem. VI. Def. 5. Der 1. und 3. der folgenden Sätze bei R. Simson, The Elements of Euclid 1767, p. 143. — Bei Zusammensetzung der reducirten Verhältnisse von ganzen Zahlen $a : b$, $c : d$ mufs das vermittelnde Glied m ein gemeinschaftliches Vielfache von $b\,c$ sein.

[6]) Die Zusammensetzung der Verhältnisse scheint manchmal als eine Addition aufgefafst worden zu sein. Dann würden aber nicht durchweg dieselben Sätze gelten, wie für die natürlichen Zahlen. Man hat nämlich

$$(A : B)\,(B : C) < A : B,$$

wenn $B < C$.

[7]) Vgl. Beiträge zur Geometrie der Lage. 2. Heft. 1857.

Zum VII. Abschnitte.

[1]) Über Weierstrafs's Theorie geben Aufschlufs E. Kossak (die Elemente der Arithmetik 1872) und S. Pincherle (Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. W. in Battaglini G. XVIII). — G. Cantor, Math. Annalen V, p. 123, XXI, p. 564. Heine, Borchardt J. LXXIV, p. 172. — Dedekind s. V. Note [11]).

[2]) Die Formulirung des Satzes setzt voraus, dafs auch der Null ein absoluter Betrag, nämlich 0, beigelegt sei (vgl. III. 13). Es kann also für gewisse Werthe von n φ_n auch $= \alpha$ sein.

[2*]) Man kann sich, wie P. du Bois-Reymond bemerkt hat (Allg. Functionentheorie I, p. 55) darauf beschränken, die systematischen Zahlen (S_n) zu postuliren. Die Existenz einer solchen Zahl mufs auf die Kenntnifs jeder beliebigen Anzahl von Stellen c_r gegründet werden. So sind Summe und Differenz zweier irrationalen Zahlen dadurch zu definiren, dafs man jede einzelne Stelle derselben aus den bekannten Stellen dieser Zahlen herleitet. Beim Producte wird das unbequem, so dafs man es wohl vorziehen wird, sofort die Existenz des allgemeinen φ_n (nach l. c. p. 260 oder Nr. 12 i. T.) zu erweisen und dann zu der i. T. vorgetragenen Theorie überzugehen.

[3]) Auch die Formulirung dieses, sowie des 1. Corollares in Nr. 7 beruht auf der in Note 2 erwähnten Voraussetzung. Ohne dieselbe müfste das letztere ähnlich lauten wie der Fundamentalsatz der Exhaustionsmethode in V. 4.

[4]) Da gezeigt ist, dafs $(\varphi_n) = \lim \varphi_n$ bei $\lim n = +\infty$, so können wir die Resultate der vier Species auch so schreiben:

$$\lim \varphi_n \pm \lim \psi_n = \lim (\varphi_n \pm \psi_n),$$

$$\lim \varphi_n \,.\, \lim \psi_n = \lim \varphi_n \psi_n$$

u. s. f. Hieraus erhellt, dafs der 3. Satz in Nr. 4 auch Geltung hat, wenn die darin vorkommenden Grenzwerthe irrational sind. Dabei denken wir uns φ_n, ψ_n wie bis-

her als rationale Zahlen. Die Ausdehnung dieses, sowie mehrerer unter den folgenden Sätzen auf den Fall, dafs die φ_n, ψ_n u. s. w. irrationale Zahlen bedeuten, wird im IX. 9 erfolgen.

[5]) Wie Gaufs (W. III, p. 242) berichtet, liefs v. Prasse in seinen logarithmischen Tafeln (1810) die letzte Ziffer eines jeden Logarithmen, wenn sie vergröfsert worden war, mit einer anderen Schrift setzen. Gaufs bemerkt auch, dafs diese Einrichtung dazu dienen kann, die Genauigkeit der Rechnung zu verdoppeln; empfiehlt sie und auch die von Babbage getroffene Einrichtung jedoch nicht, wenn man Logarithmentafeln von mehr Stellen zur Hand hat. Wie man die i. T. angeführte Verbesserung der Näherungswerthe bei logarithmischen Rechnungen verwerthen kann, zeigt Gernerth in seinen fünfstelligen g. Logarithmen (1866). Hinsichtlich der Theorie der „numerischen Annäherungen" verweisen wir auf Baltzer's Elemente der Math. I. Gem. Arith. §. 18 und die ausführlichen Darstellungen von Vieille (Théorie gén. des approximations num. 2. éd. 1854), Ruchonnet (Élémens de calcul approximativ 3. éd. 1880) u. A.

[6]) „Sind die Verhältnisse $A : B$ und $A' : B'$ im Sinne von Euclid einander gleich, so sind es auch die ihnen entsprechenden Zahlen $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}'$." Denn wenn α_1 α_2 irgend zwei rationale Zahlen bedeuten derart, dafs

$$\alpha_1 B < A < \alpha_2 B,$$

so hat man auch

$$\alpha_1 B' < A' < \alpha_2 B',$$

d. h. neben

$$\alpha_1 < \mathfrak{p} < \alpha_2$$

ist stets

$$\alpha_1 < \mathfrak{p}' < \alpha_2,$$

so dafs $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ sein mufs.

Zum VIII. Abschnitte.

[1]) Im ersten Theile wird unter dem Symbol $\sqrt[m]{a}$ stets die absolute Wurzel verstanden.

[2]) In Wahrheit sind freilich die Logarithmen von Napier von den natürlichen verschieden, vgl. S. Günther, Verm. Unters. z. Gesch. d. math. Wiss. 1872, p. 278.

[3]) Vgl. Klügel, Math. Wörterbuch III, p. 550.

[4]) Eine Tafel solcher Potenzen von 10 berechnete Kramp durch Ausziehen von Quadrat- und fünften Wurzeln. Correcter ist nach Gernerth (l. c. p. V) die Tafel im Handbuche der allgemeinen Arithmetik von Egen, welche G. in seine Sammlung aufnahm. Zur Berechnung solcher Tafeln würde sich die unendliche Reihe (5) in XI. 1 eignen, die nur die Kenntnifs von $l10$ voraussetzt.

Zum IX. Abschnitte.

[1]) Nach Weierstrafs, vgl. Pincherle l. c. p. 242. Im Wesentlichen schon bei Bolzano (Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes u. s. w. [d. i. des Satzes in Nr. 13] 1817, p. 41).

[2]) Die Vorschrift mufs von der Art sein, dafs man für einen gegebenen Werth von x jede arithmische Darstellung setzen kann, ohne dafs der ihm zugeordnete von y sich ändert, z. B. $a^{\frac{m}{n}}$ wird mit Hilfe der beiden ganzen Zahlen m n definirt, jedoch so, dafs, wenn sie durch mk, nk ersetzt werden, eine Änderung nicht eintritt.

[3]) G. Cantor (Math. Annalen XXI, p. 546) unterscheidet das Unendliche in Nr. 4 als Eigentlich-Unendliches von dem in Nr. 1, dem Uneigentlich-Unendlichen.

[4]) Was unter dem Grenzwerthe einer (d. i. der unabhängigen) Veränderlichen zu verstehen sei, ist längst ausgemacht. Wenig bekannt erscheint dagegen in der älteren Literatur die genaue arithmetische Erklärung des Grenzwerthes einer Function, welche der Verfasser nach Weierstrafs gegeben hat. Sie findet sich auch bei Dini (Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali 1878, p. 22).

[5]) Es ist

$$g(x_0) > f(x)$$

für

$$a < x < x_0.$$

Im Intervalle (a, x_0') giebt es einen Werth x_1', wofür

$$f(x_1') > g(x_0') - \varepsilon.$$

Demnach ist

$$g(x_0) > g(x_0') - \varepsilon,$$

also nach VII. 7

$$g(x_0) \geq g(x_0').$$

[6]) Vgl. Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen (Antrittsprogramm); Allg. Functionentheorie p. 266.

[7]) Dieser Satz, von P. du Bois-Reymond in der „allgemeinen Functionentheorie" das „Convergenzprincip" genannt, findet sich schon bei Bolzano (l. c. § 7).

[8]) Der Satz folgt daraus, dafs man jede algebraische Function von x nach steigenden, ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - a$ entwickeln kann.

[9]) Die Sätze wurden von mir durch Verallgemeinerung eines Cauchy'schen Satzes gefunden, vgl. Math. Annalen XIV, p. 231. Sie lassen sich wieder dahin verallgemeinern, dafs, wenn die obere (untere) Unbestimmtheitsgrenze von

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{\varphi(n+1) - \varphi(n)}$$

bei $\lim n = +\infty$ eine endliche Zahl $O(U)$ ist, die entsprechende Unbestimmtheitsgrenze $O'(U')$ von $f(n) : \varphi(n)$ bei $\lim n = +\infty$, falls sie überhaupt endlich ist, nicht gröfser (kleiner) als $O(U)$ sein kann.

[10]) Bolzano l. c. p. 11.

[11]) Ist eine Function $f(x)$ für alle Werthe von x im Intervalle $(a - d,\ a + d)$, $x = a$ eingeschlossen, definirt, so gelangt man durch Übertragung der Betrachtungen in Nr. 7 auf die Intervalle $(a - \xi,\ a + \xi)$ von x zu Unbestimmtheitsgrenzen $f(x)$ bei $\lim x = a$ [wobei freilich auch der Werth $f(a)$ berücksichtigt ist]. Mittelst derselben kann die Unstetigkeit von $f(x)$ für den Werth $x = a$ auch so charakterisirt werden: von diesen Unbestimmtheitsgrenzen ist entweder mindestens eine unendlich oder, wenn beide endliche Zahlen O, U sind, so müssen sie ungleich sein. Im letzteren Falle heifst $O - U$ der Sprung von $f(x)$ für $x = a$.

[12]) Beweis nach Bolzano l. c. Einen anderen Beweis des Satzes findet man bei Cauchy (Cours d'Analyse p. 549).

[13]) Die Sätze von Nr. 15 rühren von Weierstrafs her. Die Beweise sind zu finden bei Pincherle l. c. p. 249 und Dini l. c. p. 51.

[14]) Der auch aus den Vorlesungen von Weierstrafs bekannte Satz findet sich bei Dini l. c. p. 49; Beweis nach Lüroth (Math. Ann. VI, p. 319). Einen anderen Beweis giebt Darboux (Ann. de l'Éc. norm. 2. sér. IV, p. 73).

[15]) Vgl. Borchardt J., 84. B., p. 245.

[16]) Nach Weierstrafs (vgl. Pincherle l. c. p. 246).

[17]) Cauchy, Cours d'Analyse p. 41.

[18]) Eine ausführlichere Darstellung hat der Verfasser in den Ber. d. naturw.-medic. Vereines in Innsbruck XIV. Jgg. p. 21—43 gegeben.

[19]) Die in einem Intervalle $(a,\ a + d)$ $-d > 0$ — einsinnigen Functionen, d. h. hier diejenigen, welche, während x von $x = a$ an wächst, nicht abnehmen, bilden kein System von den verlangten Eigenschaften. Denn es giebt darunter solche, deren Quotient keinen Grenzwerth hat. Vgl. Math. Annalen XIV, p. 252.

[20]) Vgl. Princip. philosoph. nat. math. lib. II. lem. II.

[21]) Die 2. und 3. Definition sind in ähnlichem Sinne von P. du Bois-Reymond gebraucht (Borchardt J. 70. B. p. 27). — Die Bezeichnung: „Ordnung des Unendlichklein-Werdens" ist auf die $u(f)$ nicht anwendbar.

[22]) Vgl. insbesondere Math. Annalen XI, p. 146. Daselbst finden sich u. A. die soeben benutzten Functionen g_n.

Zum X. Abschnitte.

[1]) Der Fehlschluſs über die unendliche geometrische Progression begegnet noch immer. Man sagt: „Es sei

$$1 + x + x^2 + \cdots = s.$$

Dann ist

$$x + x^2 + x^3 + \cdots = xs,$$

also

$$1 = (1 - x)s, \qquad s = 1 : (1 - x).$$

Somit ergiebt sich für $x = -1$ $s = \frac{1}{2}$, so daſs

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 0 + 0 + \cdots = \frac{1}{2}$$

ist.“ Durch die letzte Formel erklärte Guido Grandi die Schöpfung der Welt aus Nichts. — Der Fehler besteht darin, daſs der Ausdruck

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

ohne Weiteres als reelle Zahl betrachtet wird.

[2]) Stern, Algebr. Analysis 1860, p. 63.

[3]) Vgl. Abel, Oeuvres par Sylow et Lie. I, p. 399.

[4]) Nach Weierstraſs (vgl. Pincherle l. c. p. 215).

[5]) Cauchy, Cours d'Analyse p. 141.

[5*]) Cauchy l. c. p. 144. Daſs die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind und bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0 haben, ist zur Convergenz der Reihe nicht ausreichend. So divergirt (10) i. T., wenn man setzt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}.$$

[6]) Dirichlet in den Abh. d. Berliner Acad. v. Jahre 1837.

[7]) Es ist $a = l\,2$. Vgl. XI. 5.

[8]) Riemann, Werke p. 221. Dini, Fondamenti p. 98. Man kann auch zeigen, daſs sich die Glieder a_n so ordnen lassen, daſs die Reihe Σa_n einen unendlichen Grenzwerth hat oder zwischen gegebenen Unbestimmtheitsgrenzen bei $\lim n = +\infty$ oscillirt. Genügen die Zahlen $K_1\, K_2 \cdots$ den Bedingungen

$$0 \leqq K_0 \geqq K_1 \qquad K_1 \leqq K_2 \qquad K_2 > K_3 \qquad K_3 < K_4$$

u. s. w.; so lassen sich die Glieder $b_r c_s$ so aneinander reihen, daſs die i. T. aufgeführten Partialsummen der Reihe nach

$$< K_0,\ > K_0;\ \geq K_1,\ < K_1 \ldots$$

sind, nämlich

$$B_0 - b_{k_0} \leq K_0 < B_0$$

u. s. w. Nimmt man

$$K_0 = K_2 = K_4 = \cdots, \quad K_1 = K_3 = \cdots \text{ und } K_0 > K_1,$$

so sind $K_0\, K_1$ die Unbestimmtheitsgrenzen der neuen Reihe. Läſst man

$$K_0 = K_1, \quad K_2 = K_3 \ldots \text{ und } K_0\, K_2\, K_4 \ldots$$

Zahlen sein, die beständig und ins Unendliche wachsen, so ist der Grenzwerth der neuen Reihe $+\infty$.

Eine nähere Untersuchung über die Werthveränderungen bedingt convergirender Reihen bei Umstellung ihrer Glieder giebt A. Pringsheim, Math. Annalen XXII, p. 455.

[9]) Diese Eintheilung der convergenten unendlichen Reihen in zwei Classen verdankt man Dirichlet.

[10]) Abel, Oeuvres I, p. 222. Dirichlet, Zahl.-Th. 2. A. p. 371.

[11]) Nach Weierstrafs (vgl. Pincherle l. c. p. 221).

[12]) Cauchy, Cours d'Anal. p. 147.

[13]) Cauchy l. c. p. 541.

[14]) F. Arndt in Grunert Arch. XI, p. 319.

[15]) Cauchy l. c. p. 539. Genau genommen, ist noch die Convergenz einer jeden Horizontal- und einer jeden Verticalreihe vorauszusetzen. — Auch die zweite Cauchy'sche Bedingung wird wohl zur Gleichheit der Grenzwerthe (17) i. T. nicht nothwendig sein.

[16]) Den Beweis dieses Satzes hat der Verfasser nebst einem Abrisse über die Theorie der Doppelreihen gegeben Math. Annal. XXIV, p. 157.

[17]) Abel, Oeuvres I, p. 226.

[18]) Dafs unter der i. T. angegebenen Bedingung die Reihe (20) zum Grenzwerthe ab convergire, hat Mertens gezeigt (Borchardt J. 79, p. 182). — Der Fall, dafs keine der beiden Reihen (19) absolut convergirt, ist betrachtet von A. Pringsheim (Math. Annal. XXI, p. 327) und A. Vofs (l. c. XXIV, p. 42).

[19]) Borchardt J. 76, p. 61—91.

[20]) Da $\log x$ nur definirt ist für $x > 0$, so $\log_2 x$ nur für $x > 1$, $\log_3 x$ nur für $x > B$, $\log_4 x$ nur für $x > B^B$ u. s. f.

[21]) Eine solche Reihe hat P. du Bois-Reymond (l. c. p. 88) angegeben.

[22]) O. Bonnet in Liouville J. VIII, p. 78.

[23]) Crelle J. XIII, p. 172. Man erhält die dort gegebene Form des Convergenzcriteriums, wenn man in (1)

$$\psi(n) = a_{n+k-1}\,\varphi(n)$$

setzt.

[24]) Die Folgen von logarithmischen Criterien zweiter Art gehen zurück auf Bertrand (Liouville J. VII, p. 35) und O. Bonnet l. c.

[25]) Ettinghausen, Zeitschr. X, p. 63.

[26]) Weierstrafs in Crelle J. 51, p. 28.

[27]) Gaufs, Werke III, p. 139.

[28]) Cauchy, Cours d'Anal. p. 131. Abel, Oeuvres I, p. 224. — Erst 1853 räumte Cauchy ein, dafs sein in Rede stehender Satz einzuschränken sei (vgl. Compt. rend. T. 36, p. 455).

[29]) Der zum Theorem V. von Abel l. c. gegebene Beweis wird vollständig, wenn die gleichmäfsige Convergenz der Reihe

$$v_0 + r_1\delta + v_2\delta^2 + \cdots,$$

wo $v_0, v_1, v_2 \ldots$ Functionen von x sind, für die Werthe $a \leq x <$ vorausgesetzt wird.

[30]) Abh. d. Münchener Acad. II. Cl. V. 2. A., p. 380.

[31]) P. du Bois-Reymond l. c. XII. 1. A., p. 120. Das folgen Beispiel nach G. Cantor Math. Annalen XVI, p. 269.

[32]) Oeuvres I, p. 223.

[33]) W. Veltmann, Schlömilch Z. XXVII, p. 196.

[34]) O. Hölder, Math. Annalen XX, p. 536.

[35]) Résumés analytiques 1833, p. 65. Weierstrafs (Pincherle c. p. 339).

[36]) Das Convergenzintervall der Reihe (5) kann über $(-R, +$ hinausragen, wie schon die Gleichung

$$e^{l(1+x)} = 1 + x$$

zeigt, wenn man für e^y, $l(1+x)$ die im XI. Abschnitte angegeben Reihen setzt.

[37]) Weierstrafs (Pincherle l. c. p. 340).

[38]) Cauchy erfand die im Folgenden benutzte Methode, um Existenz der Integrale der Differentialgleichungen nachzuweisen. V (Nouv.) Exercices d'Analyse etc. I. (1840), p. 355.

[39]) Vgl. Lehmann, Grunert Arch. XXI, p. 123.

Zum XI. Abschnitte.

[1]) Cauchy, Cours d'Analyse p. 106.

[2]) Ohm, Versuch eines Systemes der Math. 1821. II, p. 302.

[3]) Der hier gegebene Beweis des binomischen Satzes rührt v Euler her (N. Comm. Acad. Petropol. XIX, p. 103).

[4]) H. Grafsmann, Arithmetik, p. 166. Die übrigen Sätze üb die Quadrat- und Cubikwurzel nach Ruchonnet, Élém. d. calcul. a prox. 3. éd. p. 35.

[5]) Lambert, Beiträge II, p. 152.

[6]) Cauchy, Cours d'Analyse p. 545.

[7]) Koralek, Méthode n. pr. calculer rapid. l. logarithm. etc. 18

[8]) R. Hoppe, Tafeln z. 30stellig. logarithm. Rechnung. 1876.

[9]) Euler, Instit. Calc. diff. II. § 202.

Berichtigungen.

S. 5, Z. 13 statt „simultan“ l. „jedenfalls“.

S. 31, Z. 7 v. u. statt b'' l. b'.

S. 70, Z. 11 v. u. statt $A' + B$ l. $A' + B'$.

S. 96, Z. 14 statt „derselben“ l. „desselben“.

S. 121, Z. 10 statt „obenerw.“ l. „ebenerw.“

S. 157, Z. 15 statt $f(\alpha)$ l. $f(x)$.

S. 208, Z. 2 v. u. statt „Satz (7) a. a. O.“ l. „folgende Satz“.

S. 223, Z. 12 v. u. statt des zweiten $\sum_{1}^{n-1}$ l. $\sum_{0}^{n-1}$.

S. 268, Z. 13 statt p^2 l. n^2.

S. 319, Z. 9 c_1 braucht nicht grösser als 8 zu sein.

S. 321, Z. 8 v. u. Nur wenn $n = 2$ und $a_2^{(1)} = 9$ ist, kann die erwähnte Differenz negativ sein. Dann ist stets $c_2 = 9$.

VORLESUNGEN

ÜBER

ALLGEMEINE ARITHMETIK.

NACH DEN NEUEREN ANSICHTEN

BEARBEITET VON

Dr. OTTO STOLZ,

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU INNSBRUCK.

ZWEITER THEIL:

ARITHMETIK DER COMPLEXEN ZAHLEN

MIT GEOMETRISCHEN ANWENDUNGEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1886.

Vorwort.

Nicht lange nach dem ersten Theile dieser Vorlesungen erschien J. Tannery's Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, ein Werk, dessen erste Hälfte in Plan und Ausführung vielfach mit demselben übereinstimmt. Tannery berücksichtigt nur die reellen Zahlen, doch ist die Darstellung so eingerichtet, dafs man die Verallgemeinerung auf die complexen ohne Mühe vornehmen kann; man hat zumeist nur an Stelle der Worte „valeur absolue“ das Wort „module“ zu setzen. Als Nachtrag zum ersten Theile führe ich aus der Vorrede dieses Werkes die Bemerkung an, dafs der Grundgedanke der von mir Dedekind zugeschriebenen Theorie der irrationalen Zahlen, welcher Tannery, sowie vor ihm Méray, Pasch, Peano den Vorzug vor der indefs auch von dem vorgeführten Cantor'schen einräumt, schon von J. Bertrand in seinen Lehrbüchern der Arithmetik und Algebra vorgetragen wurde.

Die Darstellung in dem ersten Theile meines Werkes ist, soweit es eben möglich ist, ebenfalls so gehalten, dafs sie sich unmittelbar in den zweiten, den complexen Zahlen gewidmeten, übertragen läfst und zwar, da statt „Modul“ einer solchen Zahl nach dem Beispiele von Weierstrafs „absoluter Betrag“ gesagt wird, ohne Aenderung.

Ich behandele in diesem zweiten Theile die folgenden Gegenstände. Zunächst wird gezeigt, dafs es aufser dem Systeme der gemeinen complexen Zahlen kein anderes giebt, für dieselben Rechnungsregeln gelten, wie für die reellen Zahlen. Daran schliefst sich der Nachweis der Behauptung, dafs Zahlensysteme mit vier und mehr Einheiten und gewöhnlicher Multiplication überflüssig sind. Ich führe denselben nach Weierstrafs, deute jedoch auch an, wie er sich nach Dedekind gestaltet. Einen eingehenden Commentar der bez. Abhandlungen von Weierstrafs und Dedekind bietet, wie ich schon hier hervorheben möchte, die Thèse von Berloty: Théorie des quantités complexes à *n* unités principales (Paris 1886).

Im zweiten Abschnitte ist die Methode der Aequipollenzen d. h. das Rechnen mit den Strecken der Ebene entwickelt und sind daran einige geometrische Anwendungen geknüpft. Dazu gehören die Grundformeln der Trigonometrie, welche sich hier besonders einfach ergeben. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit den Grundbegriffen über die complexen Veränderlichen und Functionen, der vierte mit den ganzen rationalen Functionen, den arithmetischen Reihen und der Interpolation.

Der fünfte Abschnitt ist der wichtigen Theorie der unendlichen Reihen mit complexen Gliedern gewidmet. Als Ziel desselben hat mir vorgeschwebt die Erledigung der zum Theile schon im ersten Bande aufgeworfenen Fragen über den Giltigkeitsbereich der Entwickelungen gewisser Functionen in Potenzreihen. Um dasselbe zu erreichen, muſs man über diejenigen Sätze der complexen Reihentheorie, welche als bloſse Verallgemeinerungen von solchen der reellen erscheinen, hinausgehen, und zwei, nur bei Gebrauch von complexen Werthen der Veränderlichen mögliche Sätze entwickeln, den Cauchy'schen über die Coefficienten der Glieder einer Potenzreihe und das Weierstraſs'sche Kriterium des Convergenzbereiches einer solchen. Es sind noch aufgenommen Weierstraſs' Doppelreihensatz, Cauchy's und Laurent's Sätze über die Entwickelung der monogenen Functionen in Potenzreihen, die letzteren als der natürliche Abschluſs der gerade erwähnten Frage.

Hierauf verwende ich das bisher Gewonnene zur Begründung der Lehre von den Potenzen mit complexen Exponenten und den complexen Logarithmen und schlieſse daran die Theorie der unendlichen Producte. Der achte Abschnitt enthält die Theorie der Kettenbrüche in der Gestalt, welche sie durch die Arbeiten vornehmlich von Seidel und Stern erhalten hat; neu oder doch wenig bekannt ist indeſs die vollständige Lösung der Frage nach der Convergenz oder Divergenz der periodischen Kettenbrüche.

Innsbruck, im October 1886.

O. Stolz.

Inhalt.

Zweiter Theil. Arithmetik der complexen Zahlen.

Seite

I. Abschnitt. Analytische Theorie der complexen Zahlen 1

1. Systeme von complexen Zahlen mit zwei Einheiten. 2. Addition und Subtraction. 3. Multiplication derselben. 4. Zahlensysteme mit zwei Einheiten, die eine distributive, associative und commutative Multiplication ohne Modulus zulassen. 5. Zahlensysteme mit zwei Einheiten, die eine solche Multiplication mit Modulus zulassen. 6. 7. Die gemeinen complexen Zahlen. 8. Absoluter Betrag einer complexen Zahl. 9. Complexe Zahlen mit n Einheiten und distributiver, associativer und commutativer Multiplication. 10. Für jedes Zahlensystem mit mehr als zwei Einheiten gelten einige Sätze der allgemeinen Arithmetik nicht mehr. 11. Einführung der neuen Elemente $g_0\, g_1 \ldots g_{n-1}$ für die complexen Zahlen in Nr. 9. Ueberflüssigkeit dieser Zahlen nach Dedekind. 12. Zerlegung der Zahlen $\Sigma \alpha_r g_r$ in ihre Componenten. Ueberflüssigkeit derselben nach Weierstrafs.

II. Abschnitt. Synthetische Theorie der gemeinen complexen Zahlen 30

1. Litteratur. 2. Die Strecken in der Euklid'schen Ebene nach Gröfse und Lage. 3. Addition und Subtraction der Strecken. 4. Die Strecken in einer und in parallelen Geraden. 5. Systematische Darstellung der Strecken der Ebene. 6. Multiplication, 7. Division der Strecken. 8. Conjugirte Strecken-Gleichungen. 9. Die Verhältnisse der Strecken.

Geometrische Anwendungen. 10. Planimetrische Aufgaben. 11. Die trigonometrischen Functionen. 12. Die cyclometrischen Functionen. 13. Producte und Quotienten von complexen Zahlen in trigonometrischer Form. 14.

Seite

Hauptsätze der Trigonometrie im engeren Sinne. 15. Ein Uebertragungsprincip aus der Geometrie der Geraden in die der Ebene. 16. Schnitt- und Doppelverhältnisse von Punkten der Ebene.

Allgemeine Wurzeln und Potenzen mit reellen Exponenten. 17. Die Wurzeln aus complexen Zahlen. 18. Sätze über die allgemeinen Wurzeln. 19. Potenzen von complexen Zahlen mit reellen Exponenten.

III. Abschnitt. Complexe Veränderliche und Functionen 75

1. Complexe Functionen von reellen Veränderlichen. 2. 3. Geometrische Darstellung der complexen Functionen einer reellen Veränderlichen. 4. Complexe Veränderliche. 5. Functionen von complexen Veränderlichen. 6. Die uneigentliche Zahl ∞. 7. Grenzwerthe der Functionen complexer Veränderlichen. 8. Stetige Functionen complexer Veränderlichen. 9. Stetigkeitsunterbrechungen. 10. Conforme oder isogonale Abbildung einer Ebene.

IV. Abschnitt. Ganze rationale Functionen 99

1. Begriff derselben. 2. Rechnungsoperationen mit ihnen. 3. Die Ableitungen einer ganzen Function einer Veränderlichen. 4. Die Ableitungen einer ganzen Function mehrerer Veränderlichen. 5. Identitätssätze für ganze Functionen. 6. Theilbarkeit der ganzen Functionen einer Veränderlichen. 7. Theilbarkeit der ganzen Functionen mehrerer Veränderlichen. 8. Der Fundamentalsatz der Algebra. 9. Folgerungen.

Anhang. Arithmetische Reihen und Interpolation. 10. 11. Die Differenzenreihen. 12. Arithmetische Reihen m^{ter} Ordnung. 13. Die Lagrange'sche und die Newton'sche Interpolationsformel. 14. Interpolirte Functionswerthe.

V. Abschnitt. Unendliche Reihen mit complexen Gliedern 135

1. Convergente und divergente Reihen. 2. Allgemeine Sätze über die unendlichen Reihen. 3. Unbedingte und bedingte Convergenz. 4. Ueber die Convergenz und Divergenz der Reihe $\Sigma\beta_n\alpha_n$. 5. Criterien der Convergenz und Divergenz von Reihen mit complexen Gliedern. 6. Reihen, deren Glieder Functionen einer Veränderlichen sind. 7. Reihen nach ganzen positiven Potenzen einer Veränderlichen. 8. Verhalten gewisser Potenzreihen auf dem Convergenzkreise. 9. Stetigkeit der Grenzwerthe von Potenzreihen. 10. Identitätssatz. 11. Entwickelung der Function $\varphi[f(x)]$ in eine Potenzreihe. 12. Partialbruchzerlegung einer rationalen Function von x. 13. Reihen nach ganzen Poten-

Seite

zen einer Veränderlichen. 14. Satz über die Uebereinstimmung zweier Reihen nach ganzen Potenzen im gemeinsamen Convergenzgebiete. 15. Cauchy's Satz über die Coefficienten einer Reihe nach ganzen Potenzen einer Veränderlichen. 16. Weierstrafs' Doppelreihensatz. 17. Anwendungen desselben. 18. Ueber das Verhalten der Summe einer Potenzreihe in der Nähe ihres Convergenzkreises. 19. Folgerungen. 20. Sätze aus der Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. 21. Potenzreihen mit zwei Veränderlichen.

VI. *Abschnitt. Potenzen mit complexen Exponenten und complexe Logarithmen* 193

1. Die natürliche Potenz. 2. Die Cosinus- und die Sinusreihe. 3. Der natürliche Logarithmus. 4. Die allgemeine Potenz. 5. 6. Die binomische und die logarithmische Reihe. 7. Der Arcus tangens. 8. Der Arcus sinus. 9. Die Potenzreihe für den Arcus sinus. 10. Potenzreihen für einige zusammengesetzte Functionen. 11. Die Potenzreihen für cos (s arc sin x) und sin (s arc sin x). 12. Die unendlichen Reihen $1^t + 2^t + \cdots + n^t \ldots$

VII. *Abschnitt. Unendliche Producte.* 231

1. Convergenz und Divergenz unendlicher Producte. 2. Allgemeine Sätze über die unendlichen Producte. 3. Reelle Producte, deren Factoren entweder sämmtlich gröfser oder sämmtlich kleiner als 1 sind. 4. Unbedingt convergente unendliche Producte. 5. Sätze über solche Producte. 6. Bedingt convergente Producte. 7. Die unendlichen Producte für den Sinus und den Cosinus. 8. Partialbruchentwickelungen für cot x, tan x, cosec x, sec x. 9. Die Potenzreihen für x cot x, tan x, cosec x. 10. Einiges über die Bernoullischen Zahlen. 11. Die Potenzreihe für sec x. Euler'sche Zahlen. 12. Die Potenzreihen für l sin x und l cos x. 13. Reihen nach ganzen Potenzen von x für cot x u. s. w.

VIII. *Abschnitt. Kettenbrüche.* 264

1. Directe Berechnung eines Kettenbruches. 2. 3. Recurrente Berechnung eines Kettenbruches. 4. Ueber die Möglichkeit der aus einem Kettenbruche durch Weglassung von Gliedern entstehenden Kettenbrüche. 5. Differenzen der Näherungsbrüche $Z_p : N_p$. 6. Aequivalente Kettenbrüche. 7. Unendliche Kettenbrüche. 8. Eine Eigenthümlichkeit derselben.

Unendliche Kettenbrüche mit positiven Theil-

Seite

zählern und Theilnennern. 9. Convergenz und Divergenz. 10. Regelmäfsige Kettenbrüche.

Unendliche Kettenbrüche mit negativen Theilzählern und positiven Theilnennern. 11. Convergenz und 12. Eigenschaften der Kettenbrüche, worin

$$b_n \geq a_n + 1$$

ist.

13. Die Irrationalität gewisser unendlicher Kettenbrüche.

Periodische Kettenbrüche. 14. Convergenz und Divergenz. 15. Beispiele.

16. Verwandlung von unendlichen Reihen in unendliche Kettenbrüche. 17. Verwandlung des Quotienten zweier Potenzreihen in einen Kettenbruch. 18. Anwendungen. Irrationalität von $e^{\frac{r}{s}}$ und π.

Anmerkungen und Nachträge 316

Berichtigungen 325

I. Abschnitt.

Analytische Theorie der complexen Zahlen.

1. Complexe Zahlensysteme mit zwei Einheiten.

Da die Gleichung $x^2 = -1$ keine reelle Wurzel hat, so sucht man ihr durch Erweiterung des Systemes der reellen Zahlen Auflösungen zu verschaffen. In der allgemeinen Arithmetik ist dabei so vorzugehen, dafs sämmtliche Regeln über das Rechnen mit den reellen Zahlen auch für die neuen Zahlen Giltigkeit erhalten. Es ist, wie sich sofort zeigen wird, in der That möglich, diese Forderung zu erfüllen und zwar nur auf eine Weise.

Um zu den neuen Zahlen zu gelangen, fügen wir zu den Einheiten $+1$ und -1 eine weitere, von jeder reellen Zahl verschiedene Einheit i und ihre Gegeneinheit $-i$, deren jede, wie die beiden ersteren, in irgend eine Anzahl von Untereinheiten zerlegt werden kann. Wir wollen jedoch, um die Untersuchung allgemeiner zu halten, von zwei willkürlichen Einheiten (oder Elementen) e_1 e_2 ausgehen[1]), deren jeder wir alle möglichen Untereinheiten, sowie eine Gegeneinheit und ihre Untereinheiten zugesellen. Die Gegeneinheiten werden mit $-e_1$, $-e_2$ bezeichnet. Ist ϱ eine positive rationale Zahl, so bedeute ϱe_1 die ihr entsprechende Vielheit von e_1 oder von einer Untereinheit von e_1. Auch wenn ϱ eine positive irrationale Zahl (φ_n) ist, soll das Zeichen $(\varphi_n e_1)$ oder ϱe_1 eine Bedeutung haben. $\varrho(-e_1) = (-\varrho)e_1$ stehe in der nämlichen Beziehung zur Gegeneinheit $-e_1$, wie ϱe_1 zu e_1. $0e_1$ endlich sei soviel wie $e_1 + (-e_1)$ oder 0.

Daraus folgt, dafs $\alpha_1 e_1$, wo jetzt α_1 jede reelle Zahl sein kann, nur dann gleich 0 ist, wenn $\alpha_1 = 0$ ist. Das Zeichen $\alpha_1 e_1$ ist natürlich nicht als Product des Coefficienten α_1 in die Einheit e_1 aufzufassen. Aufserdem setzen wir noch die folgenden Erklärungen fest:

$$\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_1 = (\alpha_1 + \beta_1) e_1, \quad \beta_1(\alpha_1 e_1) = (\beta_1 \alpha_1) e_1;$$

erstere mit dem besonderen Falle $(-\alpha_1) e_1 = -\alpha_1 e_1$. Hinsichtlich der Bezeichnungen $(\pm \varrho) e_2$, $\alpha_2 e_2$ gelte Aehnliches.

Jedem Systeme aus je einer Zahl $\alpha_1 e_1$ der ersten und je einer $\alpha_2 e_2$ der zweiten Reihe ordnen wir ein neues Ding zu, das eine complexe Zahl genannt und mit $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ oder $\alpha_2 e_2 + \alpha_1 e_1$ bezeichnet wird. $\alpha_1 \alpha_2$ heifsen ihre Coordinaten. Zur Vergleichung der neuen Zahlen unter einander stellen wir die folgenden Definitionen auf:

„1) Es ist

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

dann und nur dann, wenn $\alpha_1 = \beta_1$ $\alpha_2 = \beta_2$ ist. Insbesondere ist

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$$

dann und nur dann, wenn $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ ist. 2) $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ heifst gröfser (kleiner) als $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$, wenn α_1 gröfser (kleiner) als β_1 und falls $\alpha_1 = \beta_1$, wenn α_2 gröfser (kleiner) als β_2 ist.“

Dafs sie den in I. 2, 3 d. I. T. verzeichneten Forderungen genügen, springt in die Augen. In der That hat man, wenn

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 > \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2, \quad \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 > \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$$

ist, entweder $\alpha_1 > \beta_1$ $\beta_1 \geqq \gamma_1$, also $\alpha_1 > \gamma_1$ oder $\alpha_1 = \beta_1$ $\beta_1 > \gamma_1$ also wieder $\alpha_1 > \gamma_1$ oder endlich neben $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$ $\alpha_2 > \beta_2$ $\beta_2 > \gamma_2$ also $\alpha_2 > \gamma_2$, sodafs in jedem Falle sich ergiebt

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 > \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2.$$

Wir werden nun versuchen, die Summe und das Product der neuen Zahlen so zu definiren, dafs die für die Addition und Multiplication der reellen Zahlen geltenden formalen Gesetze bestehen bleiben. — Im Folgenden werden in der Regel die griechischen Buchstaben reelle, die lateinischen (neben natürlichen Zahlen, insbesondere als Indices) complexe Zahlen bedeuten.

2. Als Summe der complexen Zahlen

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

betrachten wir die Zahl

$$(\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 .$$

Dann bestehen, wie leicht ersichtlich ist, die zuletzt in VII, 6 d. I. T. aufgeführten Additionsregeln auch hier. Man hat also die Sätze:

1) $a + b = b + a$;

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3) Neben $a = a'$ ist $a + b = a' + b$.

4) Neben $a > a'$ ist $a + b > a' + b$. — Der letzte Satz folgt daraus, dafs wenn $a' = \alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2$ ist, neben $\alpha_1 > \alpha_1'$ $\alpha_1 + \beta_1 > \alpha_1' + \beta_1$ und neben $\alpha_1 = \alpha_1'$, $\alpha_2 > \alpha_2'$

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1' + \beta_1, \quad \alpha_2 + \beta_2 > \alpha_2' + \beta_2$$

sein mufs.

Die Subtraction der complexen Zahlen ist stets möglich und eindeutig. Der Gleichung

$$b + x = a$$

genügt nämlich die Zahl $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ dann und nur dann, wenn

$$\beta_1 + \xi_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 + \xi_2 = \alpha_2,$$

also

$$\xi_1 = \alpha - \beta_1, \quad \xi_2 = \alpha_2 - \beta_2$$

ist. — Die Zahl

$$\begin{aligned} 0 - a &= (-\alpha_1) e_1 + (-\alpha_2) e_2 \\ &= (-\alpha_1 e_1) + (-\alpha_2 e_2) = -\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 \end{aligned}$$

wird mit $-a$ bezeichnet und heifst „a entgegengesetzt“ oder „Gegenzahl zu a“.

Bedeutet ϱa diejenige complexe Zahl, welche aus a so abgeleitet ist, wie die positive rationale Zahl ϱ aus $+1$, so findet man nach dem Vorstehenden leicht, dafs

$$\varrho a = (\varrho \alpha_1) e_1 + (\varrho \alpha_2) e_2$$

ist. Verstehen wir unter ϱ eine andere reelle Zahl, so möge diese Gleichung zur Erklärung von ϱa dienen. Hieraus erkennt man, dafs ϱa nur dann 0 ist, wenn $\varrho = 0$ ist.

Ferner ergiebt sich, wenn $\sigma\ \varrho_1\ \varrho_2 \cdots \varrho_m$ reelle Zahlen bedeuten, zunächst, dafs

$$\varrho a + \sigma a = (\varrho + \sigma) a$$

ist, und hieraus, dafs

$$\varrho_1 a + \varrho_2 a + \cdots + \varrho_m a = (\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m) a$$

ist. Auf ähnliche Art weist man nach, dafs

$$\varrho(a + b) = \varrho a + \varrho b$$
$$\varrho(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) = \varrho a_1 + \varrho a_2 + \cdots + \varrho a_m$$

ist. Endlich hat man den Satz: „Ist ϱ eine positive reelle Zahl und $a > a'$, so ist $\varrho a > \varrho a'$," welcher unmittelbar aus dem besonderen Falle, dafs $a' = 0$ ist, folgt. Ist nämlich $a > 0$, so ist entweder $\alpha_1 > 0$ oder $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 > 0$, also bezw. $\varrho\alpha_1 > 0$ oder $\varrho\alpha_1 = 0$, $\varrho\alpha_2 > 0$, somit ist immer $\varrho\alpha > 0$.

Zwischen den Einheiten $e_1\ e_2$ besteht keine lineare Gleichung; denn jede solche kann auf die Form $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 = 0$ gebracht werden, woraus sich lediglich $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ergiebt. Dieser Satz gestattet in gewissem Sinne eine Umkehrung. Wenn über die Einheiten $e_1\ e_2$ die bisherigen Annahmen gemacht sind, so lassen sie sich durch jedes Paar von Zahlen $a\ b$ ersetzen, zwischen denen keine Gleichung von der Form

$$\alpha a + \beta b = 0$$

besteht, oder was dasselbe besagt, deren Determinante

$$\delta = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$$

von Null verschieden ist. Unter dieser Voraussetzung findet man nämlich aus den Gleichungen

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$
$$\left(\frac{\beta_2}{\delta}\right) a - \left(\frac{\alpha_2}{\delta}\right) b = e_1, \quad \left(\frac{\alpha_1}{\delta}\right) b - \left(\frac{\beta_1}{\delta}\right) a = e_2,$$

sodafs man jeder Zahl $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ die Gestalt $\xi a + \eta b$ ertheilen kann.

3. Multiplication der complexen Zahlen mit zwei Einheiten.

Wir setzen zunächst fest, dafs die Einheitsproducte

$$e_1 \cdot e_1 \quad e_1 \cdot e_2 \quad e_2 \cdot e_1 \quad e_2 \cdot e_2$$

hlen des Systemes $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ sein sollen. Mittelst der-
ben erklären wir dann die nachstehenden Producte

$$\begin{aligned}(\alpha_1 e_1)\cdot(\beta_2 e_1) &= (\alpha_1\beta_1)(e_1\cdot e_1)\\ (\alpha_1 e_1)\cdot(\beta_2 e_2) &= (\alpha_1\beta_2)(e_1\cdot e_2)\\ (\alpha_2 e_2)\cdot(\beta_1 e_1) &= (\alpha_2\beta_1)(e_2\cdot e_1)\\ (\alpha_2 e_2)\cdot(\beta_1 e_2) &= (\alpha_2\beta_2)(e_2\cdot e_2).\end{aligned} \tag{1}$$

dlich werde zufolge des distributiven Gesetzes festgesetzt,
fs

$$\begin{aligned}e_2 + \alpha_2 e_2)\cdot(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) &= (\alpha_1 e_1)\cdot(\beta_1 e_1)\\ &+ (\alpha_1 e_1)\cdot(\beta_2 e_2) + (\alpha_2 e_2)\cdot(\beta_1 e_1) + (\alpha_2 e_2)\cdot(\beta_2 e_2)\\ &= (\alpha_1\beta_1)(e_1\cdot e_1) + (\alpha_1\beta_2)(e_1\cdot e_2) + (\alpha_2\beta_1)(e_2\cdot e_1)\\ &\qquad + (\alpha_2\beta_2)(e_2\cdot e_2)\end{aligned} \tag{2}$$

. Damit haben wir erreicht, dafs das Product von je zwei
hlen des neuen Systemes auch eine Zahl desselben ist.

Aus (1) und (2) folgt zunächst die Regel

$$(\varrho a)\cdot(\sigma b) = (\varrho\sigma)(a\cdot b),$$

rin ϱ σ reelle Zahlen bedeuten; ferner die beiden Formeln
s distributiven Gesetzes

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \qquad a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c,$$

ter a b c beliebige Zahlen des neuen Systemes verstanden.

Sollen auch das associative und commutative Gesetz
i dieser Multiplication allgemein gelten, so müssen die
rmeln

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) \qquad a\cdot b = b\cdot a$$

stehen. Die Einheitsproducte $e_r\cdot e_s$ sind demnach so zu
hlen, dafs für die Einheiten die soeben erwähnten Rela-
nen erfüllt sind, was, wie leicht ersichtlich ist (vgl. Nr. 9),
ch hinreichend ist. Wir nehmen mithin an, dafs

$$e_1\cdot e_2 = e_2\cdot e_1 \tag{3}$$

d

$$\begin{aligned}(e_1\cdot e_1)\cdot e_2 &= e_1\cdot(e_1\cdot e_2)\\ (e_2\cdot e_2)\cdot e_1 &= e_2\cdot(e_2\cdot e_1)\end{aligned} \tag{4}$$

, woraus die sechs weiteren Gleichungen des associativen
setzes für e_1 e_2 von selbst folgen (s. Nr. 9). Setzt man

$$\begin{aligned}e_1\cdot e_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \qquad e_2\cdot e_2 &= \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2\\ e_1\cdot e_2 = e_2\cdot e_1 &= \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2,\end{aligned} \tag{5}$$

so erhält man durch Gleichsetzung der Coefficienten von e_1 und e_2 auf beiden Seiten der Gleichungen (4) die Relationen

$$\mu_1\mu_2 = \lambda_2\nu_1 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\mu_2(\lambda_1 - \mu_2) &= \lambda_2(\mu_1 - \nu_2)\\ \nu_1(\lambda_1 - \mu_2) &= \mu_1(\mu_1 - \nu_2),\end{aligned} \tag{7}$$

deren erste eine Folge der beiden letzteren ist, falls nicht $\lambda_1 - \mu_2$ $\mu_1 - \nu_2$ beide 0 sind. Es mufs dann die Determinante derselben $\mu_1\mu_2 - \lambda_2\nu_1$ verschwinden. Wenn $\mu_2 = \lambda_1$ $\mu_1 = \nu_1$ ist, so bleibt Gleichung (6).

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (7) mit μ_1, so ergiebt sich mittelst (6)

$$\lambda_2(\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2) = -\mu_1(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2). \tag{8}$$

Mit Hilfe der nämlichen Gleichungen, welche Ausdrücke für $\lambda_2\nu_1$ und $\lambda_2\nu_2$ liefern, findet man noch

$$\lambda_2(\nu_1\lambda_2 - \lambda_1\nu_2) = (\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2). \tag{9}$$

Zunächst zeigen wir den Satz: „Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dafs in dem Zahlensysteme aus den zwei Elementen e_1 e_2 ein und nur ein Modulus e der Multiplication — d. h. eine Zahl e von der Art, dafs was immer auch a sein mag, stets die Gleichung

$$a \cdot e = e \cdot a = a$$

gilt — vorhanden sei, besteht darin, dafs mindestens eine der Determinanten

$$\begin{aligned}\Lambda &= \mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2 \qquad \mathsf{M} = \nu_1\lambda_2 - \lambda_1\nu_2\\ \mathsf{N} &= \lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2\end{aligned} \tag{10}$$

nicht Null ist."

Beweis. Es sei

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \qquad e = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2.$$

Entwickelt man $a \cdot e$ mit Hilfe der Formeln (1) (2) (5) und setzt es gleich a, so folgt nothwendig

$$\begin{aligned}\alpha_1(\lambda_1\varepsilon_1 + \mu_1\varepsilon_2) + \alpha_2(\mu_1\varepsilon_1 + \nu_1\varepsilon_2) &= \alpha_1\\ \alpha_1(\lambda_2\varepsilon_1 + \mu_2\varepsilon_2) + \alpha_2(\mu_2\varepsilon_1 + \nu_2\varepsilon_2) &= \alpha_2.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sollen für jedes System von reellen Werthen α_1 α_2 gelten; demnach mufs nach X. 28 d. I. T.

$$\begin{aligned}\lambda_1\varepsilon_1 + \mu_1\varepsilon_2 &= 1 \qquad \mu_1\varepsilon_1 + \nu_1\varepsilon_2 = 0\\ \lambda_2\varepsilon_1 + \mu_2\varepsilon_2 &= 0 \qquad \mu_2\varepsilon_1 + \nu_2\varepsilon_2 = 1\end{aligned} \tag{11}$$

sein. Aus den beiden Gleichungen links folgt

$$\mathsf{N}\varepsilon_1 = \mu_2 \qquad \mathsf{N}\varepsilon_2 = -\lambda_2 .$$

Wenn N nicht 0 ist, so genügen ihnen nur die Werthe

$$\varepsilon_1 = \mu_2 : \mathsf{N} \qquad \varepsilon_2 = -\lambda_2 : \mathsf{N},$$

welche auch die beiden Gleichungen rechts zufolge (6) und (7) erfüllen. In diesem Falle existirt also ein Modulus der Multiplication. Ist $\mathsf{N} = 0$, so widersprechen sich die Gleichungen links in (11), es sei denn $\lambda_2 = \mu_2 = 0$. Wenn aber neben $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ entweder $\mu_1 \nu_2$ nicht Null oder

$$\mu_1 = \nu_1 = 0 \qquad \lambda_1 \nu_2 \gtrless 0$$

ist, so ist gleichfalls der genannte Modulus vorhanden. In allen anderen Fällen giebt es keinen solchen.

Wenn mindestens einer der Ausdrücke (10) nicht Null ist, so hat die Multiplication einen Modulus. Das gilt hinsichtlich Λ ebenso, wie hinsichtlich N. Wenn M und λ_2 nicht Null sind, so ist nach (9) auch N nicht Null. Sollte aber $\mathsf{M} \gtrless 0$ und $\lambda_2 = 0$ sein, so darf $\nu_2 \lambda_1$ nicht Null sein. Ist nun μ_2 nicht Null, so auch N nicht. Wenn aber $\mu_2 = 0$ ist, so existirt, wie gerade bemerkt wurde, ein Modulus e. — Bei Fehlen einer solchen Zahl e sind die Ausdrücke (10) sämmtlich Null. Das ergiebt sich aus (8) und (9) sofort, wenn $\mathsf{N} = 0$ und λ_2 nicht 0 ist. Ist $\lambda_2 = 0$, so hat man wegen $\mathsf{N} = 0$ stets $\mu_2 = 0$; denn $\lambda_1 = 0$ liefert jetzt nach der ersten Gleichung (7) $\mu_2^2 = 0$. Wenn aber $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ ist, so mufs nach dem Vorstehenden $\mu_1 \nu_2 = 0$ d. i. $\Lambda = 0$ und nach der zweiten Gleichung (7) $\nu_1 \lambda_1 = \mu_1^2$ sein. Daraus folgt weiter $\nu_2 = 0$ oder $\mu_1 = 0$ $\lambda_1 = 0$, also jedenfalls $\mathsf{M} = 0$.

4. Zahlensysteme mit zwei Einheiten, die eine distributive, associative und commutative Multiplication ohne Modulus zulassen.

Es giebt davon drei verschiedene Arten, welche durch die folgenden Einheitsproducte charakterisirt sind:

$$\begin{aligned}
&e_1 \cdot e_1 = 0 \qquad e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0 \qquad e_2 \cdot e_2 = 0 \qquad \text{(I)}\\
&e_1 \cdot e_1 = e_1 \qquad e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0 \qquad e_2 \cdot e_2 = 0 \qquad \text{(II)}\\
&e_1 \cdot e_1 = e_2 \qquad e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0 \qquad e_2 \cdot e_2 = 0 . \qquad \text{(III)}
\end{aligned}$$

Zu diesem Resultat gelangt man durch Einführung neuer Elemente anstatt $e_1 e_2$. Wenn λ_2 nicht 0 ist, so liefern die Gleichungen $\mathsf{M} = 0$ $\mathsf{N} = 0$

$$\lambda_1 = \varrho \lambda_2 \qquad \mu_1 = \varrho \mu_2 \qquad \nu_1 = \varrho \nu_2 ,$$

wo ϱ jede reelle Zahl sein kann. Demnach hat man nach (5)

$$e_1 \cdot e_1 = \lambda_2(\varrho e_1 + e_2) \qquad e_1 \cdot e_2 = \mu_2(\varrho e_1 + e_2)$$
$$e_2 \cdot e_2 = \nu_2(\varrho e_1 + e_2).$$

Dabei mufs nach (6) $\mu_2^2 = \lambda_2 \nu_2$ sein. Nun führen wir die neuen Einheiten

$$e_1' = \xi(\varrho e_1 + e_2) \qquad e_2' = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2$$

ein, indem wir uns die Bestimmung von $\xi\ \eta_1\ \eta_2$ vorbehalten. Es ist

$$e_1' \cdot e_1' = \left[\frac{\xi}{\lambda_2}(\lambda_2\varrho + \mu_2)^2\right] e_1' \qquad e_2' \cdot e_2' = \left[\frac{1}{\lambda_2 \xi}(\lambda_2\eta_1 + \mu_2\eta_2)^2\right] e_1'$$
$$e_1' \cdot e_2' = \left[\left(\eta_1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\eta_2\right)(\lambda_2\varrho + \mu_2)\right] e_1'.$$

Zunächst setzen wir

$$\eta_1 = -\frac{\mu_2 \eta_2}{\lambda_2},$$

sodafs wir $e_1' \cdot e_2' = 0$ $e_2' \cdot e_2' = 0$ erhalten. Wenn $\lambda_2\varrho + \mu_2$ nicht Null ist, so darf man

$$\xi = \frac{\lambda_2}{(\lambda_2\varrho + \mu)^2}$$

annehmen, wodurch $e_1' \cdot e_1' = e_1'$ wird. Wir sind somit zu System (II) gelangt; während die Annahme $\lambda_2\varrho + \mu_2 = 0$ (d. i. $\mu_2 = -\varrho\lambda_2$, $\nu_2 = \varrho^2\lambda_2$) auf (I) führt.

Aehnlich verfährt man in den beiden anderen Fällen, dafs

$$\lambda_2 = 0 \qquad \mu_2 = 0 \qquad \nu_2 = 0$$

oder

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 0 \qquad \mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = 0.$$

5. Zahlensysteme mit zwei Einheiten, welche eine distributive, associative, commutative Multiplication mit Modulus zulassen.

Indem wir jetzt den Modulus

$$e = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2$$

als vorhanden ansehen, so dürfen wir ihn, da $\varepsilon_1\ \varepsilon_2$ nicht zugleich 0 sein können, als das eine Element wählen. Bezeichnen wir das andere mit g, so nehmen die Einheitsproducte die folgende Form an

$$e \cdot e = e \qquad e \cdot g = g \cdot e = g \qquad g \cdot g = \mu e + \nu g.$$

Das Quadrat der zunächst beliebigen Zahl

$$a = \alpha e + \beta g,$$

wo nur β nicht 0 sein soll, ist

$$a \cdot a = (\alpha^2 + \mu\beta^2)e + [\beta(2\alpha + \beta\nu)]g.$$

ehmen wir

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\beta\nu,$$

› reducirt sich $a \cdot a$ auf die Einheit e:

$$a \cdot a = \beta^2\left(\frac{\nu^2}{4} + \mu\right)e. \qquad (11)$$

un sind drei Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn $\frac{\nu^2}{4} + \mu > 0$ ist, so kann man β so an-

ehmen, dafs

$$\beta^2\left(\frac{\nu^2}{4} + \mu\right) = 1.$$

etrachtet man also als zweite Einheit die Zahl

$$a = \frac{\pm(\frac{1}{2}\nu e - g)}{\sqrt{\frac{\nu^2}{4} + \mu}},$$

› erscheinen die Einheitsproducte

$$e \cdot e = e \qquad e \cdot a = a \cdot e = a \qquad a \cdot a = e.$$

emnach ist

$$e \cdot e - a \cdot a = 0 \quad \text{d. i.} \quad (e - a) \cdot (e + a) = 0.$$

Es giebt somit zwei Zahlen $e - a$, $e + a$ — beide on 0 verschieden —, deren Product gleichwohl 0 st. — Als definitive Einheiten wählt man die Zahlen

$$j_1 = \frac{e + a}{2} \qquad j_2 = \frac{e - a}{2},$$

ofür man erhält

$$j_1 \cdot j_1 = j_1 \qquad j_1 \cdot j_2 = j_2 \cdot j_1 = 0 \qquad j_2 \cdot j_2 = j_2. \qquad \text{(IV)}$$

unmehr ergiebt sich als Multiplicationsregel die Formel

$$(\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2) \cdot (\beta_1 j_1 + \beta_2 j_2) = (\alpha_1\beta_1)j_1 + (\alpha_2\beta_2)j_2. \qquad (12)$$

odulus ist jetzt die Zahl $j_1 + j_2$. Die Gleichung

$$b \cdot x = x \cdot b = a$$

. i.

$$(\beta_1 j_1 + \beta_2 j_2)(\xi_1 j_1 + \xi_2 j_2) = \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2$$

at eine und nur eine Lösung, wenn ξ_1 ξ_2 sich so bestim-

en lassen, dafs

$$\beta_1\xi_1 = \alpha_1 \qquad \beta_2\xi_2 = \alpha_2$$

ist, also stets wenn nicht $\beta_1 = 0$ und α_1 von 0 verschieden oder $\beta_2 = 0$ und α_2 von Null verschieden ist. Ist $\beta_1 = 0$ und $\alpha_1 \gtrless 0$ oder $\beta_2 = 0$ und $\alpha_2 \gtrless 0$, so ist die Division unmöglich. Die Gleichung

$$x^2 = \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2$$

hat nur dann Wurzeln, wenn keine der Coordinaten α_1 α_2 negativ ist, was sich aus der Formel

$$x^2 = (\xi_1 j_1 + \xi_2 j_2)^2 = \xi_1^2 j_1 + \xi_2^2 j_2$$

sofort ergiebt. Sind α_1 und α_2 positiv, so hat sie die vier Wurzeln

$$x = (\pm\sqrt{\alpha_1}) j_1 + (\pm\sqrt{\alpha_2}) j_2 .$$

Man hätte auch ohne die vorhergehende Untersuchung auf das Zahlensystem mit den Einheiten $j_1 j_2$ kommen können; es entsteht ja einfach durch zweimalige Setzung des Systemes der reellen Zahlen. Von Interesse ist lediglich, dafs die bisher gemachten Annahmen nur auf dieses triviale System führen.

2) Wenn $\frac{\nu^2}{4} + \mu = 0$ ist, so hat die Gleichung $x^2 = 0$ zufolge (11) unzählige Wurzeln, die nicht Null sind. Wählt man eine solche

$$\beta\left(-\tfrac{\nu}{2} e + g\right) = j$$

als zweite Einheit, so ergeben sich die Einheitsproducte

$$e \cdot e = e \qquad e \cdot j = j \cdot e = j \qquad j \cdot j = 0 . \tag{V}$$

Die Multiplicationsregel lautet jetzt

$$(\alpha e + \beta j) \cdot (\alpha' e + \beta' j) = (\alpha\alpha') e + (\alpha\beta' + \beta\alpha') j . \tag{13}$$

Die Division durch die Zahlen βj ist demnach im Allgemeinen unmöglich und die Gleichung $x^2 = -\alpha e (\alpha > 0)$ hat keine Wurzel.

3) Wenn $\frac{\nu^2}{4} + \mu < 0$ ist, so kann man β in (11) so annehmen, dafs

$$\beta^2\left(\tfrac{\nu^2}{4} + \mu\right) = -1$$

ist. Führt man eine der Quadratwurzeln aus $-e$

$$i = \frac{\pm\,(\frac{1}{2}\nu e - g)}{\sqrt{-\frac{1}{4}\nu^2 - \mu}}$$

als zweite Einheit ein, so gelangt man zu den Einheitsproducten

$$e \cdot e = e \qquad e \cdot i = i \cdot e = i \qquad i \cdot i = -e \tag{VI}$$

und damit zur Formel

$$\begin{aligned}&(\alpha e + \beta i) \cdot (\alpha' e + \beta' i)\\ &= (\alpha\alpha' - \beta\beta')e + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i.\end{aligned} \tag{14}$$

Daraus ergeben sich sofort die folgenden Sätze.

a) Wenn der Divisor nicht Null ist, so läfst sich die Division stets ausführen und zwar in einer einzigen Weise. Wenn nämlich zu den Zahlen

$$\alpha e + \beta i, \quad \gamma e + \delta i$$

eine dritte $\xi e + \eta i$ zu suchen ist, so beschaffen dafs

$$(\gamma e + \delta i) \cdot (\xi e + \eta i) = \alpha e + \beta i$$

ist, so müssen ξ η nach (14) den Gleichungen

$$\gamma\xi - \delta\eta = \alpha \qquad \delta\xi + \gamma\eta = \beta \tag{15}$$

genügen. Man hat also

$$(\gamma^2 + \delta^2)\xi = \alpha\gamma + \beta\delta \qquad (\gamma^2 + \delta^2)\eta = \beta\gamma - \alpha\delta,$$

woraus ersichtlich ist, dafs falls $\gamma e + \delta i$ nicht Null, also $\gamma^2 + \delta^2 > 0$ ist, ξ η bestimmte Werthe besitzen.

b) Wenn das Product zweier Zahlen Null ist, so mufs eine davon Null sein. Denn ist in den Gleichungen (15) $\alpha = \beta = 0$ und wird $\gamma e + \delta i$ von Null verschieden vorausgesetzt, so folgt daraus

$$\xi = 0 \quad \eta = 0 \quad \text{d. i.} \quad \xi e + \eta i = 0.$$

Wir haben somit drei wesentlich verschiedene Zahlensysteme mit zwei Einheiten kennen gelernt, die eine Multiplication von den angegebenen Eigenschaften zulassen. Sie mögen der Reihe nach als hyperbolisches, parabolisches, elliptisches System bezeichnet werden. Nur das letzte hat die Eigenschaft, dafs für das Rechnen mit den Zahlen desselben genau dieselben Regeln gelten, wie in der Arithmetik der reellen Zahlen.

Der Ungleichung 5) in VII. 8 d. I. T. entspricht hier der Satz: „Ist ϱ eine positive reelle Zahl und es besteht unter den complexen

Zahlen aa' die Relation $a > a'$, so hat man $\varrho e \,.\, a > \varrho e \,.\, a'$ — welcher mit einem Satze in Nr. 2 zusammenfällt.

Uebrigens läfst sich auch direct leicht beweisen der Satz: „Wenn in einem Zahlensystem mit den Elementen e i, wovon e der Modulus der Multiplication und $i = \sqrt{-e}$ ist, das Product nach der Formel (2) bezw. (14) zu bilden ist, so mufs das System nothwendig das elliptische sein.

Die Zahlen eines jeden der drei Systeme lassen sich geometrisch darstellen. Construirt man in der Ebene den Punkt mit den Parallelcoordinaten α_1 α_2, so wird er selbst oder die ihn mit dem Anfangspunkte der Coordinaten verbindende Strecke ihrer Gröfse und Lage nach als Repräsentant der Zahl $\alpha e_1 + \alpha_2 e_2$ betrachtet. Auf diese Weise kann man auch die Resultate der vier Rechnungsarten geometrisch deuten. Die Darstellung der Summe und Differenz ist in allen Systemen dieselbe (vgl. II. 3), die des Productes und Quotienten fällt natürlich verschieden aus.

6. Die gemeinen complexen Zahlen.

Bezeichnet man den Modulus e des elliptischen Systemes mit 1, so hat man $i \cdot i = -1$; i ist somit eine Wurzel der Gleichung $x^2 = -1$. Da

$$x^2 + 1 = (x - i) \cdot (x + i)$$

nur dadurch Null werden kann, dafs ein Factor Null wird, so hat diese Gleichung nur noch die Wurzel $x = -i$.

Die Zahlen mit diesen Einheiten 1 und i heifsen gemeine complexe oder schlechtweg complexe Zahlen; i heifst die imaginäre, auch laterale Einheit, die Zahlen βi imaginäre Zahlen. Von der complexen Zahl $\alpha + \beta i$ heifst α der reelle, βi der imaginäre Theil. Man bezeichnet den letzteren als positiv, Null oder negativ, je nachdem β positiv, Null oder negativ ist, was mit der in Nr. 1 durch die 2. Definition festgesetzten Vergleichung einer Zahl βi mit 0 im Einklange steht.

Die gemeinen complexen Zahlen, welche unter sich als besondere Fälle die reellen und imaginären Zahlen enthalten, sind die einzige Zahlenart, welche in der allgemeinen Arithmetik berücksichtigt zu werden braucht. Es läfst sich nämlich zeigen, dafs es aufser ihnen kein System von Zahlen giebt, mit denen genau in derselben Weise gerechnet werden

kann, wie mit den reellen. Durch diesen Satz haben wir auch auf dem formalen Wege die natürliche Begrenzung der allgemeinen Arithmetik gefunden, so dafs wenn uns später Gleichungen begegnen werden, welche durch keine gemeine complexe Zahl befriedigt werden, wir sie als unlösbar betrachten dürfen und an eine fernere Erweiterung des Zahlensystems nicht mehr zu denken brauchen.

7. Da für das Rechnen mit den gemeinen complexen Zahlen dieselben Regeln gelten wie für das mit den reellen Zahlen, so läfst sich auch hier der Begriff der Potenz, zunächst mit positivem ganzen Exponenten einführen und es werden die in VIII. 1 und 3 d. I. T. erwähnten Sätze auch dann bestehen, wenn die Basen der Potenzen complexe Zahlen sind.

Aus jeder complexen Zahl a läfst sich die Quadratwurzel ziehen; sie hat, wenn a nicht 0 ist, zwei entgegengesetzte Werthe. Setzt man nämlich

$$a = \alpha + \beta i = (\xi + \eta i)^2,$$

so ergeben sich nach (14) zur Bestimmung der reellen Zahlen ξ η die Gleichungen

$$\alpha = \xi^2 - \eta^2 \qquad \beta = 2\xi\eta,$$

woraus man schliefst

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = (\xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Somit ist

$$\xi^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha) \quad \eta^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha). \quad (16)$$

Beim Ziehen der Wurzel aus den rechten Seiten sind, falls β nicht 0 ist, solche Vorzeichen zu wählen, dass in der That $2\xi\eta = \beta$ ist, so dafs auch in diesem Falle nur zwei Werthsysteme ξ η möglich sind.

Hieraus ergiebt sich, dafs jede quadratische Gleichung

$$ax^2 + 2bx = -c \ (|a| > 0),$$

deren Discriminante $ac - b^2$ nicht Null ist, zwei ungleiche Wurzeln hat. Multiplicirt man nämlich die Gleichung mit a und addirt beiderseits b^2, so erhält man

$$(ax + b)^2 = b^2 - ac,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Wenn $b^2 - ac$ nicht Null ist, so hat die Quadratwurzel daraus, folglich auch x zwei Werthe. Ist $b^2 - ac = 0$, so läfst unsere Gleichung nur die eine Lösung $x = -b : a$ zu. Man nennt diese Wurzel wiederholt, weil der Ausdruck $ax^2 + 2bx + c$ in die Form

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2$$

gebracht werden kann (vgl. IV. 3).

Diejenigen höheren Wurzeln aus a, welche nicht auf Quadratwurzeln zurückführbar sind, lassen sich im Allgemeinen nicht so darstellen, wie die Quadratwurzeln.

Versucht man die Cubikwurzel aus a d. i. zwei reelle Zahlen $\xi\ \eta$ zu ermitteln, wofür

$$(\xi + \eta i)^3 = a = \alpha + \beta i$$

ist, so stöfst man auf die Gleichungen

$$\xi^3 - 3\xi\eta^2 = \alpha \qquad 3\xi^2\eta - \eta^3 = \beta. \tag{17}$$

Daraus ergiebt sich

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\xi^2 + \eta^2)^3.$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth von η^2 in die erste der Gleichungen (17) ein, so findet man

$$4\xi^3 - 3\varrho\xi = \alpha,$$

unter ϱ die reelle $\sqrt[3]{\alpha^2 + \beta^2}$ verstanden. In der Algebra wird gezeigt, dafs diese Gleichung nur reelle und zwar im Allgemeinen drei Wurzeln hat. Bisher ist es jedoch, besondere Werthe von $\alpha\ \beta$ z. B. $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ abgerechnet, nicht gelungen, für $\xi\ \eta$ endliche reelle algebraische Formeln zu erhalten. Die in Rede stehende Aufgabe führt auf den Casus irreducibilis der cubischen Gleichungen. $\xi\ \eta$ lassen sich aber durch unendliche Reihen reelle ausdrücken (vgl. VI. 6).

8. Absoluter Betrag einer complexen Zahl.

Der absolute Werth von $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ heifst absoluter Betrag der complexen Zahl $a = \alpha + \beta i$ und wird kurz mit $|a|$ bezeichnet. Dieser von Weierstrass[2]) vorgeschlagene Name für $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ drückt, da die Quadratwurzel im Falle $\beta = 0$ den absoluten Betrag der reellen Zahl α darstellt, eine naturgemässe Verallgemeinerung dieses Begriffes aus, was sich im Folgenden bestätigen wird, und ist dem Argand'schen[3]) „Modul von a" vorzuziehen.

Zunächst finden wir die in III. 14 d. I. T. für rationale Zahlen ausgesprochenen und später auf die reellen Zahlen

ausgedehnten Sätze wieder, auf die wir uns in der Folge häufig berufen werden.

1) „Der absolute Betrag der Summe von complexen Zahlen ist nicht gröfser als die Summe der absoluten Beträge derselben — und zwar ihr gleich dann und nur dann, wenn für je zwei der von 0 verschiedenen Addenden, $a = \alpha + \beta i$ und $a' = \alpha' + \beta' i$, die Relationen

$$\alpha' = \omega\alpha \quad \beta' = \omega\beta \quad (\omega > 0) \tag{18}$$

bestehen." — Es genügt offenbar, den Satz für ein Binom nachzuweisen. Man hat

$$|a + a'|^2 = (\alpha + \alpha')^2 + (\beta + \beta')^2$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha'^2 + \beta'^2) + 2(\alpha\alpha' + \beta\beta'),$$

worin

$$\alpha^2 + \beta^2 = |a|^2 \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 = |a'|^2$$

ist. Vermöge der bekannten Identität

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) = (\alpha\alpha' + \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2$$

hat man

$$(\alpha\alpha' + \beta\beta')^2 \leqq (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2),$$

also sicher

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' \leqq |a| \cdot |a'|$$

und somit

$$|a + a'|^2 \leqq \{|a| + |a'|\}^2, \text{ w. z. b. w.}$$

Das Zeichen $=$ steht hier dann und nur dann, wenn

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0 \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' \geq 0$$

d. i. wenn entweder $\alpha = \beta = 0$ oder die Bedingung (18) erfüllt ist.

2) „Wenn $|a| \geqq |a'|$ ist, so ist der absolute Betrag der Summe $a + a'$ nicht kleiner als die Differenz $|a| - |a'|$ und zwar ihr gleich, wenn die Zahlen a und $-a'$ den den Relationen (18) analogen genügen."

Da

$$a = (a + a') - a'$$

ist, so hat man nach einander

$$|a| \leqq |a + a'| + |a'| \qquad |a| - |a'| \leqq |a + a'|.$$

3) Der absolute Betrag eines Productes ist gleich dem Producte der absoluten Beträge seiner Fac-

toren. — Es genügt wieder die Betrachtung des Productes von zwei Factoren. Nach (14) ist

$$a \cdot a' = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i;$$

demnach hat man

$$|a \cdot a'|^2 = (\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' + \beta\alpha')^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2)$$

und somit

$$|a \cdot a'| = |a| \cdot |a'|.$$

Aus diesem Satze ergiebt sich unmittelbar:

4) „Der absolute Betrag eines Quotienten ist gleich dem Quotienten: absoluter Betrag des Dividends gebrochen durch den des Divisors."

Die vorstehenden Sätze lassen sich zu folgendem zusammenfassen:

5) „Bildet man aus reellen und complexen Zahlen a, a', a'' .... in endlicher Anzahl ein Aggregat von Monomen $F(a, a', a'' \ldots)$, so hat man stets

$$|F(a, a', a'' \ldots)| \leqq \Phi(|a|, |a'|, |a''| \ldots),$$

wo Φ den aus F dadurch hervorgehenden Ausdruck bedeutet, dafs das Zeichen $-$ überall durch $+$ ersetzt wird."

6) Wenn der absolute Betrag einer complexen Zahl $a = \alpha + \beta i$ kleiner ist als eine jede positive Zahl, so ist $a = 0$. — Denn die Annahme verträgt sich nicht damit, dafs auch nur eine der Zahlen $\alpha\beta$ von 0 verschieden ist. Der Satz giebt ein Mittel an die Hand, die Gleichheit von zwei complexen Zahlen zu erweisen; es folgt nämlich daraus

7) Wenn die Differenz zweier complexen Zahlen $a\,a'$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine jede positive Zahl, so ist $a = a'$.

9. Complexe Zahlen mit n Einheiten und distributiver, associativer, commutativer Multiplication.[4])

1. Def. Denkt man sich n Elemente $e_1\, e_2 \ldots e_n$ gegeben, aus deren jedem e_r ein Zahlensystem $\alpha_r e_r$ entspringt, so kann man jedem Systeme

$$\alpha_1 e_1, \quad \alpha_2 e_2 \ldots \quad \alpha_n e_n,$$

worin für $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ beliebige reelle Werthe gesetzt werden dürfen, ein neues Object zuordnen — die complexe Zahl

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n ,$$

wobei die Anordnung der einzelnen Glieder als unwesentlich zu betrachten ist. $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ heifsen die Coordinaten von a. — Auch in den Nr. 9—12 bedeuten die griechischen Buchstaben ausschliefslich reelle, die lateinischen complexe Zahlen.

2. Def. „Zwei complexe Zahlen a und

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n$$

sind dann und nur dann einander gleich, wenn

$$\alpha_1 = \beta_1 \quad \alpha_2 = \beta_2 \cdots \alpha_n = \beta_n$$

ist. Insbesondere ist a dann und nur dann 0, wenn

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \quad \cdots \quad \alpha_n = 0$$

ist.“

3. Def. „a heifst gröfser (kleiner) als b, wenn die erste von 0 verschiedene Differenz in der Reihe

$$\alpha_1 - \beta_1 \quad \alpha_2 - \beta_2 \cdots \alpha_n - \beta_n$$

einen positiven (negativen) Werth hat.“

Hierbei ist zu bemerken, dafs wenn man die Elemente in eine von $e_1\ e_2 \cdots e_n$ verschiedene Anordnung bringt und dann die vorstehende Regel noch einmal anwendet, die zwischen a und b auf dem ersten Wege hergestellte Ungleichung im Allgemeinen nicht bestehen bleiben wird.

4. Def. „Als Summe $a + b$ der Zahlen $a\ b$ erklären wir die Zahl

$$(\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)e_n .“$$

Unter diesen Voraussetzungen bestehen hinsichtlich der Addition und Subtraction dieselben Regeln, wie bei den reellen Zahlen.

5. Def. „Unter ϱa, worin ϱ eine beliebige reelle Zahl vorstellt, hat man die Zahl

$$(\varrho\alpha_1)e_1 + (\varrho\alpha_2)e_2 + \cdots + (\varrho\alpha_n)e_n$$

zu verstehen.“ — Daraus ergeben sich die Formeln

$$\varrho a + \sigma a = (\varrho + \sigma)a \qquad \varrho(a + b) = \varrho a + \varrho b \qquad \text{(a)}$$

Unter den n Einheiten $e_1\ e_2 \ldots e_n$ besteht keine lineare Gleichung; denn eine jede läfst sich auf die Form

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n = 0$$

bringen, woraus sich lediglich

$$\xi_1 = 0 \quad \xi_2 = 0 \ldots\ldots \xi_n = 0$$

ergiebt. Auch ist nunmehr ersichtlich, dafs je n Zahlen $a_1\ a_2 \cdot\cdot a_n$ des Systemes:

$$a_r = \alpha_{r,1} e_1 + \alpha_{r,2} e_2 + \cdots + \alpha_{r,n} e_n , \qquad (a^*)$$

welche so gewählt sind, dafs die Determinante

$$|\alpha_{r,s}| \quad (r, s = 1, 2 \ldots n)$$

nicht Null ist, als Elemente des Systemes betrachtet werden dürfen. Man kann nämlich die n Gleichungen (a^*) so nach den $e_1\ e_2 \ldots e_n$ auflösen, als wenn darin nur reelle Zahlen vorkommen würden.

Damit das in Rede stehende Zahlensystem in Beziehung auf die Multiplication geschlossen sei, setzen wir fest (6. Def.):

1) dafs jedes Einheitsproduct eine Zahl des Systemes sei

$$e_r \cdot e_s = \lambda_{r,s}^{(1)} e_1 + \lambda_{r,s}^{(2)} e_2 + \cdots + \lambda_{r,s}^{(n)} e_n ; \qquad (b)$$
$$(r, s = 1, 2 \ldots n)$$

und die beiden Formeln

$$2) \qquad (\alpha_r e_r \cdot \alpha_s e_s) = (\alpha_r \alpha_s)(e_r \cdot e_s) \qquad (c)$$

$$3) \quad a \,.\, b = \sum_{r,s} (\alpha_r \beta_s)(e_r \cdot e_s) \quad (r, s = 1, 2 \ldots n) \qquad (d)$$

d. h. um $a \cdot b$ zu bilden, hat man jeden Bestandtheil des Multiplicands a mit jedem des Multiplicators zu multipliciren und die so erhaltenen Producte zu addiren.

Aus (d) folgt mit Hilfe von (c) zunächst die Formel

$$\varrho a \,.\, \sigma b = (\varrho\sigma)(a \,.\, b), \qquad (e)$$

worin $\varrho\ \sigma$ reelle Zahlen bedeuten; ferner die beiden Seiten des distributiven Gesetzes d. i. die Relationen

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

unter c irgend eine dritte Zahl des Systemes

$$c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \cdots + \gamma_n e_n$$

erstanden. In der That ist z. B. das allgemeine Glied von
$a + b) \cdot c$

$$[(\alpha_r + \beta_r)\gamma_s]\,(e_r \cdot e_s) = (\alpha_r\gamma_s)\,(e_r \cdot e_s) + (\beta_r\gamma_s)\,(e_r \cdot e_s).$$

Aus der weiteren (7.) Annahme, dafs die Einheitsroducte commutativ seien d. i. dafs

$$e_r \cdot e_s = e_s \cdot e_r \quad (r, s = 1, 2 \ldots n \text{ und } r \gtrless s) \qquad (f)$$

ei, ergiebt sich nach (d) die Formel

$$a \cdot b = b \cdot a. \qquad (g)$$

Fügen wir (8) die Associativität der Einheitsproducte inzu d. h. setzen wir, soweit es noch nöthig ist, voraus dafs

$$(e_r \cdot e_s) \cdot e_t = e_r \cdot (e_s \cdot e_t) \quad (r, s, t = 1, 2 \ldots n) \qquad (h)$$

sei, so dürfen wir behaupten, dafs überhaupt

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

ist. Denn die allgemeinen Glieder von $(a\,.\,b)\,.\,c$ und $a\,.\,(b\,.\,c)$ sind nach (e) bezw.

$$[(\alpha_r\beta_s)\,(e_r \cdot e_s)] \cdot (\gamma_t e_t) = (\alpha_r\beta_s\gamma_t)\,[(e_r \cdot e_s) \cdot e_t]$$
$$(\alpha_r e_r) \cdot [(\beta_s\gamma_t)\,(e_s \cdot e_t)] = (\alpha_r\beta_s\gamma_t)\,[e_r \cdot (e_s \cdot e_t)],$$

erweisen sich mithin nach (h) als identisch.

Die Gleichungen (f) erfordern die Annahme

$$\lambda^{(t)}_{s,r} = \lambda^{(t)}_{r,s} \quad (r, s, t = 1, 2 \ldots n \text{ und } r \gtrless s).$$

Vermöge der Formel (g) sind von den Gleichungen (h) die olgenden erfüllt:

$$(e_r \cdot e_r) \cdot e_r = e_r \cdot (e_r \cdot e_r) \quad (e_r \cdot e_s) \cdot e_r = e_r \cdot (e_s \cdot e_r);$$
$$(r, s = 1, 2 \ldots n);$$

dere fallen mit einander zusammen. So ergiebt sich aus

$$(e_r \cdot e_r) \cdot e_s = e_r \cdot (e_r \cdot e_s) \quad e_s \cdot (e_r \cdot e_r) = (e_s \cdot e_r) \cdot e_r$$

nd wenn $r\ s\ t$ drei verschiedene unter den Nummern $1, 2 \ldots n$ ezeichnen, aus

$$(e_r \cdot e_s) \cdot e_t = (e_s \cdot e_t) \cdot e_r = (e_t \cdot e_s) \cdot e_r$$

lle sechs Gleichungen (h), in denen die Indices r, s, t neben nander vorkommen. Gelingt es den übrigen $\frac{1}{3}n(n^2 - 1)$ leichungen (h) durch schicklich gewählte Werthe der noch nbestimmten $\frac{1}{2}n^2(n + 1)$ Coefficienten in den Einheitspro-

ducten Rechnung zu tragen, so dürfen wir nach III. 2, 6 d. I. T. behaupten, dafs das Product der neuen Zahlen dem distributiven, associativen und commutativen Gesetze gehorche.

Dafs das in der That möglich ist, zeigt die Annahme

$$e_r \cdot e_r = e_r \qquad e_r \cdot e_s = 0 \quad (r \gtrless s),$$

wodurch nicht allein die Gleichungen (f), sondern auch (h) erfüllt sind. Man hat nämlich

$$(e_r \cdot e_r) \cdot e_s = 0 \qquad e_r \cdot (e_r \cdot e_s) = 0 \qquad (e_r \cdot e_s) \cdot e_t = 0 .$$

Unter diesen Voraussetzungen ergiebt sich die Multiplicationsregel

$$a \cdot b = \sum_1^n{}_r (\alpha_r \beta_r) e_r .$$

Die Multiplication hat einen Modulus, nämlich die Zahl

$$e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n ;$$

denn es ist bei beliebigem a

$$a \cdot e = e \cdot a = a .$$

10. Für jedes Zahlensystem mit mehr als zwei Einheiten, das die acht Forderungen der vorigen Nr. befriedigt, treffen einige, für die gemeinen complexen Zahlen geltende Sätze nicht mehr zu, oder erleiden mindestens weitere Ausnahmen.

Betrachten wir zunächst die Division der Zahlen $\sum \alpha_r e_r$[5]) d. h. untersuchen wir, ob es in unserem Systeme eine Zahl

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

giebt, welche die Gleichung $x \cdot b = b \cdot x = a$ befriedigt. Hierzu ist nach den Formeln (b) (d) nothwendig und hinreichend, dafs die $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_n$ den n linearen Gleichungen

$$\sum_1^n{}_r \xi_r \sum_1^n{}_s \beta_s \lambda_{r,s}^{(t)} = \alpha_t \quad (t = 1, 2 \ldots n)$$

genügen. Bekanntlich giebt es ein und nur ein System solcher Zahlen ξ_r, wenn die Determinante n^{ter} Ordnung

$$\lambda = \left| \sum_1^n{}_s \beta_s \lambda_{r,s}^{(t)} \right| (r, t = 1, 2 \ldots n) \qquad \text{(A)}$$

nicht Null ist. In diesem Falle ist also die Division möglich und eindeutig. Ist aber $\lambda = 0$, so ist sie nur dann ausführbar, wenn unter den $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ eine Relation besteht; es hat aber dann der Quotient $a : b$ unendlich viele Werthe.

Fügen wir zu den früheren Annahmen als neunte die, dafs λ nicht für jedes Werthsystem $\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n$ Null ist, so hat die Multiplication der Zahlen $\Sigma \alpha_r e_r$ einen und nur einen Modulus. Wählt man nämlich die Zahl b so, dafs λ nicht 0 ist, so giebt es nach dem Vorstehenden eine Zahl e, welche die Gleichung

$$b \cdot e = e \cdot b = b$$

befriedigt. Bezeichnet nun a eine beliebige, von Null verschiedene Zahl des Systemes und setzt man $a \cdot e = z$, so hat man

$$b \cdot z = a \cdot (b \cdot e) = a \cdot b,$$

also $z = a$, da diese Gleichung nur für einen Werth von z bestehen kann. Somit bleibt eine Zahl a bei Multiplication mit e ungeändert. Dieses Ergebnifs stimmt im Falle $n = 2$ mit dem Satze am Schlusse von Nr. 3 überein.

Fassen wir insbesondere die Gleichung $x \cdot b = 0$ ins Auge, so ist klar, dafs im Falle des identischen Verschwindens von λ zu jeder von Null verschiedenen Zahl b andere solche Zahlen x gehören, die ihr Genüge leisten. Es giebt somit von Null verschiedene Zahlen, deren Product Null ist. Dass das im Falle $n \geqq 3$ auch gelte, wenn λ nicht Null ist, läfst sich nach Hankel[6]) folgendermaafsen zeigen.

Denken wir uns in (*b*) r constant und $s = 1, 2 \ldots n$ gesetzt, so ergeben sich n Gleichungen, die wir so schreiben dürfen

$$\begin{aligned}
(\lambda_{r,1}^{(1)} e - e_r) \cdot e_1 + \lambda_{r,1}^{(2)} e_2 + \cdots + \lambda_{r,1}^{(n)} e_n &= 0 \\
\lambda_{r,2}^{(1)} e_1 + (\lambda_{r,2}^{(2)} e - e_r) \cdot e_2 + \cdots + \lambda_{r,2}^{(n)} e_n &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots

gehörigen Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so finden wir, wie bekannt, die Gleichung

$$E_r \cdot e_1 = 0 .$$

Denn abgesehen von der Division wird mit den neuen Zahlen so gerechnet, wie mit den gemeinen complexen. In $E_r \cdot e_1$ ist E_r entweder nicht Null oder Null. Im ersten Falle ist der Satz schon bewiesen, im zweiten zeigen wir ihn dadurch, dass wir wenigstens einen der n Ausdrücke E_r als Product nicht verschwindender Factoren darstellen.

Nehmen wir zunächst an, dafs im Systeme der Zahlen $\Sigma a_r e_r$ eine Zahl $j = \sqrt{-e}$ vorhanden sei. Das setzt voraus, dafs n gerade sei, denn in jedem Zahlensysteme von der angegebenen Beschaffenheit mit einer ungeraden Anzahl von Einheiten ist neben dem Modulus e der Multiplication $\sqrt{-e}$ unmöglich[7]). — E_r ist eine homogene ganze Function n^{ter} Dimension von $e\ e_r : F_r(e, e_r)$ mit reellen Coefficienten. Der Ausdruck $F_r(x, y)$, worin $x\ y$ gemeine complexe Zahlen bedeuten, läfst sich somit nach dem Fundamentalsatze der Algebra (IV. 9) als ein Product von n linearen Factoren $(\varrho + \sigma i)\, x - y$ darstellen. Ersetzen wir darin x, xi, y bezw. durch e, j, e_r, so erhalten wir eine Reihe von Zahlen $\varrho e + \varrho j - e_r$ des in Rede stehenden Systemes, deren Product E_r sein mufs. Nun darf man allerdings etwa

$$e_1 = \varrho_1 e + \sigma_1 j \qquad e_2 = \varrho_2 e + \sigma_2 j$$

setzen, wodurch man $E_1 = 0$ $E_2 = 0$ erhält; dann kann aber für $r \geqq 3$ kein Ausdruck $\varrho e + \sigma j - e_r$ Null sein. Also sind $E_3 \ldots E_n$ Producte aus von Null verschiedenen Factoren.

Ist $\sqrt{-e}$ in unserem Zahlensysteme nicht vorhanden, so betrachte man die Function $F_r(\xi, \eta)$, worin $\xi\ \eta$ reelle Zahlen seien und zerlege sie in Factoren erster und zweiter Dimension in $\xi\ \eta$ mit reellen Coefficienten, von denen die letzteren nicht mehr in Factoren erster Dimension aufgelöst werden können. Ersetzt man in ihnen allen $\xi\ \eta$ bezw. durch $e\ e_r$, so erkennt man, dafs sich möglicher Weise eine der Gleichungen $E_r = 0$ durch Nullsetzen eines linearen Factors $\varrho e - e_r$ befriedigen lässt, von den übrigen aber keine mehr.

Durch den soeben erwiesenen Satz beantwortete Hankel die Frage, deren Lösung Gauss versprochen[8]), aber nicht gegeben hat: „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Gröfsen liefern können.“

Schon seit 1861 hat Weierstrass ebenfalls die Ansicht

vorgetragen, dafs „Gauss diese Unzulässigkeit als dadurch begründet angesehen habe, dafs das Product zweier Grössen, sobald $n > 2$, verschwinden kann, ohne dafs einer seiner Factoren den Werth Null hat.“ Der Umstand, dafs die Arithmetik der complexen Zahlen mit mehr als zwei Einheiten von der der gemeinen complexen Zahlen wesentlich abweichen mufs, ist jedoch kein Grund, um dieselben als überflüssig zu erklären. Bezüglich der in Rede stehenden Gattung dieser Zahlen darf man das aber desswegen behaupten, weil solche Zahlensysteme, wie Weierstrass a. a. O. gezeigt hat, sich im Allgemeinen als eine selbstverständliche Verallgemeinerung der reellen und gemeinen complexen Zahlen darstellen lassen. Zu dieser Einsicht gelangt man, wie wir sehen werden, dadurch, dafs man die ursprünglichen Einheiten $e_1\ e_2 \ldots e_n$ durch zweckmäfsig gewählte neue ersetzt.

R. Dedekind[9]) schliefst sich der obigen Vermuthung hinsichtlich der Meinung von Gauss nicht an und erklärt die hier betrachteten complexen Zahlen aus einem anderen Grunde für überflüssig.

11. Einführung der neuen Elemente $g_0\ g_1 \cdots g_{n-1}$ für die complexen Zahlen von Nr. 9.

Es ist leicht, beliebig viele Zahlensysteme mit n Einheiten aufzufinden, welche den bisher aufgestellten neun Forderungen genügen, also auch einen und nur einen Modulus der Multiplication $e = g_0$ zulassen. Es sei g eine reelle oder gemeine complexe Zahl und Wurzel einer beliebigen algebraischen Gleichung n^{ten} Grades mit reellen Coefficienten

$$F(g) = g^n + \varepsilon_1 g^{n-1} + \cdots + \varepsilon_n = 0 \qquad \text{(i)}$$

ohne wiederholte Wurzeln. Schreibt man für $1\ g\ g^2 \cdots g^{n-1}$ bezw. $g_0\ g_1\ g_2 \cdots g_{n-1}$, so läfst sich, wie unmittelbar ersichtlich ist, jede ganze Function φ von g mit reellen Coefficienten als eine lineare homogene Function von $g_0\ g_1 \cdots g_{n-1}$ mit reellen Coefficienten darstellen:

$$\varphi(g) = \alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_{n-1} g_{n-1}.$$

Und zwar nur auf eine Art, denn die n Gleichungen

$$\varphi^{(k)} = \alpha_0 + \alpha_1 g^{(k)} + \cdots + \alpha_{n-1} g^{(k)\,n-1},\ (k = 0, 1 \ldots n-1),$$

worin $g, g' \ldots g^{(n-1)}$ die n von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung (i), $\varphi\, \varphi' \ldots \varphi^{(n-1)}$ die ihnen entsprechenden Werthe von $\varphi(g)$ bedeuten, lassen nur ein System von Auflösungen für die $\alpha_0\ \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ zu, weil die Determinante aus ihren Coefficienten nicht Null ist. Bilden wir nun complexe Zahlen aus n Elementen $g_0\ g_1 \ldots g_{n-1}$, so möge, wenn $r + s < n$ ist,

$$g_r \cdot g_s = g_s \cdot g_r = g_{r+s} \qquad \text{(k)}$$

sein. Falls $r + s$ einen der Werthe $n, n+1 \ldots 2n-2$ annimmt, wollen wir

$$g_r \cdot g_s = g_s \cdot g_r = \sum_0^{n-1} {}_t \mu^{(t)}_{r+s} g_t \qquad \text{(l)}$$

setzen, worin die rechte Seite den der Function g^{r+s} zufolge des Vorstehenden entsprechenden linearen Ausdruck darstellt. Wenn wir nun die der ganzen Function $\varphi(g)$ entsprechende complexe Zahl $a = \Sigma \alpha_r g_r$ mit einer andern $b = \Sigma \beta_s g_s$, welche der Function $\psi(g)$ zugeordnet ist, nach der Formel (c) multipliciren, so entspricht das Product $a \,.\, b$ der ganzen Function $\varphi(g)\psi(g)$. Es ist nämlich

$$a \,.\, b = \Sigma(\alpha_r \beta_s)(g_r \,.\, g_s) \qquad \varphi(g)\psi(g) = \Sigma \alpha_r \beta_s g^{r+s}.$$

Bezeichnen wir insbesondere die ganze Function vom höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade in g

$$\Phi(g) = \alpha_0 + \alpha_1 g + \cdot\cdot \alpha_{n-1} g^{n-1} \qquad \text{(m)}$$

als zur Zahl a gehörig und lassen demgemäfs zur Zahl (b) die Function $\Psi(g)$ gehören, so wird zur Zahl $a \,.\, b$ die Function $\mathrm{X}(g)$ gehören, welche bei der Division von $\Phi\Psi$ durch F als Rest verbleibt (IV. 2), so dafs man hat

$$\Phi(g)\ \Psi(g) = \Theta(g)\ F(g) + \mathrm{X}(g), \qquad \text{(n)}$$

worin $\Theta(g)$ höchstens vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade in g ist.

Definirt man die Einheitsproducte im Zahlensysteme $g_0\ g_1 \cdot\cdot g_{n-1}$ durch die Formeln (k) (l), so genügt dasselbe den bisher aufgestellten neun Forderungen. Dabei übernimmt g_0 die Rolle des Modulus der Multiplication. Dafs die Gleichungen

$$(g_r \cdot g_s) \cdot g_t = g_r \cdot (g_s \cdot g_t)$$

bestehen, erkennt man daraus, dafs sowohl die rechte als

die linke Seite einer jeden von ihnen bezw. der Function g^{r+s+t} entspricht. Auch ist die Determinante, in welche (A) jetzt übergeht, von Null verschieden; denn hat die ganze Function (m) mit $F(g)$ keinen Theiler gemein, so hat die Gleichung

$$a \,.\, x = a \,.\, b$$

nur die eine Lösung $x = b$. Hätte man nämlich noch $x = b'$, welcher Zahl die Function $\Psi'(g)$ entspreche, so würde neben (n)

$$\Phi\Psi' = \Theta' F + \mathsf{X} \quad \text{also} \quad \Phi(\Psi' - \Psi) = (\Theta' - \Theta)F$$

sein, was hier nur möglich ist für $\Psi = \Psi'\ \Theta = \Theta'$ (IV. 6).

Umgekehrt läfst sich zeigen, dafs wenn in einem Zahlensysteme von der hier betrachteten Beschaffenheit mit den Elementen g_0 (zugleich Modulus der Multiplication) $e_1\ e_2 \cdot\cdot e_{n-1}$ eine Zahl g vorhanden ist, wofür die nachstehende Determinante (B) nicht Null ist — was im Folgenden stets vorausgesetzt werden soll — im Allgemeinen eine der Gleichung (i) entsprechende angegeben werden kann, so dafs bei passender Abänderung der Elemente für die Producte derselben die Formeln (k) und (l) gelten. Man bilde von einer zunächst beliebigen Zahl

$$g = \xi_0\, g_0 + \xi_1 e_1 + \cdot\cdot + \xi_{n-1} e_{n-1}$$

die Potenzen

$$g^r = \xi_0^{(r-1)} g_0 + \xi_1^{(r-1)} e_1 + \cdot\cdot + \xi_{n-1}^{(r-1)} e_{n-1} \qquad (r = 2, 3 \ldots n-1). \tag{p}$$

Wenn nun die Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\mathsf{X}_0 = |\, \xi_s^{(r)} \,| \quad (r, s = 0, 1 \,..\, n-1) \tag{B}$$

nicht identisch verschwindet, so kann man g so wählen, dass man die vorstehenden $n-1$ Gleichungen nach $e_1\ e_2 \,..\, e_{n-1}$ auflösen, somit an Stelle der Einheiten $e_1\ e_2 \,..\, e_{n-1}$ die Zahlen

$$g_1 = g \quad g_2 = g^2 \ldots g_{n-1} = g^{n-1}$$

neben g_0 als Elemente des Systemes einführen kann. Die neuen Einheitsproducte ergeben sich mit Hilfe der Formel

$$g^r \cdot g^s = g_r \cdot g_s = g^{r+s},$$

welche für $r + s < n$ in (k) übergeht. Ist $r + s \geqq n$, so setze man in den Ausdruck

$$g^{r+s} = \xi_0^{(r+s-1)} g_0 + \xi_1^{(r+s-1)} e_1 + \cdots + \xi_{n-1}^{(r+s-1)} e_{n-1}$$

die für $e_1\, e_2 \ldots e_{n-1}$ aus den Gleichungen (p) gefundenen Werthe ein. So erhält man insbesondere für g^n eine Gleichung

$$\mathsf{X}_0 g^n + \mathsf{X}_1 g^{n-1} + \cdots + \mathsf{X}_n g_0 = 0. \qquad (C)$$

Man braucht demnach in (i) nur $\varepsilon_r = \mathsf{X}_r : \mathsf{X}_0$ zu setzen, wobei jedoch vorausgesetzt ist, dafs die ξ_r überhaupt so gewählt werden können, dafs die auf diese Weise erhaltene Gleichung keine wiederholten Wurzeln hat.

Hieraus lässt sich nach Dedekind die Ueberflüssigkeit der complexen Zahlen mit mehr als zwei Einheiten von der hier vorausgesetzten Beschaffenheit darthun[10]). Sie erweisen sich nämlich im Grunde als identisch mit den ganzen Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von g, wo g eine Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades $F(g) = 0$ bedeutet. Diese Ausdrücke werden in der höheren Algebra in der That manchmal als aus $g\, g^2 \ldots g^{n-1}$ gebildete complexe Zahlen bezeichnet.

Das Ergebnifs der vorstehenden Ueberlegung läfst sich auch so ausdrücken: „Es sei das aus den Einheiten $e_1\, e_2 \ldots e_n$ gebildete Zahlensystem den Forderungen 1—6, 8, 9 unterworfen, also seine Multiplication distributiv und associativ und sie besitze einen und nur einen Modulus g_0, so dafs, was für eine Zahl des Systemes a auch sein mag,

$$a \,.\, g_0 = g_0 \,.\, a = a$$

ist. Wenn aufserdem in dem Systeme eine Zahl g vorkommt, wofür die Determinante (B) nicht Null ist, so mufs das Product auch dem commutativen Gesetze gehorchen." — Daraus schliefst man, dafs wenn die Multiplication gleichwohl nicht commutativ ist, die Determinante (B) identisch verschwinden mufs; was sich an den Hamilton'schen Quaternionen bewährt.

Die Quaternionen sind ein System von complexen Zahlen aus vier Einheiten, der numerischen Einheit 1, zugleich Modulus der Multiplication, und drei imaginären Einheiten $i_1\, i_2\, i_3$, deren Producte in folgender Art definirt sind:

$$\begin{array}{lll} i_1 \,.\, i_1 = -1 & i_1 \,.\, i_2 = i_3 & i_1 \,.\, i_3 = -i_2 \\ i_2 \,.\, i_1 = -i_3 & i_2 \,.\, i_2 = -1 & i_2 \,.\, i_3 = i_1 \\ i_3 \,.\, i_1 = i_2 & i_3 \,.\, i_2 = -i_1 & i_3 \,.\, i_3 = -1\,. \end{array}$$

Das Product zweier Quaternionen wird mit Hilfe dieser Werthe nach den Formeln (c) und (d) in Nr. 9 entwickelt. Es ist leicht zu

zeigen, dafs es dem associativen Gesetze gehorcht. Da das commutative Gesetz nicht erfüllt ist, so mufs die Determinante (B) identisch verschwinden, was man durch Rechnung bestätigen kann. Die Quaternion

$$g = \xi_0 + \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2 + \xi_3 i_3$$

genügt der Gleichung

$$g^3 - (3\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2) g + 2\xi_0 (\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) = 0 .$$

12. Zerlegung der Zahlen $\Sigma \alpha_r g_r$ in ihre Componenten nach Weierstrass.

Wir fügen zu den bisherigen Annahmen über das Zahlensystem mit den Elementen $g_0\, e_1 \ldots e_{n-1}$ noch die, dafs in demselben eine Zahl g vorhanden ist, wofür die aus der linken Seite der Gleichung (C) durch Division mit X_0 hervorgehende ganze Function

$$F(\xi) = \xi^n + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \cdots + \varepsilon_n ,$$

worin ξ eine reelle Veränderliche bedeutet, keine wiederholten Factoren enthält, somit nach IV. 9 in Factoren ersten oder zweiten Grades mit reellen Coefficienten

$$F_1(\xi), F_2(\xi) \ldots F_k(\xi)$$

zerlegt werden kann, die sämmtlich von einander verschieden sind. In jedem derselben sei der Coefficient der höchsten Potenz von ξ gleich 1.

Bezeichnet $\Phi(\xi)$ eine beliebige ganze Function von ξ, nicht höheren als $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, mit reellen Coefficienten, so läfst sich $\Phi(\xi) : F(\xi)$ vermittelst der Zerlegung in Partialbrüche (V. 12) auf die Form bringen

$$\frac{\Phi(\xi)}{F(\xi)} = \frac{\Phi_1(\xi)}{F_1(\xi)} + \frac{\Phi_2(\xi)}{F_2(\xi)} + \cdots + \frac{\Phi_k(\xi)}{F_k(\xi)}, \qquad (q)$$

worin $\Phi_r(\xi)$ eine reelle Constante oder eine lineare ganze Function von ξ mit reellen Coefficienten ist, je nachdem $F_r(\xi)$ vom ersten oder zweiten Grade in ξ ist.

Nachdem wir $g_0\, g_1 \ldots g_{n-1}$ als Elemente für das Zahlensystem eingeführt haben, gehört zu jeder Zahl a desselben eine ganze Function $\Phi(\xi)$ höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Die Gesammtheit der Zahlen, für welche die zugehörige Function von ξ die Form

$$\frac{F(\xi)}{F_r(\xi)}\Phi_r(\xi) \quad (r = 1, 2 \ldots k)$$

hat, heifse das Theilsystem $\mathfrak{G}_r$. Es entspringt, je nachdem $F_r(\xi)$ vom ersten oder zweiten Grade ist, aus einem oder zwei Elementen, nämlich entweder aus der zur Function $F(\xi) : F_r(\xi)$, oder aus den zu den Functionen $F(\xi) : F_r(\xi)$ und $\xi F(\xi) : F_r(\xi)$ gehörigen Zahlen. Die Gleichung (q) lehrt, dafs jede Zahl a des Systemes in einziger Weise als Summe von k anderen : $a_1\, a_2 \ldots a_k$ dargestellt werden kann, welche bezw. den Theilsystemen $\mathfrak{G}_1\, \mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_k$ angehören und die Componenten von a genannt werden mögen.

Sind nun a_r, b_s zwei Zahlen, die verschiedenen Theilsystemen $\mathfrak{G}_r$, $\mathfrak{G}_s$ angehören, so ist ihr Product Null:

$$a_r \,.\, b_s = 0 \,.$$

Denn das Product der ihnen zugehörigen Functionen

$$\Phi(\xi) = \frac{F(\xi)}{F_r(\xi)}\Phi_r(\xi) \qquad \Psi(\xi) = \frac{F(\xi)}{F_s(\xi)}\Psi_s(\xi)$$

ist durch $F(\xi)$ theilbar. Wenn a_r b_r Zahlen des Theilsystemes $\mathfrak{G}_r$ bedeuten, so gehört auch die Zahl $a_r \,.\, b_r$ ihm an. Ist das Product zweier solchen Zahlen Null, so mufs mindestens einer der Factoren Null sein. Wenn nämlich zu b_r die Function

$$\Psi(\xi) = \frac{F(\xi)}{F_r(\xi)}\Psi_r(\xi)$$

gehört, so ist das Product $\Phi\Psi$ durch $F(\xi) : F_r(\xi)$ theilbar, somit auch der Divisionsrest $\chi(\xi)$ in (n). Durch $F(\xi)$ aber kann $\Phi\Psi$ nur so theilbar sein, dass $\Phi_r(\xi)$ oder $\Psi_r(\xi)$ identisch Null ist. Das ist unmittelbar klar, wenn $F_r(\xi)$ vom ersten Grade ist; im anderen Falle erhellt es daraus, dafs $F_r(\xi)$ nicht in zwei Factoren ersten Grades $\Phi_r(\xi)$ $\Psi_r(\xi)$ mit reellen Coefficienten zerfallen kann.

Sind $g_1^{(0)}\, g_2^{(0)} \ldots g_k^{(0)}$ die Componenten des Modulus der Multiplication g_0, so dafs

$$g_0 = g_1^{(0)} + g_2^{(0)} + \cdots + g_k^{(0)}$$

ist und bezeichnet a_r eine dem Theilsysteme $\mathfrak{G}_r$ angehörige Zahl, so hat man nebeneinander

$$a_r \cdot g_0 = a_r \qquad a_r \cdot g_0 = a_r \cdot g_r^{(0)},$$

also

$$a_r \cdot g_r^{(0)} = a_r,$$

d. h. die Zahl $g_0^{(r)}$ ist der Modulus der Multiplication im Theilsysteme $\mathfrak{G}_r$.

Wenn nun $F_r(\xi)$ vom ersten Grade ist, so kann jede dem Theilsysteme $\mathfrak{G}_r$ angehörige Zahl a_r in der Form $\alpha g_r^{(0)}$ dargestellt werden.

Wenn dagegen $F_r(\xi)$ vom zweiten Grade ist, so bilden die Zahlen a_r des Theilsystemes $\mathfrak{G}_r$ zufolge der vorstehenden Sätze nach Nr. 5 ein elliptisches System aus zwei Elementen, demnach lassen sie sich auf die Form bringen

$$a_r = \alpha g_r^{(0)} + \beta k_r,$$

wo

$$k_r \cdot k_r = -g_r^{(0)}$$

ist.

Es lassen sich mithin die ursprünglichen Einheiten $e_1\, e_2 \ldots e_n$ ersetzen durch n andere, welche in k Gruppen zerfallen, dergestalt dafs jedem Factor ersten Grades von $F(\xi)$ eine, jedem zweiten Grades zwei Einheiten entsprechen. Die Producte aus je zwei neuen Einheiten verschiedener Gruppen sind Null, während jede eine Gruppe bildende Einheit bei der Multiplication mit sich selbst sich wie 1, je zwei zu einer Gruppe gehörige Einheiten bei der Multiplication mit sich selbst und untereinander sich wie 1 und $i = \sqrt{-1}$ verhalten. Die bisher betrachteten complexen Zahlen aus n Einheiten — unter denjenigen, deren Multiplication den drei bekannten Gesetzen gehorcht, die allgemeinsten — erweisen sich demnach als eine nichtssagende Zusammenstellung aus den mehrmals gesetzten Systemen der reellen und der gemeinen complexen Zahlen.[11])

Die hier betrachteten Zahlensysteme haben die Eigenschaft, dafs die Gleichung $x^m = 0$ nur die Wurzel $x = 0$ zuläfst. Wenn die Function $F(\xi)$ einen k-fachen Factor $F_1(\xi)$ enthält, so hat die Gleichung $x^k = 0$ unendlich viele von Null verschiedene Wurzeln, nämlich die den Functionen $\Phi(\xi)\, F(\xi) : F_1(\xi)^{k-1}$, worin $\Phi(\xi)$ eine beliebige ganze Function von niedrigerem Grade als $F_1(\xi)^{k-1}$ sein kann, entsprechenden Zahlen.

II. Abschnitt.

Synthetische Theorie der gemeinen complexen Zahlen.

1. Die complexen Zahlen wurden auf dem analytischen Wege erfunden. Solange man ihnen keine anschauliche Bedeutung beizulegen vermochte, wurden sie den reellen Zahlen gegenüber als unmögliche Gröfsen bezeichnet. Es war zweifelhaft, ob sie überhaupt in der Analysis zuzulassen seien. Gauss, dem es 1799 lediglich räthlicher schien die complexen Zahlen beizubehalten als sie zu verwerfen[1]), wurde durch die Theorie der biquadratischen Reste von ihrer Nothwendigkeit überzeugt. So spricht er sich namentlich 1831 in der Anzeige der zweiten Abhandlung über diese Reste aus, wo er auch die geometrische Darstellung der complexen Zahlen auseinandersetzte[2]). Hierin war ihm R. Argand vorangegangen, der 1806 die vier Species mit den Strecken der Ebene lehrte[3]). Mit demselben Gegenstande und insbesondere seinen geometrischen Anwendungen beschäftigte sich seit 1835 O. Bellavitis, welcher der Theorie den Namen „Metodo delle equipollenze“ beilegte[4]). Auch mehrere Abhandlungen von A. F. Möbius enthalten geometrische Anwendungen derselben[5]).

Von der soeben erwähnten geometrischen Darstellung der complexen Zahlen und der damit zusammenfallenden Streckenrechnung ist zu unterscheiden die geometrische Interpretation der complexen Elemente der Grundgebilde des Raumes in der analytischen Geometrie, welche in verschiedener Weise bewerkstelligt worden ist. Möbius construirte die complexen Punkte $x = \alpha + \beta i$ der Geraden als Punkte $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$ der Ebene, indem er ein rechtwinkliges Coordinatensystem XOY zu Grunde legte. Wie man zu den complexen Elementen dieser Grundgebilde, welche v. Staudt in die reine Geometrie eingeführt hat, auf analytischem Wege gelangt, hat der Verfasser im IV. B. d. Math. Ann. gezeigt. Abgesehen von der Unterscheidung der

conjugirten Elemente, reicht man mit der Annahme aus, dafs die geometrische Bedeutung einer Gleichung zwischen Veränderlichen dadurch ungeändert bleibt, dafs man sie mit einer beliebigen, also auch einer complexen Constanten multiplicirt.

2. Die Strecken in der Euclid'schen Ebene nach Gröfse und Lage.

1. Def. Sind $A\,B$ die Endpunkte einer Strecke in der gegebenen Ebene, so bedeute nunmehr AB diese Strecke auch der Lage nach und zwar von dem zuerstgenannten Punkte A aus beschrieben. — Die Strecken in diesem Sinne bilden gemäfs der folgenden Definition ein Gröfsensystem, zu welchem noch die sogleich zu erklärende uneigentliche Strecke „Null" zu rechnen ist.

2. Def. Zwei Strecken AB $A'B'$ in einer Ebene sind dann und nur dann einander gleich[6]), wenn sie gleich lang sind, in derselben oder in parallelen Geraden liegen und gleichgerichtet sind, d. h. falls AB und $A'B'$ in derselben Geraden sich befinden, so mufs der Uebergang von A' zu B' in demselben Sinne stattfinden, wie der von A zu B; falls aber AB $A'B'$ nicht eine Gerade bilden, so mufs $ABB'A'$ ein Parallelogramm sein und demnach BB' auf der nämlichen Seite der Geraden AA' liegen. — Die Berechtigung dieser Definition (vgl. I. 2 d. I. T.) steht aufser Zweifel. Insbesondere hat man neben

$$AB = A'B' \quad A'B' = A''B''$$

auch $AB = A''B''$. Es sind nämlich, falls $AA'A''$ nicht eine Gerade ist (Fig. 1), die Dreiecke $AA'A''$ und $BB'B''$ einstimmig congruent, so dafs AB $A''B''$ entweder derselben Geraden angehören, gleich lang und gleich gerichtet sind oder $ABB''A''$ ein Parallelogramm ist. Aehnliches gilt, wenn $AA'A''$ und somit auch $BB'B''$ auf einer Geraden liegen.

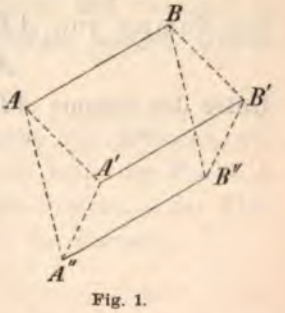


Fig. 1.

3. Def. Die Strecken AB $A'B'$ heifsen einander ent-

gegengesetzt, wenn sie gleich lang, in derselben oder in parallelen Geraden gelegen und entgegengesetzt gerichtet sind d. h. falls AB $A'B'$ derselben Geraden angehören, so mufs der Uebergang von A' zu B' in entgegengesetztem Sinne stattfinden wie von A zu B; falls aber AB $A'B'$ nicht eine Gerade bilden, so müssen BB' auf entgegengesetzten Seiten der Geraden AA' liegen. Insbesondere sind die Strecken AB und BA einander entgegengesetzt.

Von jedem Punkte der Ebene läfst sich zu jeder nicht in demselben entspringenden Strecke eine und nur eine gleiche und zu jeder Strecke eine und nur eine ihr entgegengesetzte construiren.

Der Kürze wegen werden auch die kleinen deutschen Buchstaben a b c .. zur Bezeichnung der neuen Gröfsen AB verwendet werden.

3. Addition und Subtraction der Strecken in der Ebene.

4. Def. „Die Summe je zweier entgegengesetzten Strecken wird mit 0 bezeichnet, z. B. es ist

$$AB + BA = 0.$$

Ferner sei

$$AB + 0 = 0 + AB = AB \qquad 0 + 0 = 0.$$

Als Summe von AB und BC gilt die Strecke AC:

$$AB + BC = AC.$$

Unter der Summe $AB + DE$ ist zu verstehen die Strecke

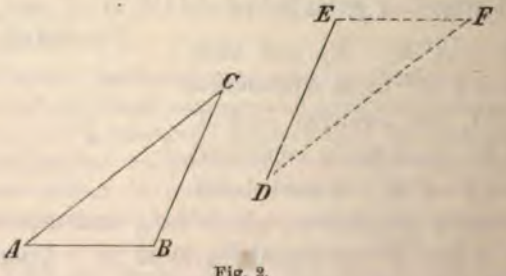


Fig. 2.

AC, deren Endpunkt durch die Construction der Strecke $BC = DE$ gefunden wird (Fig. 2) und jede ihr gleiche."

Die hier definirte Addition gehorcht denselben Gesetzen, e die in V. 7 d. I. T. aufgestellte Addition der relativen recken in parallelen Geraden. Auf die letztere kommen wir ch hier zurück, wenn die in Betracht gezogenen Strecken mmtlich in derselben oder in parallelen Geraden liegen. Aber ch in dem allgemeinen Falle findet man leicht:

$$AB + DE = DE + AB;$$

nn macht man $EF = AB$, so sind die Dreiecke ABC id FED einstimmig congruent.

Neben $DE = D'E'$ ist

$$AB + DE = AB + D'E'.$$

$$(AB + BC) + CD = AB + (BC + CD);$$

nn links steht

$$AC + CD = AD \quad \text{und rechts} \quad AB + BD = AD.$$

as associative Gesetz ist auch erfüllt, wenn unter den rei Gröfsen in der 3. Gleichung Null vorkommt oder bei er Berechnung der beiden Summen auftritt. Es ist z. B.

$$(AB + BC) + CA = AC + CA = 0$$
$$AB + (BC + CA) = AB + BA = 0,$$

o dass man für drei beliebige Punkte $A\,B\,C$ der Ebene hat

$$AB + BC + CA = 0.$$

Die Subtraction ist stets ausführbar und zwar nur in ner Weise. Soll eine Strecke $\mathfrak{x}$ gefunden werden, welche e Gleichung

$$AB + \mathfrak{x} = AC$$

füllt, so denke man sich $\mathfrak{x}$ in die Form BX gebracht, wo-rch man $AX = AC$ findet. Demnach mufs der Punkt X f C fallen, so dafs $\mathfrak{x} = BC$ ist, welche Strecke in der That r Gleichung genügt. Mithin besteht die Formel

$$AC - AB = BC.$$

fenbar sind auch die Differenzen

$$0 - 0 = 0 \qquad AB - 0 = AB \qquad AB - AB = 0$$
$$0 - AB = BA$$

ndeutig. Die letzte hat zur Bezeichnung $-AB$ für jede B entgegengesetzte Strecke geführt; demnach schreibt man . B. $$BA = -AB.$$

Eine Strecke von einer anderen subtrahiren ist gleichbedeutend damit, zu dieser die jener entgegengesetzte Strecke zu addiren. In der That ist

$$AC - AB = AC + BA = BC.$$

Zufolge des Vorstehenden gelten nach III. 3, 4 d. I. T. dieselben Regeln über die Addition und Subtraction der neuen Gröfsen wie bei den reellen Zahlen, von den Ungleichungen jedoch vorläufig abgesehen.

4. Die Strecken in einer und in parallelen Geraden.

Wie bereits bemerkt, gelten für die Strecken AB in einer und in parallelen Geraden die in V. 7 d. I. T. aufgeführten Formeln. Nur haben wir bis jetzt kein Verfahren angegeben, um in den Geraden je eine Richtung als die positive auszuzeichnen, so dass die a. a. O. vorkommenden Ungleichungen vorläufig entfallen. Wir verstehen ferner unter mAB, wo m eine natürliche Zahl bedeutet, die Summe

$$\overset{1}{\smile}{AB} + \overset{2}{\smile}{AB} + \cdots + \overset{m}{\smile}{AB}$$

d. i. die in der Art entstehende Strecke, dass man auf der Verlängerung von AB diese Strecke noch $m - 1$ Male unmittelbar hintereinander aufträgt. Theilt man die Strecke AB in m gleiche Theile und bezeichnet die Theilpunkte von A gegen B fortschreitend mit $A'A'' \ldots A^{(m-1)}$, so bedeutet $\frac{1}{m}AB$ jede Strecke $A^{(r)}A^{(r+1)}$ $(r = 0, 1, \ldots m - 1)$, wobei $A^{(0)} \equiv A$, $A^{(m)} \equiv B$ ist.

5. Def. „Allgemein sei αAB (worin die von Null verschiedene, sonst beliebige reelle Zahl α als Coefficient, nicht als Factor zu betrachten ist) die Strecke AC, deren Endpunkt C auf AB so gewählt ist, dafs das Verhältnifs der Strecke AC zu AB in dem VII. 13 d. I. T. erklärten Sinne gleich ist α — und jede AC gleiche Strecke. — Es sei ferner $0AB = 0$, $\alpha 0 = 0$.“ — Macht man irgend eine der relativen Strecken auf der Geraden AB zur Einheit, so ist das genannte Verhältnifs, somit α der Quotient der den Strecken AC und AB entsprechenden Zahlen. Wie wir

sehen werden, darf α auch als Quotient der neuen Gröfsen $AC : AB$ bezeichnet werden. Demnach kann man in der Formel

$$\alpha = AC : AB$$

AB AC sowohl als relative Strecken nach V. 7 d. I. T., als auch als solche im neuen Sinne betrachten. Dabei ist die positive Richtung für die ersteren noch willkürlich. Da später Formeln mit Strecken der ersten und zweiten Art vorkommen werden, worin die einen nicht durch die anderen ersetzt werden können, so wollen wir für die ersteren eine eigene Bezeichnung, nämlich $\overline{AB}$, einführen. Demnach hat man

$$AC = (\overline{AC} : \overline{AB})\, AB.$$

Nach dem Vorstehenden folgt aus der Gleichung

$$\alpha AB = 0$$

nothwendig $\alpha = 0$. Aus der Gleichung

$$\alpha AB + \alpha' A'B' = 0$$

ergiebt sich, wenn die Strecken AB $A'B'$ nicht in parallelen Geraden liegen, nothwendig $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$, da die Strecken αAB, $\alpha' A'B'$ unmöglich einander entgegengesetzt sein können.

Man findet ferner ohne Mühe die Relationen

1) $$(\alpha + \beta)AB = \alpha AB + \beta AB$$

mit dem besonderen Falle für $\beta = -\alpha$

$$(-\alpha)AB = -\alpha AB;$$

2) $$\beta(\alpha AB) = (\beta\alpha)AB;$$

3) $$\alpha(AB + BC) = \alpha AB + \alpha BC.$$

Die zweite wird beispielsweise so gezeigt. Sie ist offenbar richtig, wenn eine der beiden Zahlen α β Null ist. Wenn keine von ihnen Null ist, so sei

$$\alpha = \overline{AC} : \overline{AB} \qquad \beta = \overline{AD} : \overline{AC},$$

so dass

$$\beta\alpha = \overline{AD} : \overline{AB}$$

ist. Also hat man

$$\alpha AB = AC \quad AD = \beta AC = \beta(\alpha AB) = (\beta\alpha)AB.$$

Der 3. Satz ergiebt sich daraus, dafs wenn man die Strecken

$$\alpha AB = A'B \qquad \alpha BC = BC'$$

construirt, so dass

$$\alpha = \overline{BA'} : \overline{BA} = \overline{BC'} : \overline{BC}$$

ist, auch

$$\overline{A'C'} : \overline{AC} = \alpha \qquad A'C' = \alpha AC$$

sein muss, mag B in der Geraden AC liegen oder nicht (Fig. 3). Der 1. und 3. Satz lassen sich sofort auf mehrgliedrige Summen ausdehnen.

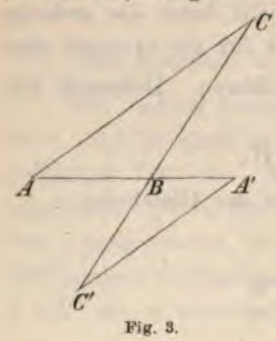


Fig. 3.

Anmerkung. Bedeutet C den Mittelpunkt der Strecke AB und O einen willkürlichen Punkt der Ebene, so hat man wegen $AC = CB$

$$OC - OA = OB - OC,$$

also

$$OC = \frac{OA + OB}{2}.$$

5. Systematische Darstellung der Strecken der Ebene.

Durch einen gegebenen Punkt O der Ebene kann man zu jeder Strecke AB eine und nur eine ihr gleiche OM ziehen.

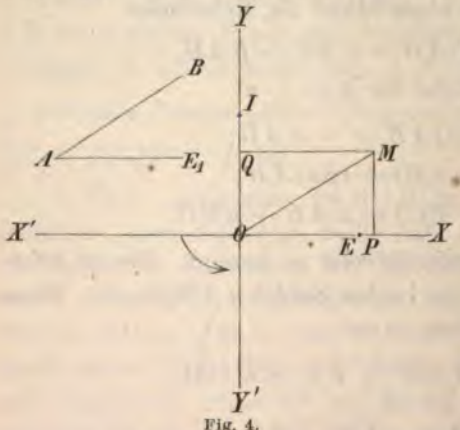


Fig. 4.

Legt man durch O (Fig. 4) zwei Gerade, die Axen XX' YY', welche aus einem später zu erwähnenden Grunde auf einander senkrecht stehen sollen, und zieht vom Punkte M zu ihnen die Parallelen MP MQ, so findet man

$$OM = OP + PM$$
$$= OP + OQ.$$

Nehmen wir auf den Axen die festen Punkte EJ an — der Einfachheit wegen gleichweit von O entfernt —, bezeichnen

die Strecken OE OJ mit e bezw. i und führen die rechtwinkligen Coordinaten von M in Bezug auf die Axen XX' YY'

$$\overline{OP} : \overline{OE} = \xi \qquad \overline{OQ} : \overline{OJ} = \eta$$

ein, so ergiebt sich nach Nr. 4

$$AB = OM = \xi e + \eta i.$$

Es erscheinen somit die Strecken der Ebene als complexe Gröfsen mit den zwei Elementen e i. Ordnet man diesen Fundamentalgröfsen bezw. die Zahlen 1 und i und zugleich jeder Strecke OP auf der „reellen" Axe XX' mit rationalem ξ diese Zahl, jeder Strecke OQ auf der „imaginären" Axe YY' mit rationalem η die Zahl ηi zu, so entspricht jeder Gröfse OM und den ihr gleichen eine complexe Zahl, nämlich $\xi + \eta i$, welchen Satz man mit Hilfe des entsprechenden in VII. 13 d. I. T. sofort umkehren kann. ξ η nennt man die Coordinaten der complexen Gröfse OM, ξ die erste oder reelle, η die zweite oder imaginäre.

Nunmehr läfst sich nach dem in II. 1 angewandten Verfahren von je zwei ungleichen Strecken der Ebene die eine als die gröfsere, die andere als die kleinere erklären. Die Unterscheidung hängt jedoch von der Wahl der positiven Axenrichtungen ab, so dafs bei einer Abänderung derselben die zwischen zwei ungleichen Strecken aufgestellte Relation in ihr Gegentheil übergehen kann. Man bezeichnet nämlich von den Strecken

$$OM = \xi e + \eta i \qquad OM' = \xi' e + \eta' i$$

OM' als die gröfsere oder kleinere, je nachdem die erste von Null verschiedene unter den Differenzen $\xi' - \xi$, $\eta' - \eta$ positiv oder negativ ist. — Durch diese Regel wird zugleich auf jeder Geraden MM' eine positive Richtung festgestellt, so dass die ihr angehörigen Strecken allen in V. 7 d. I. T. gemachten Voraussetzungen entsprechen. Es ist nämlich auf einer nicht zu YY' parallelen Geraden

$$MM' = OM' - OM = (\xi' - \xi)e + (\eta' - \eta)i \qquad (1)$$

gröfser als Null oder positiv, wenn $\xi' - \xi > 0$ ist d. i. die positive Richtung in MM' ist so angenommen, dass die Projection jeder positiven Strecke auf die reelle Axe ebenfalls positiv ist. In allen durch den Nullpunkt gehenden Geraden aufser YY' tritt die positive Richtung von der negativen Seite der Axe YY' auf die positive.

In der Geometrie reicht man mit den folgenden Festsetzungen bezüglich der positiven Richtungen in den Geraden der Ebene aus:

1) In parallelen Geraden läfst man sie nach derselben Seite laufen; 2) in jeder Geraden, die auf einer Geraden mit bekannter positiver Richtung a senkrecht steht, wird die positive Richtung in die positive Normale n gelegt, welche wir sogleich erklären werden. Wir haben ohnehin die bereits in V. 7 d. I. T. erwähnten relativen Winkelgröfsen näher zu besprechen. Nachdem in jeder Geraden der Ebene eine positive Richtung angenommen ist, führen wir als Winkel $a \frown b$ ein den Betrag der Drehung (in Theilen der Peripherie oder des Radius), welche von der Richtung a d. i. dem Halbstrahle OA (Fig. 5) an in dem für die Ebene nach Belieben festgesetzten positiven Drehungssinne bis zur Richtung b d. i. dem Halbstrahle OB zurückzulegen ist. Gewöhnlich betrachtet man die Drehung von rechts nach links als positiv. Wenn Vielfache von 360^0 bezw. 2π nicht in Betracht kommen, was gewöhnlich der Fall ist, so gilt mit der soeben erhaltenen positiven Zahl als gleichbedeutend der mit dem Zeichen — versehene Betrag der Drehung von der Richtung a bis zur b in negativem Sinne. Als positive Normale zur Richtung a wird die Richtung n bezeichnet, wofür $a \frown n = +\,90^0$ oder $-\,270^0$ ist; wobei zu bemerken ist, dafs positive Normale zu n nicht die Richtung a ist, sondern die ihr entgegengesetzte a'. Unter diesen Voraussetzungen hat man

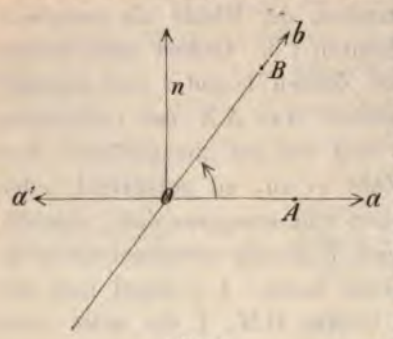


Fig. 5.

$$b \frown a = -\,a \frown b \quad \text{oder} \quad a \frown b + b \frown a = 0$$

und für irgend drei Richtungen $a\ b\ c$ in der Ebene

$$a \frown b = a \frown c + c \frown b .$$

Die von den Alten überkommene Winkelbezeichnung $\widehat{AOB}$ werden wir als gleichbedeutend mit $OA \frown OB$ im obigen Sinne gebrauchen, wobei unter $OA\ OB$ die Richtungen von O nach A bezw. von O nach B zu verstehen sind. Gewöhnlich nimmt man den Winkel $\widehat{AOB}$ zwischen $-\,180^0$ und $+\,180^0$. Man hat nun ebenfalls

$$\widehat{BOA} = -\,\widehat{AOB} \quad \text{oder} \quad \widehat{AOB} + \widehat{BOA} = 0$$

und wenn C einen vierten Punkt der Ebene bezeichnet

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB} .$$

Häufig ist es zweckmäfsiger, eine Strecke AB zu charakterisiren durch ihre Polarcoordinaten: die Länge oder den absoluten Betrag (d. i. das Verhältnifs der Strecke

AB zu OE, beide im absoluten Sinne genommen), welcher mit $|AB|$ (oder falls die Längeneinheit unbestimmt bleibt, mit $|AB| : |OE|$) bezeichnet wird, und die Neigung $E_1\widehat{AB}$, wo $AE_1 = OE$ gemacht ist (Fig. 4). Die positive Richtung für diesen Winkel giebt an die Drehung von OX zu OY auf dem kürzeren Wege, welche man gewöhnlich von rechts nach links vor sich gehen läfst. Für gleiche Strecken haben die Coordinaten die nämlichen Werthe. Für die Strecke OM ist der absolute Betrag zufolge des pythagoräischen Satzes (der in Nr. 6 selbst durch eine Streckenrechnung bewiesen werden wird)

$$|OM| = |OM| : |OE| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

die Neigung $E\widehat{OM}$. Für die Strecke MM' hat man demnach zufolge (1)

$$|MM'| = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}.$$

Construirt man (Fig. 6)

$$ON = OM + OM' = (\xi + \xi')\mathfrak{e} + (\eta + \eta')\mathfrak{i},$$

so erkennt man unmittelbar die Richtigkeit der Sätze über den absoluten Betrag der Summe in I. 8; denn in einem

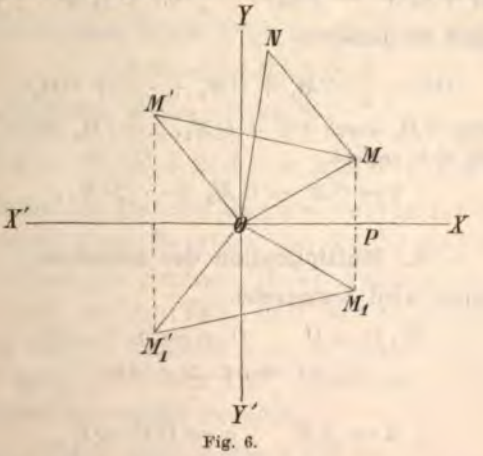


Fig. 6.

Dreiecke ist jede Seite kleiner als die Summe der beiden andern und gröfser als ihre Differenz.

Zwei Strecken MM' und M_1M_1' von gleicher Länge und

entgegengesetzter Neigung heifsen nach Cauchy[7]) zu einander conjugirt. Man gebraucht für M_1M_1' auch die Bezeichnung conj. MM', so dafs

$$\text{conj. } M_1M_1' = MM'.$$

Zwei conjugirte Strecken können stets in eine solche Lage gebracht werden, dafs sie zur reellen Axe symmetrisch sind, wie MM' und M_1M_1' in Fig. 5. Dann sind auch OM und OM_1, sowie OM' und OM_1' zu einander conjugirt und man hat wegen

$$OM_1 = \xi\mathfrak{e} + (-\eta)\mathfrak{i} = \xi\mathfrak{e} - \eta\mathfrak{i} \quad OM_1' = \xi'\mathfrak{e} - \eta'\mathfrak{i}$$
$$M_1M_1' = (\xi' - \xi)\mathfrak{e} - (\eta - \eta')\mathfrak{i}.$$

Conjugirte Strecken haben somit gleiche reelle und entgegengesetzte imaginäre Coordinaten. Eine zur reellen Axe parallele Strecke ist zu sich selbst conjugirt. — Die Summe zweier conjugirten Strecken ist reell:

$$MM' + \text{conj. } MM' = [2(\xi' - \xi)]\mathfrak{e}.$$

Anmerkung. Wenn n Punkte $M_1\ M_2 \ldots M_n$ mit den Coordinaten $\xi_1\ \eta_1,\ \xi_2\eta_2 \ldots \xi_n\ \eta_n$ gegeben sind, so sind bekanntlich die Coordinaten ihres Schwerpunktes G

$$\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) \qquad \frac{1}{n}(\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n).$$

Man hat somit für denselben

$$OG = \frac{1}{n}(OM_1 + OM_2 + \cdots + OM_n),$$

woraus, wenn OM_1 durch $OG + GM_1, \ldots OM_n$ durch $OG + GM_n$ ersetzt wird, sich ergiebt

$$0 = GM_1 + GM_2 + \cdots GM_n.$$

6. Multiplication der Strecken.

Zunächst wird festgesetzt

$$0 \,.\, 0 = 0 \qquad 0 \,.\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \,.\, 0 = 0$$
$$\mathfrak{a} \,.\, \alpha\mathfrak{e} = \alpha\mathfrak{e} \,.\, \mathfrak{a} = \alpha\mathfrak{a}.$$

Ist

$$\mathfrak{a} = AB \qquad \alpha = \overline{OP} : \overline{OE},$$

so wird die Gröfse $\alpha\mathfrak{a} = AR$ auf AB durch die Proportion

$$\overline{AR} : \overline{AB} = \overline{OP} : \overline{OE}$$

gefunden. Wie man sieht, ist $\mathfrak{e}$ Modulus der Multiplication.

Wenn die Strecke CD (Fig. 7) nicht der reellen Axe parallel ist, so wird das Product $AB \,.\, CD$ durch die folgende Construction gefunden. „Zieht man von C eine Strecke

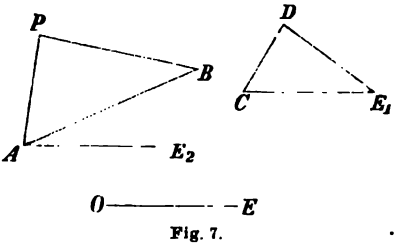


Fig. 7.

$CE_1 = \mathfrak{e}$ und construirt das dem Dreiecke CE_1D einstimmig ähnliche $(\pm\sim)$ ABP, so sei

$$AP = AB \,.\, CD.“$$

Dadurch ist der Punkt P vollständig bestimmt; denn es müssen nicht allein die absoluten Längen jedes Paares homologer Seiten der Dreiecke CE_1D, ABP das nämliche Verhältnifs haben, sondern auch die homologen Winkel in dem Sinne von Nr. 5 einander gleich sein.

$$\widehat{E_1CD} = \widehat{BAP} \quad \widehat{CDE_1} = \widehat{APB} \quad \widehat{DE_1C} = \widehat{PBA}.$$

Aus der vorstehenden Regel folgt unmittelbar, dafs

$$|AP| = |AB|\,|CD| \tag{2}$$

und dafs, wenn man $AE_2 = \mathfrak{e}$ macht,

$$\widehat{E_2AP} = \widehat{E_2AB} + \widehat{BAP} = \widehat{E_2AB} + \widehat{E_1CD} \tag{3}$$

ist. Der absolute Betrag des Productes ist das Product der absoluten Beträge der Factoren, die Neigung desselben die Summe ihrer Neigungen. Dieser Satz pafst auch auf den Fall, dafs der Multiplicator reell ist; man hat nur, je nachdem α in $\alpha\mathfrak{e}$ positiv oder negativ, dafür die Neigung Null oder 180^0 anzusetzen. — Conjugirte Strecken liefern ein reelles Product:

$$AB \,.\, \text{conj.}\, AB = {}^{\prime}AB\,{}^{2}\mathfrak{e}.$$

Zunächst ist zu zeigen, dafs die soeben erklärte Verknüpfung der Strecken, deren Ergebnifs von der Wahl der Strecke $\mathfrak{e}$ abhängt, als eine Multiplication bezeichnet werden

darf. Dafs sie dem commutativen und associativen Gesetze gehorcht, folgt aus den Gleichungen

$$AB \,.\, CD = CD \,.\, AB$$
$$(AB \,.\, CD) \,.\, EF = AB \,.\, (CD \,.\, EF),$$

deren beide Seiten gemäfs der Relationen (2) (3) Strecken von dem nämlichen absoluten Betrage und der nämlichen Neigung sind. Man hat ferner aus demselben Grunde neben

$$AB = A'B'$$
$$AB \,.\, CD = A'B' \,.\, CD.$$

Zufolge des letzten Satzes brauchen wir nur Producte von Strecken zu betrachten, die in O entspringen. Es ist

$$OM \,.\, OM' = OK,$$

wenn

$$\triangle\, OEM' \overset{+}{\sim} OMK$$

ist, wobei sich ergiebt

$$|OK| = |OM|\,|OM'| \quad \widehat{EOK} = \widehat{EOM} + \widehat{EOM'}. \quad (4)$$

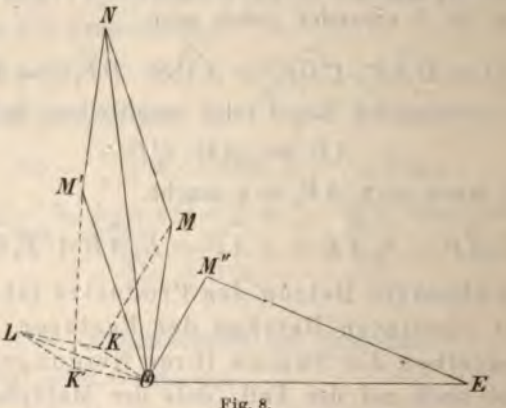


Fig. 8.

Zum Nachweise der Grundformel des distributiven Gesetzes, wofür wir nunmehr schreiben dürfen:

$$(OM + OM') \,.\, OM'' = OM \,.\, OM'' + OM' \,.\, OM'', \quad (5)$$

haben wir im Falle dafs M' nicht auf OM und M'' nicht auf der reellen Axe liegt, folgende Construction (Fig. 8) vorzunehmen.[7*])

Es sei

$$OM \,.\, OM'' = OK \qquad OM' \,.\, OM'' = OK',$$

so dafs nach (4)

$$|OK| = |OM|\,|OM''| \qquad |OK'| = |OM'|\,|OM''|$$

$$\widehat{EOK} = \widehat{EOM} + \widehat{EOM''} \qquad \widehat{EOK'} = \widehat{EOM'} + \widehat{EOM''}.$$

Daraus folgt

$$|OK| : |OK'| = |OM| : |OM'|$$

$$\widehat{KOK'} = \widehat{EOK'} - \widehat{EOK} = \widehat{EOM'} - \widehat{EOM} = \widehat{MOM'}.$$

Somit sind die Dreiecke MOM' und KOK' einstimmig ähnlich. Vollendet man die Parallelogramme $OMNM'$ und $OKLK'$, worin

$$ON = OM + OM' \qquad OL = OK + OK'$$

ist, so sind auch sie einstimmig ähnlich, folglich auch die Dreiecke OMN und OKL. Es ist demnach

$$|OL| : |ON| = |OK| : |OM|$$

d. i.

$$|OL| = |ON|\,|OM''|$$

und

$$\widehat{EOL} = \widehat{EOK} + \widehat{KOL} = \widehat{EOM} + \widehat{EOM''} + \widehat{MON}$$

$$= \widehat{EON} + \widehat{EOM''},$$

also

$$OL = ON \,.\, OM'',$$

was mit (5) übereinstimmt. — Auf (5) führen wir zurück die Formel

$$(OM - OM') \,.\, OM'' = OM \,.\, OM'' - OM' \,.\, OM''$$

mittelst der Relation

$$(-OM') \,.\, OM'' = -OM' \,.\, OM'',$$

welche einen besonderen Fall des unmittelbar aus (2) und (3) folgenden Satzes

$$(\alpha OM) \,.\, (\alpha' OM') = (\alpha\alpha')(OM \,.\, OM') \qquad (6)$$

bildet. Je nachdem $\alpha\,\alpha'$ gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, ist die Neigung der Strecken auf beiden Seiten von (6) in der That $\widehat{EOM} + \widehat{EOM'}$ oder $\widehat{EOM} + \widehat{EOM'} + 180^0$.

Mit Hilfe des distributiven Gesetzes und der Formel (6) können wir die Coordinaten des Productes $OM \,.\, OM'$ ermitteln, wenn nur die des Productes $\mathfrak{i} \,.\, \mathfrak{i}$ bekannt sind. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} OM \,.\, OM' &= (\xi\mathfrak{e} + \eta\mathfrak{i}) \,.\, (\xi'\mathfrak{e} + \eta'\mathfrak{i}) = (\xi\xi')\,(\mathfrak{e} \,.\, \mathfrak{e}) \\ &\quad + (\xi\eta')\,(\mathfrak{e} \,.\, \mathfrak{i}) + (\eta\xi')(\mathfrak{i} \,.\, \mathfrak{e}) + (\eta\eta')\,(\mathfrak{i} \,.\, \mathfrak{i}) \\ &= (\xi\xi')\,\mathfrak{e} + (\xi\eta' + \eta\xi')\,\mathfrak{i} + (\eta\eta')\,(\mathfrak{i} \,.\, \mathfrak{i}). \end{aligned}$$

Nun ist, weil die Strecken $\mathfrak{e}$ $\mathfrak{i}$ gleich lang und aufeinander senkrecht sind[8]), nach der obigen Regel

$$\mathfrak{i} \,.\, \mathfrak{i} = -\,\mathfrak{e},$$

so dafs man schliefslich

$$(\xi\mathfrak{e} + \eta\mathfrak{i}) \,.\, (\xi'\mathfrak{e} + \eta'\mathfrak{i}) = (\xi\xi' - \eta\eta')\mathfrak{e} + (\xi\eta' + \eta\xi')\mathfrak{i} \quad (7)$$

erhält. — Als Product der conjugirten Strecken (Fig. 6)

$$OM = \xi\mathfrak{e} + \eta\mathfrak{i} \qquad OM_1 = \xi\mathfrak{e} - \eta\mathfrak{i}$$

findet man

$$OM \,.\, OM_1 = (\xi\mathfrak{e})^2 - (\eta\mathfrak{i})^2 = (\xi^2 + \eta^2)\,\mathfrak{e},$$

aus welcher Formel der Pythagoräische Satz abgeleitet werden kann. Denn da, wie oben bemerkt,

$$OM \,.\, OM_1 = |\,OM|^2\,\mathfrak{e}$$

ist, so hat man

$$|\,OM|^2 = \xi^2 + \eta^2 = |\,OP|^2 + |\,PM|^2.$$

Associirt zu einer gegebenen Strecke

$$OM = \xi\mathfrak{e} + \eta\mathfrak{i}$$

heifsen nach Gaufs[9]) die drei Strecken, welche aus OM nach einander durch dreimalige Multiplication mit $\mathfrak{i}$ hervorgehen. Man erhält dafür (Fig. 9)

$$\begin{aligned} OM_1 &= OM \,.\, \mathfrak{i} = -\,\eta\mathfrak{e} + \xi\mathfrak{i} \\ OM_2 &= OM_1 \,.\, \mathfrak{i} = \quad OM \,.\, (-\,\mathfrak{e}) = -\,\xi\mathfrak{e} - \eta\mathfrak{i} \\ OM_3 &= OM_2 \,.\, \mathfrak{i} = \quad OM_1 \,.\, (-\,\mathfrak{e}) = OM \,.\, (-\,\mathfrak{i}) = \eta\mathfrak{e} - \xi\mathfrak{i}. \end{aligned}$$

$OM_3 \,.\, \mathfrak{i}$ fällt wieder mit OM zusammen u. s. w. OM_2 ist die entgegengesetzte Strecke zu OM. M_1 und M_3 liegen auf dem in O zu OM lothrechten Strahle und zwar so, dafs

$$\widehat{MOM}_1 = +\,90^\circ \qquad \widehat{MOM}_3 = -\,90^\circ.$$

Die Endpunkte der vier zu einander associirten Strecken OM OM_1 OM_2 OM_3 sind von O gleich weit entfernt. — Mit Hilfe derselben

ıt sich die Formel (7) auch durch die folgende Definition einführen:
ıe Strecke OM mit einer anderen OM' multipliciren heifst
ı ihr und den ihr asso-
rten Strecken eine
ıe Strecke so ablei-
ı, wie der Multipli-
:or OM' aus der Fun-
mentalstrecke e und
n ihr associirten i,
e, $-$ i entstanden ist.
der That hat man z. B.
nn ξ' η' positiv sind,

$$M . OM' = \xi' OM + \eta' OM_1 = (\xi\xi' - \eta\eta')\,e + (\xi\eta' + \eta\xi')\,i.$$

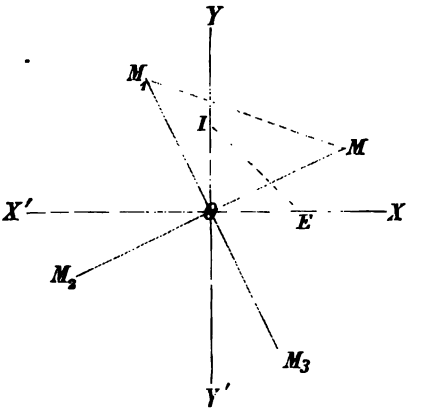


Fig. 9.

7. Division der Strecken.

Der Quotient der beliebigen Strecke $\mathfrak{a}$ durch die reelle ist $(1 : \xi)\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a} : 0$ ist unmöglich, $0 : 0$ wegen seiner Vielıtigkeit unzulässig. Um eine Strecke AQ zu finden, deren oduct mit einer nicht zur reellen Axe parallelen Strecke D gleich einer gegebenen AB ist, ziehe man (Fig. 10)

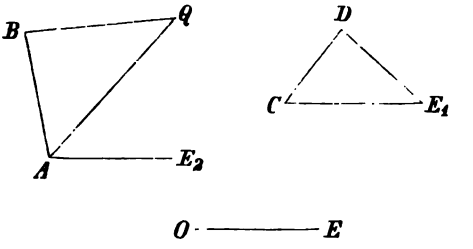


Fig. 10.

$E_1 = e$ und construire das mit CE_1D einstimmig ähnliche reieck AQB. Dann und nur dann ist

$$AQ . CD = AB.$$

Wenn $AB \parallel CD$ ist, so ist AQ parallel der reellen Axe ıd zwar hat man

$$AB : CD = (\overline{AB} : \overline{CD})\,e.$$

Wenn $AB \perp CD$ ist, so stehen auch die anderen Paare homologer Seiten der obigen ähnlichen Dreiecke auf einander senkrecht, also ist $AQ \perp CE_1$, so dafs

$$AQ = (\overline{AQ} : \overline{OJ})\,\mathrm{i} = (\overline{AQ} : \overline{CE_1})\,\mathrm{i} = (\overline{AB} : \overline{CD})\,\mathrm{i},$$

worin das Zeichen von $\overline{AB}$ nach der positiven Normale zur positiven Richtung in der Geraden CD zu bestimmen ist.

Die Division ist stets ausführbar, wenn der Divisor nicht Null ist und zwar nur in einer Weise. Somit gelten hinsichtlich der Multiplication und Division der Strecken dieselben Regeln, wie für die reellen Zahlen.

Die Polarcoordinaten des Quotienten AQ ergeben sich vermittelst der Gleichungen (2) (3). Ist $AE_2 = OE$, so erhält man dafür

$$|AQ| = |AB| : |CD| \qquad \widehat{E_2AQ} = \widehat{E_2AB} - \widehat{E_1CD}.$$

„Der absolute Betrag des Quotienten ist gleich dem Quotienten: absoluter Betrag des Dividends durch den des Divisors, die Neigung desselben gleich der Differenz: Neigung des Dividends weniger der des Divisors.“ Wenn Dividend und Divisor von dem nämlichen Punkte A ausgehen wie beim Quotienten $AQ = AC : AB$ (Fig. 11),

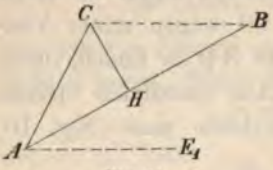


Fig. 11.

so findet man für die Neigung

$$\widehat{E_1AQ} = \widehat{E_1AC} - \widehat{E_1AB} = \widehat{BAC}.$$

Die rechtwinkligen Coordinaten desselben Quotienten ergeben sich aus der Figur, indem man von C das Loth CH auf AB fällt. Es ist nämlich

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH + HC}{AB} = \frac{AH}{AB} + \frac{HC}{AB} = \frac{\overline{AH}}{AB}\,\mathrm{e} + \frac{\overline{HC}}{AB}\,\mathrm{i}. \quad (9)$$

Dabei ist die Strecke $\overline{HC}$ mit demjenigen Zeichen zu versehen, das ihr gemäfs der positiven Normale zu einer in der Geraden AB angenommenen positiven Richtung z. B. AB zukommt.

Man hat also auch die Regel: „Der Punkt C liegt auf der positiven oder negativen Normale zur Richtung AB, je nachdem der

re Theil des Quotienten $AC : AB$ positiv oder negativ ist.“
der Formel (9) erhält man die Dreiecksfläche ABC (mit dem
+ oder — versehen, je nachdem der Umlauf $ABCA$ einem in-
des Dreiecks befindlichen Beobachter positiv oder negativ er-
ausgedrückt durch die Coordinaten der Eckpunkte ABC,
bezw. $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ sein mögen. Für diese relative Dreiecks-
ABC ergiebt sich

$$2\Delta ABC = \overline{AB} \,.\, \overline{HC}.$$

mittelt man nun die Coordinaten von $AB : AC$ durch die Be-
:

$$\frac{AC}{\overline{AB}} = \frac{AC \,.\, \text{conj.}\, AB}{\overline{AB} \,.\, \text{conj.}\, \overline{AB}} = \frac{AC \,.\, \text{conj.}\, AB}{|AB|^2},$$

$$AC = (\alpha'' - \alpha)\,e + (\beta'' - \beta)\,i$$
$$AB = (\alpha' - \alpha)\,e + (\beta' - \beta)\,i$$

indet man

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{AB}} = \frac{(\alpha' - \alpha)(\beta'' - \beta) - (\beta' - \beta)(\alpha'' - \alpha)}{|AB|^2}$$

$$2\Delta ABC = (\alpha' - \alpha)(\beta'' - \beta) - (\beta' - \beta)(\alpha'' - \alpha)$$
$$= \alpha(\beta' - \beta'') + \alpha'(\beta'' - \beta) + \alpha''(\beta - \beta').$$

ne Proportion zwischen vier Strecken, d. i. die
ng

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \qquad (10)$$

t, wenn die Quotienten nicht reell sind, dafs die Drei-
ABC, $A'B'C'$ einstimmig ähnlich (bezw. congruent)
Denn ist

$$AB \,.\, AQ = AC \qquad A'B' \,.\, AQ = A'C',$$

man sowohl

$$\triangle AE_1Q \stackrel{+}{\sim} ABC,$$

h

$$\triangle AE_1Q \stackrel{+}{\sim} A'B'C'.$$

ehrt: sind die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ einstim-
hnlich, so besteht die Proportion (10), woraus
telbar die Gleichungen

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

. In der That hat man unter den genannten Um-

$$|AC| : |A'C'| = |AB| : |A'B'| \qquad \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$$

u. s. w.

Aus (10) ergiebt sich ein arithmetischer Ausdruck für die Thatsache, dafs zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$ symmetrisch ähnlich ($\tilde{=}$) sind. Wendet man das letztere durch Drehung um die reelle Axe um, so erhält man ein zu ABC einstimmig ähnliches Dreieck $A''B''C''$. Da

$$B''C'' = \text{conj. } B'C' \qquad C''A'' = \text{conj. } C'A'$$
$$A''B'' = \text{conj. } A'B'$$

ist, so ergeben sich mithin nach (10) die Gleichungen

$$\frac{\text{conj. } B'C'}{BC} = \frac{\text{conj. } C'A'}{CA} = \frac{\text{conj. } A'B'}{AB}. \tag{11}$$

Mit demselben Rechte können wir auch behaupten, dafs

$$\frac{B'C'}{\text{conj. } BC} = \frac{C'A'}{\text{conj. } CA} = \frac{A'B'}{\text{conj. } AB}. \tag{11*}$$

8. Conjugirte Gleichungen unter den Strecken.

Die letzte Gleichung wird aus (11) auch gewonnen mittelst des allgemeinen Satzes:

Aus jeder Gleichung unter Strecken kann eine zweite dadurch abgeleitet werden, dafs an Stelle einer jeden Strecke die zu ihr conjugirte gesetzt wird.

Um sich von der Richtigkeit desselben zu überzeugen, genügt die Bemerkung, dafs Summe, Differenz, Product, Quotient zweier Strecken conjugirt ist der aus den conjugirten Strecken gebildeten entsprechenden Verknüpfung. Das erkennt man u. A. aus den Coordinaten dieser Ausdrücke, indem beim Uebergange zu den conjugirten Strecken die erste Coordinate ungeändert bleibt, die zweite ihr Zeichen wechselt.

9. Die Verhältnisse der Strecken in der Ebene.

Schon in Nr. 5 ist hervorgehoben, dafs wenn einer beliebigen Strecke $OE = \mathfrak{e}$ die Zahl $+1$, jeder Strecke OP auf der Geraden OE, wofür das reelle Verhältnifs $\overline{OP} : \overline{OE}$ eine rationale Zahl ist, diese Zahl, der Strecke $OJ = \mathfrak{i}$,

welche in die positive Normale zur Richtung OE fällt und gleich lang ist wie OE, die Zahl i, endlich den Strecken $\eta\mathfrak{i}$ bei rationalem η die Zahlen ηi zugeordnet werden, jeder Strecke $OM = \xi\mathfrak{e} + \eta\mathfrak{i}$ (und den ihr gleichen) eine gemeine complexe Zahl nämlich $\xi + \eta i$, entspricht und umgekehrt. Man nennt diese Zahl das Verhältnifs der Strecke OM zur Einheitsstrecke $\mathfrak{e}$ und bezeichnet sie mit $OM : OE$, wobei man jedoch nicht an einen Quotienten denken darf:

$$OM : OE = \xi + \eta i .$$

Die Strecke OM wird auch durch $(\xi + \eta i)\mathfrak{e}$ dargestellt, welcher Ausdruck wieder nicht ein Product bedeutet.

Insbesondere hat man, wenn M auf OE liegt,

$$OM : OE = \xi = \overline{OM} : \overline{OE},$$

letzteres ein Verhältnifs im Sinne von VII, 13 d. I. T.

Für die Verhältnisse der Strecken in der Ebene gelten die nämlichen Sätze, wie für die von relativen Gröfsen (vgl. a. a. O.). Man hat also, unter $a\ b\ m$ gemeine complexe Zahlen, unter $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}$ Strecken verstanden,

$$(a + b)\mathfrak{e} = a\mathfrak{e} + b\mathfrak{e} \qquad b(a\mathfrak{e}) = (ba)\mathfrak{e}$$
$$m(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = m\mathfrak{a} + m\mathfrak{b} .$$

Die zweite Formel wird durch die Bemerkung bewiesen, dafs wenn $b = \alpha' + \beta' i$ ist, $b(a\mathfrak{e})$ aus der Strecke $a\mathfrak{e}$ und den ihr associirten so hervorgeht, wie $\alpha'\mathfrak{e} + \beta'\mathfrak{i}$ aus $\mathfrak{e}$ und seinen associirten. Demnach ist

$$b(a\mathfrak{e}) = a\mathfrak{e} \,.\, (\alpha'\mathfrak{e} + \beta'\mathfrak{i}) = (ba)\mathfrak{e} .$$

Setzt man hier $ba = \xi + \eta i$, so folgt, dafs wenn man der Strecke

$$OA = \alpha\mathfrak{e} + \beta\mathfrak{i} = a\mathfrak{e}$$

$+ 1$ zuordnet und im Uebrigen wie oben verfährt, der Strecke OM die Zahl

$$(\xi + \eta i) : (\alpha + \beta i)$$

entspricht; es ist demnach das Verhältnifs

$$OM : OA = \frac{OM : OE}{OA : OE} . \qquad (12)$$

Auf diese Weise erscheint das Verhältnifs als Quotient zweier Zahlen; umgekehrt läfst sich jeder solche Quotient

als ein Verhältnifs auffassen. Dies ist der Grund, warum die Bezeichnung „Verhältnifs“ oft gleichbedeutend mit „Quotient“ gebraucht wird (sowie „Proportion“ gleichbedeutend mit „Gleichung unter zwei Quotienten“).

Die soeben dargestellte Beziehung zwischen den Strecken in der Ebene und den gemeinen complexen Zahlen läfst sich kurz so aussprechen, dafs wir, um von den ersteren zu den letzteren überzugehen, nur an Stelle von $\mathfrak{e}\,\mathfrak{i}$ bezw. $1\ i$ zu setzen oder anstatt der concreten Elemente abstracte zu Grunde zu legen brauchen. Unter solchen Umständen ist die äufserliche Unterscheidung der beiden Gröfsensysteme überflüssig; wir werden daher in Zukunft die Fundamentalstrecken $\mathfrak{e}\,\mathfrak{i}$ einfach mit $1\ i$ bezeichnen.

Geometrische Anwendungen.

10. Planimetrische Aufgaben.

Auf das im Vorstehenden betrachtete Gröfsensystem läfst sich eine Arithmetik der Lage in der Ebene gründen, welche, wie die folgenden Beispiele zeigen, bei Auflösung von Aufgaben von wesentlichem Nutzen sein kann.

1. „Ein Dreieck XYZ zu construiren, wenn gegeben ist sein Schwerpunkt G und von den Seiten XY, XZ je ein Punkt (M, N), der die bezügliche Seite in einem vorgeschriebenen Verhältnisse theilt.“ Es sei also

$$YM : MX = \alpha \qquad ZN : NX = \beta, \tag{1}$$

worin α β reelle, von Null und -1 verschiedene Zahlen bedeuten.

Nach Nr. 5 Anm. hat man zunächst

$$GX + GY + GZ = 0. \tag{2}$$

Es ist leicht GY, GZ auf GX zurückzuführen. Man findet

$$GY = GM + MY = GM + \alpha XM = (1 + \alpha)\, GM + \alpha XG$$
$$GZ = GN + NZ = GN + \beta XN = (1 + \beta)\, GN + \beta XG.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (2) ein, so folgt

$$(\alpha + \beta - 1)\, GX = (1 + \alpha)\, GM + (1 + \beta)\, GN. \tag{3}$$

$\alpha + \beta - 1$ ist Null oder nicht Null, je nachdem die Punkte $G\ M\ N$ in gerader Linie liegen oder nicht. Bilden sie nämlich eine Gerade, so müfste, wenn $\alpha + \beta - 1$ nicht $= 0$ wäre, X zufolge (3) auf $G\ M\ N$ liegen, was unmöglich ist. Wir haben somit den Satz: „Wenn man

durch den Schwerpunkt G des Dreiecks XYZ die Gerade MN zieht, so mufs

$$(\overline{YM} : \overline{MX}) + (\overline{ZN} : \overline{NX}) = 1$$

sein." Umgekehrt, ist $\alpha + \beta = 1$, so hat nach (3) $GM : GN$ einen reellen Werth, also liegen $G\,M\,N$ in einer Geraden. — Wenn $G\,M\,N$ nicht in einer Geraden liegen, so liefert Gleichung (3) die Strecke

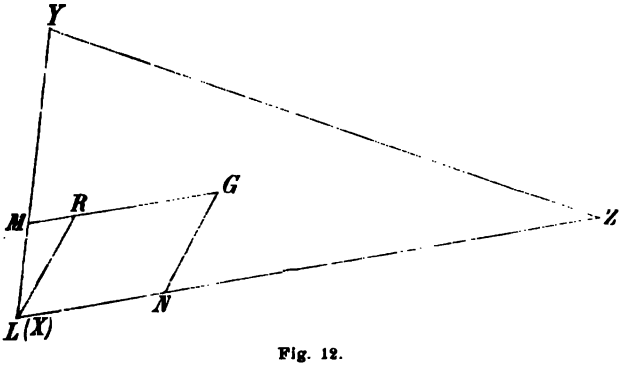


Fig. 12.

GX, also X, worauf YZ mittelst der Gleichungen (1) gefunden werden. Ist z. B. $\alpha = 2$, $\beta = 3$, so hat man

$$4GX = 3GM + 4GN \qquad GX = \tfrac{3}{4}GM + GN.$$

Construirt man (Fig. 12) $GR = \frac{1}{4}GM$ $RL = GN$, so folgt $GX = GL$, also fällt X nach L. Endlich hat man

$$YM = 2MX \qquad ZN = 3NX.$$

2. „Zwei ungleiche Strecken AB $A'B'$, welche weder in einer Geraden liegen, noch den nämlichen Anfangs- oder Endpunkt haben, sind gegeben. Es soll ein Punkt X gefunden werden, so dafs die Dreiecke ABX und $A'B'X$ einstimmig ähnlich sind."

Wegen der einstimmigen Aehnlichkeit der Dreiecke ABX und $A'B'X$ hat man nach Nr. 7

$$AX : A'X = AB : A'B',$$

also

$$AX \,.\, A'B' = A'X \,.\, AB$$

$$\begin{aligned} AX \,.\, A'B' &= (A'A + AX) \,.\, AB \\ AB \,.\, AA' &= AX \,.\, (AB - A'B'). \end{aligned} \tag{4}$$

Sind AB $A'B'$ ungleich, so giebt es einen und nur einen Punkt X, der sich auf folgende Art construiren läfst. Wenn $BC = B'A'$ ist, so hat man nach (4)

$$AB \,.\, AA' = AX \,.\, AC \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AA'}. \tag{5}$$

Sind die Geraden AB $A'B'$ nicht parallel (Fig. 13), so bilden ABC

ein Dreieck, mithin sind nach (5) die Dreiecke CAB und $A'AX$ einstimmig ähnlich. Man construire also

$$A\widehat{A'}X = A\widehat{C}B \qquad A'\widehat{A}X = C\widehat{A}B.$$

Liegen die ungleichen Strecken AB $A'B'$ in parallelen Geraden, so mufs nach (5) $AX : AA'$ reell sein, somit X auf AA' fallen. Auf ähnliche Art ergiebt sich, dafs X auf BB' liegen mufs. Demnach ist X der Schnittpunkt von AA' und BB'. — Wenn $AB = A'B'$ ist, so giebt es nach (4) keinen Punkt X.

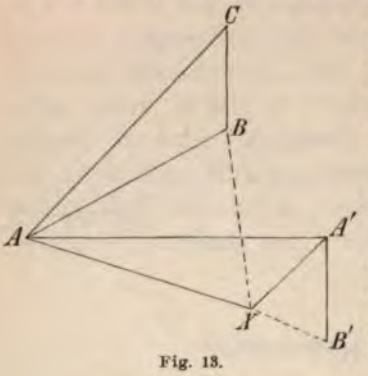


Fig. 13.

3. „Zwei Strecken, die weder gleiche Länge, noch denselben Anfangs- oder Endpunkt haben, sind gegeben. Es wird ein Punkt X gesucht, so dafs die Dreiecke ABX und $A'B'X$ symmetrisch ähnlich sind."

Nach Nr. 7 hat man

$$AX : \text{conj. } A'X = AB : \text{conj. } A'B'$$

$$AX \,.\, \text{conj. } A'B' = AB \,.\, \{\text{conj. } A'A + \text{conj. } AX\} \qquad (6)$$

und dazu nach dem Satze von Nr. 8

$$\text{conj. } AX \,.\, A'B' = \text{conj. } AB \,.\, \{A'A + AX\}\,.$$

Löst man diese linearen Gleichungen nach AX und conj. AX auf, so erhält man

$$(AB \,.\, \text{conj. } AB - A'B' \,.\, \text{conj. } A'B') \,.\, AX$$
$$= AB \,.\, (AA' \,.\, \text{conj. } AB + A'B' \,.\, \text{conj. } AA').$$

Der Coefficient von AX ist $|AB|^2 - |A'B'|^2$; somit hat die Aufgabe eine Lösung, wenn die gegebenen Strecken nicht gleich lang sind. Ordnet man der Strecke AA' die positive Einheit zu, so dafs

$$AA' = \text{conj. } AA' = 1$$

ist, so ergiebt sich

$$(|AB|^2 - |A'B'|^2)\,AX$$
$$= AB \,.\, (\text{conj. } AB + A'B'). \qquad (7)$$

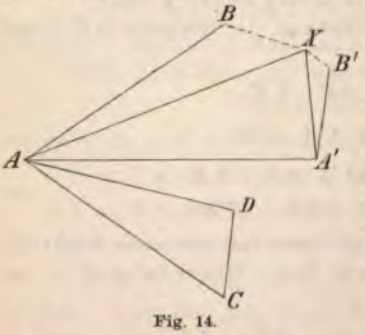


Fig. 14.

Construirt man (Fig. 14)

$$AC = \text{conj. } AB,\ A'B' = CD,$$
$$AC + A'B' = AD,$$

so findet man

$$(|AB|^2 - |A'B'|^2)\,AX = AB \,.\, AD.$$

Je nachdem $|AB|$ gröfser oder kleiner als $|A'B'|$ ist, ist also $\widehat{A'AX}$ gleich

$$\widehat{A'AB} + \widehat{A'AD} = \widehat{CAA'} + \widehat{A'AD} = \widehat{CAD}$$

oder um 180^0 davon verschieden, wodurch man einen Halbstrahl findet, auf dem X liegt. Vermittelst der Gleichung

$$\widehat{B'AX} = -\widehat{BAX} = \widehat{XAB}$$

ergiebt sich ein zweiter Halbstrahl, auf dem X sich befindet, so dafs der verlangte Punkt nunmehr gefunden ist.

Wenn $|AB| = |A'B'|$, ohne dafs A und A' zusammenfallen, so giebt es nach (7) keinen Punkt X, es sei denn

$$A'B' = -\text{conj. } AB = CA$$

(Fig. 15).

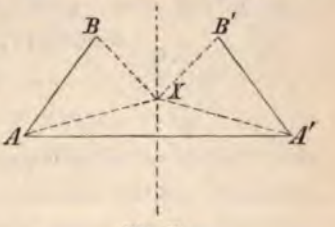


Fig. 15.

Nunmehr mufs nach (6)

$$AX + \text{conj. } AX = 1$$

sein. D. h. es genügt jeder Punkt der im Mittelpunkte von AA' auf diese Strecke errichteten Senkrechten der Forderung:

$$\triangle ABX \simeq A'B'X.$$

Nach diesen Aufgaben ersten Grades möge noch eine zweiten Grades behandelt werden.

4) „Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite AB, die Differenz der ihr anliegenden Winkel und das Product γ der beiden anderen Seiten gegeben ist."

Vom gesuchten Dreieck sind somit zwei Ecken AB gegeben, die dritte X zu bestimmen. Dabei sind gegeben

$$|AX| \,.\, |BX| = \gamma$$

$$\widehat{BAX} - \widehat{XBA} = (\widehat{BAE} + \widehat{EAX}) - (\widehat{XBE_1} + \widehat{E_1BA})$$

$$= \widehat{EAX} + \widehat{E_1BX} - \{\widehat{EAB} + \widehat{E_1BA}\},$$

(worin die Punkte EE_1 der Bedingung $AE = BE_1 = 1$ genügen), somit $EAX + E_1BX$. Construirt man den Winkel

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAX} - \widehat{XBA}$$

(Fig. 16), welche Differenz als auch dem Zeichen nach gegeben anzusehen ist, und nimmt man dabei den Punkt D so an, dafs

$$|AD| \,.\, |BA| = \gamma,$$

so hat man

$$|AX| \,.\, |BX| = |AD| \,.\, |BA|$$

$$\widehat{EAX} + \widehat{E_1BX} = \widehat{EAD} + \widehat{E_1BA},$$

demnach

$$AX \,.\, BX = AD \,.\, BA.$$

Bedeutet C den Mittelpunkt von AB, so dafs $AC = CB$

$$AX = AC + CX \qquad BX = BC + CX = CX - AC$$

ist, so erhält man

$$CX^2 - AC^2 = AD \,.\, BA = 2AD \,.\, CA$$

$$CX^2 = CA\,\{CA + 2AD\} = CA \,.\, CF,$$

wobei $AF = 2AD$ gemacht ist. Aus dieser Gleichung folgt für $CE_2 = 1$

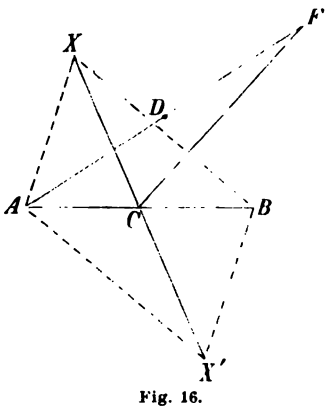


Fig. 16.

$$2\,E_2\widehat{C}X = E_2\widehat{C}A + E_2\widehat{C}F$$

$$|CX|^2 = |CA| \,.\, CF \,.$$

Addirt man in der ersteren Gleichung beiderseits $2\,\widehat{ACE_2}$, so ergiebt sich

$$2\,\widehat{ACX} = \widehat{ACF}$$

$$\widehat{ACX} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{ACF} + \begin{cases} 0 \\ 180^0 \end{cases}.$$

Unsere Aufgabe läfst somit zwei Lösungen XX' zu, welche Punkte auf der Halbirungslinie des Winkels $\widehat{ACF}$ liegen, zu beiden Seiten von C und je in einem Abstande, welcher gleich ist der mittleren geometrischen Proportionale von $|CA|$ und $|CF|$. Demnach sind die Dreiecke ABX und ABX' einstimmig congruent, also nur der Lage nach verschieden.

11. Die trigonometrischen Functionen.

Sind zwei Richtungen a b durch den Punkt O gegeben (Fig. 17) und fällt man von einem beliebigen Punkte M der letzteren eine Senkrechte MP auf die erstere, so haben

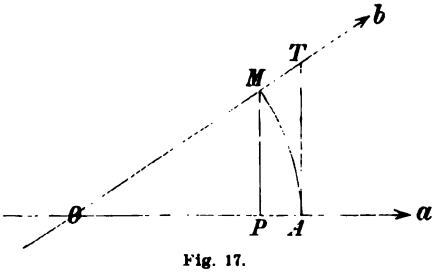


Fig. 17.

nach einem bekannten Satze der Planimetrie die Verhältnisse

$$\overline{OP} : \overline{OM} \qquad \overline{PM} : \overline{OM},$$

orin das Zeichen von $\overline{PM}$ gemäfs der positiven Normale ar Richtung a zu bestimmen ist (vgl. Nr. 5), von M unabängige Werthe, sind somit lediglich vom Winkel $a\widehat{\ }b$ abängig. Man bezeichnet den Werth der ersteren als den osinus, den der letzteren als den Sinus desselben:

$$\overline{OP} : \overline{OM} = \cos a\widehat{\ }b \qquad \overline{PM} : \overline{OM} = \sin a\widehat{\ }b.$$

Wenn die Richtungen a b in eine Gerade fallen oder auf inander senkrecht stehen, so verlieren diese Erklärungen um Theil ihren Sinn. Man setzt aber fest

$$\cos 0 = 1 \quad \sin 0 = 0, \quad \cos 180^0 = -1 \quad \sin 180^0 = 0,$$
$$\cos (\pm 90^0) = 0 \quad \sin (\pm 90^0) = \pm 1,$$

nd zwar deshalb, weil die Functionen $\cos a\widehat{\ }b$ $\sin a\widehat{\ }b$ die chts stehenden Werthe zu Grenzwerthen haben, wenn bei esthaltung von a der Strahl b sich einer der bezeichneten gen unbeschränkt nähert. Wird endlich angenommen, dafs ter n eine beliebige ganze Zahl verstanden,

$$\cos (\alpha + n \,.\, 360^0) = \cos \alpha$$
$$\sin (\alpha + n \,.\, 360^0) = \sin \alpha$$

, so sind die Functionen $\cos \alpha$ $\sin \alpha$ für beliebige positive d negative Winkel α erklärt. Mit Rücksicht auf die letzten eichungen bezeichnet man sie als periodische Functionen n α und zwar mit der Periode 360^0.

Kein Werth des Cosinus und des Sinus liegt aufserhalb es Intervalles $(-1, +1)$. Zufolge des pythagoräischen atzes besteht zwischen beiden Functionen die Gleichung[11])

$$\cos \alpha^2 + \sin \alpha^2 = 1. \qquad (1)$$

Es seien die Polarcoordinaten der Strecke OM (Fig. 4 Nr. 5) $|OM| = \varrho$ $E\widehat{O}M = \theta$. Dann hat man, wenn $E\widehat{O}Y = +90^0$ ist,

$$\xi = \overline{OP} = \varrho \cos \theta \qquad \eta = \overline{PM} = \varrho \sin \theta; \qquad (2)$$

dafs die complexe Gröfse $OM = \xi + \eta i$ in der Form

$$OM = \varrho \{\cos \theta + i \sin \theta\} \qquad (3)$$

scheint. Der Factor $\cos \theta + i \sin \theta$ soll nach R. Argand[10]) ichtungsfactor, der ganze Ausdruck $\varrho (\cos \theta + i \sin \theta)$

die trigonometrische Form der complexen Gröfse OM heifsen. Um die complexe Zahl $\xi + \eta i$ auf die Form (3) zu bringen, hat man eine positive Zahl ϱ und einen Winkel θ zu bestimmen, welche den Gleichungen (2) genügen. Hieraus findet man nach (1)

$$\varrho = |\sqrt{\xi^2 + \eta^2}| \qquad \cos\theta = \frac{\xi}{|\sqrt{\xi^2 + \eta^2}|}$$

$$\sin\theta = \frac{\eta}{|\sqrt{\xi^2 + \eta^2}|}.$$

Es giebt zwischen den Grenzen -180^0 bis $+180^0$ stets einen und nur einen Werth von θ, welcher die beiden letzten Gleichungen befriedigt.

Manchmal läfst man die positive Richtung r in der Geraden OM willkürlich. Dann erhält man

$$OM = \overline{OM}\,(\cos x\widehat{\ }r + i \sin x\widehat{\ }r), \tag{4}$$

unter x die positive Richtung der reellen Axe verstanden. Aehnlich ist für eine beliebige Strecke AB mit der positiven Richtung g

$$AB = \overline{AB}\,(\cos x\widehat{\ }g + i \sin x\widehat{\ }g). \tag{4*}$$

Für die conjugirten Strecken $\xi + \eta i$, $\xi - \eta i$ sind die Neigungen entgegengesetzt, man hat daher

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta.$$

Aehnlich findet man mittelst der zu $\xi + \eta i$ associirten Strecken die Formeln

$$\cos(\theta \pm 90^0) = \mp \sin\theta \quad \sin(\theta \pm 90^0) = \pm \cos\theta$$
$$\cos(\theta + 180^0) = -\cos\theta \quad \sin(\theta + 180^0) = -\sin\theta,$$

welche auch besondere Fälle der folgenden Theoreme sind.

Die Fundamentalsätze der ebenen Trigonometrie sind bekanntlich die Additionstheoreme des Cosinus und Sinus. Dieselben sind enthalten in der Formel (7) von Nr. 6, wodurch die Coordinaten des Productes zweier Strecken gegeben sind. Hierbei reicht die Formel (3) aus, da der Winkel θ alle möglichen Werthe annehmen kann. — In der That, multiplicirt man die Strecken

$$OM = \varrho\,(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad OM' = \varrho'\,(\cos\theta' \pm i\sin\theta'),$$

so hat das Product $OM \,.\, OM'$ den absoluten Betrag $\varrho\varrho'$ und die Neigung $\theta \pm \theta'$. Demnach ergiebt sich nach (7) in Nr. 6

$$\varrho\varrho'\,[\cos(\theta \pm \theta') + i\sin(\theta \pm \theta')]$$
$$= \varrho\varrho'\,\{\cos\theta\cos\theta' \mp \sin\theta\sin\theta' + i\,(\sin\theta\cos\theta' \pm \cos\theta\sin\theta')\},$$

woraus die genannten Additionstheoreme d. i. die Formeln

$$\begin{aligned} \cos(\theta \pm \theta') &= \cos\theta\cos\theta' \mp \sin\theta\sin\theta' \\ \sin(\theta \pm \theta') &= \sin\theta\cos\theta' \pm \cos\theta\sin\theta' \end{aligned} \tag{5}$$

folgen.

Damit in der Formel (3) und den daraus abgeleiteten nur Längenverhältnisse erscheinen, wählt man als Argument des Cosinus und Sinus den Quotienten

$$\tau = \overline{\text{arc } AM} : |OA|,$$

welcher ebenfalls für jeden Punkt M von b denselben Werth hat. Zufolge der Cyclometrie besteht zwischen ihm und dem Winkel $a\frown b$ in Secunden die Beziehung

$$\tau = a\frown b \,.\, \text{arc } 1'', \text{ wo arc } 1'' = \frac{\pi}{180\,.\,60^2} = \frac{1}{206264{,}8}$$

ist. π bedeutet die Ludolphsche Zahl $3{,}1415926536\cdots$ — Häufig wird an Stelle von arc $1''$ die davon wenig verschiedene Zahl $\sin 1''$ gesetzt.

$\cos\tau$, $\sin\tau$ sind eindeutige und stetige Functionen von τ für jeden Werth von τ und periodisch mit der Periode 2π. $\cos\tau$ nimmt von $\tau = 0$ bis $\tau = \pi$ beständig ab, von $\tau = \pi$ bis $\tau = 2\pi$ beständig zu; $\sin\tau$ nimmt zu von $\tau = -\frac{\pi}{2}$ bis $\tau = \frac{\pi}{2}$, ab von $\tau = \frac{\pi}{2}$ bis $\tau = \frac{3\pi}{2}$ u. s. f.

Die Stetigkeit von $\cos\tau$ und $\sin\tau$ für jeden Werth von τ folgt unmittelbar aus den Gleichungen (5). Darnach hat man bekanntlich z. B.

$$\cos(\tau + \Delta\tau) - \cos\tau = -2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\tau\sin(\tau + \tfrac{1}{2}\Delta\tau),$$

also, da allgemein $|\sin\tau| < |\tau|$ ist,

$$|\cos(\tau + \Delta\tau) - \cos\tau| < |\Delta\tau|.$$

Wird eine positive Zahl ε vorgelegt, so genügt mithin die Annahme $|\Delta\tau| < \varepsilon$, damit $|\cos(\tau + \Delta\tau) - \cos\tau| < \varepsilon$ ist (vgl. IX, 12 d. I. T).

Wegen späterer Anwendung ist noch zu erwähnen die Formel

$$\lim_{\tau = 0} \frac{\sin \tau}{\tau} = 1.$$

Errichtet man in A (Fig. 17) das Loth AT auf a, so hat man bekanntlich

$$| MP | < | \text{arc } AM | < | AT |,$$

also nach Division durch $| OA |$

$$\sin \tau < \tau < \frac{\sin \tau}{\cos \tau},$$

wobei man sich τ positiv und kleiner als π denkt, was ausreicht. Somit ergiebt sich

$$\cos \tau < \frac{\sin \tau}{\tau} < 1,$$

woraus wegen $\lim \cos \tau = 1$ bei $\lim \tau = 0$ die vorstehende Formel folgt. — Wir brauchen auch noch den Satz, dafs die Function $\sin \tau : \tau$, während τ von Null bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, beständig abnimmt. Es ist nämlich, falls

$$0 < \tau < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad 0 < \Delta\tau < \tfrac{1}{2}(\pi - \tau)$$

ist, die Differenz

$$\frac{\sin(\tau + \Delta\tau)}{\tau + \Delta\tau} - \frac{\sin \tau}{\tau} < \frac{\Delta\tau \cos \tau}{\tau(\tau + \Delta\tau)} \left\{ \tau - \frac{\sin \tau}{\cos \tau} \right\},$$

also sicher negativ.

Die übrigen trigonometrischen Functionen werden als rationale Functionen von $\cos \tau$ $\sin \tau$ eingeführt:

$$\tan \tau = \frac{\sin \tau}{\cos \tau} \quad \cot \tau = \frac{\cos \tau}{\sin \tau} \quad \sec \tau = \frac{1}{\cos \tau} \quad \operatorname{cosec} \tau = \frac{1}{\sin \tau}.$$

Im Folgenden sind die Argumente der trigonometrischen Functionen, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist, stets als in Theilen des Radius gegeben anzusehen.

12. Die cyclometrischen Functionen.

Während ω von $-\frac{\pi}{2}$ zu $+\frac{\pi}{2}$ übergeht, wächst $\sin \omega$ beständig und zwar von -1 bis $+1$. Demnach bildet zufolge IX. 14 d. I. T. die den Werthen von τ im Intervalle $(-1, +1)$ entsprechende, zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegene Wurzel der Gleichung

$$\tau = \sin \omega$$

e eindeutige und stetige Function von τ, welche im Inter-
lle: $-1 \leqq \tau \leqq +1$ zugleich mit τ wächst. Bedeutet ω
se Wurzel der vorstehenden Gleichung, so genügt ihr aber
ch jeder der Werthe

$$\omega + 2k\pi \qquad (2k+1)\pi - \omega,$$

ter k eine beliebige ganze Zahl verstanden. Es ist dem-
ch die umgekehrte Function zum Sinus, welche Arcus
ius heifst, als unendlich-vieldeutig zu betrachten. Zu je-
n Werthe von τ im Intervalle $(-1, +1)$ gehört, wie
nerkt, ein und nur ein Werth der neuen Function, der
Intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ liegt. Er heifst der Haupt-
rth derselben und wird mit arc sin τ bezeichnet, während
sin τ irgend einen zu τ gehörigen Werth des Arcus sinus
leuten soll.

Aehnliche Bemerkungen lassen sich an die Gleichung

$$\tau = \tan \omega$$

üpfen. Zu jedem reellen Werthe von τ gehört nicht allein
und nur ein Werth ω zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, sondern
e Werthe $\omega + k\pi$. Sie bilden zusammen die unend-
h vieldeutige Function Arcus tangens. Der zwischen
$\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegende Werth derselben heifst ihr Haupt-
rth und wird mit arc tan τ bezeichnet, während Arc tan τ
end einen zu τ gehörigen Werth des Arcus tangens be-
uten soll.

Die Hauptwerthe der durch Umkehrung des Cosinus
d der Cotangente entstehenden Functionen Arcus cosinus
d Arcus cotangens sind bezw. durch die Gleichungen

$$\text{arc cos } \tau + \text{arc sin } \tau = \frac{\pi}{2} \qquad \text{arc cot } \tau + \text{arc tan } \tau = \frac{\pi}{2}$$

klärt, liegen also zwischen Null und π.

Producte und Quotienten von complexen Zahlen in trigonometrischer Form.

Durch wiederholte Anwendung der aus den Gleichungen (3) in Nr. 6 folgenden Formel

$$\begin{aligned}&\varrho\,[\cos\theta + i\sin\theta]\cdot\varrho'\,[\cos\theta' + i\sin\theta']\\ &= \varrho\varrho'\,[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]\end{aligned} \tag{6}$$

ergiebt sich

$$\begin{aligned}&\varrho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\varrho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdots\varrho_m(\cos\theta_m + i\sin\theta_m)\\ &= \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_m\,[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m)\\ &\quad + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m)].\end{aligned} \tag{7}$$

Wird hier

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_m = \varrho, \qquad \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_m = \theta$$

gesetzt, so erhält man die Moivre'sche Formel

$$[\varrho\,(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = \varrho^m\,(\cos m\theta + i\sin m\theta). \tag{8}$$

Wir haben ferner nach Nr. 7 die Formel

$$\frac{\varrho'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')}{\varrho\,(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{\varrho'}{\varrho}\,[\cos(\theta'-\theta) + i\sin(\theta'-\theta)]; \tag{9}$$

denn der absolute Betrag des links stehenden Quotienten ist $\varrho' : \varrho$, seine Neigung $\theta' - \theta$. Es ist leicht, sie mit Hilfe der Formeln (5) zu verificiren. Besondere Fälle von (9) sind die Formeln

$$\frac{1}{\varrho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{\varrho}\,(\cos\theta - i\sin\theta) \tag{10}$$

$$\frac{1}{\varrho^m\,(\cos\theta + i\sin\theta)^m} = \frac{1}{\varrho^m}\,(\cos m\theta - i\sin m\theta). \tag{11}$$

Die Formeln (7) und (8) können wie (6) zur Entwickelung der rechts stehenden Cosinusse und Sinusse benutzt werden. So liefert die Formel

$$\begin{aligned}&(\cos\theta + i\sin\theta)^m\\ &= \cos\theta^m + m\cos\theta^{m-1}\sin\theta\, i - \binom{m}{2}\cos\theta^{m-2}\sin\theta^2 + \cdots,\end{aligned}$$

indem man den reeellen Theil und den Coefficienten von i mit den entsprechenden Zahlen in (8) vergleicht, die Entwickelungen

$$\begin{aligned}\cos m\theta &= \cos\theta^m - \binom{m}{2}\cos\theta^{m-2}\sin\theta^2\\ &\quad + \binom{m}{4}\cos\theta^{m-4}\sin\theta^4 - \cdots\\ \sin m\theta &= m\cos\theta^{m-1}\sin\theta - \binom{m}{3}\cos\theta^{m-3}\sin\theta^3\\ &\quad + \binom{m}{5}\cos\theta^{m-5}\sin\theta^5 - \cdots\end{aligned} \tag{12}$$

Die Ausdrücke rechts sind soweit fortzusetzen, als der Index der Binomialcoefficienten m nicht übersteigt. Man hat also

$$\cos 2\theta = \cos\theta^2 - \sin\theta^2 \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

u. s. f.

Ist m gerade, so können $\cos m\theta$ und $\sin m\theta : \sin\theta\cos\theta$ u. s. f. als ganze Functionen sowohl von $\sin\theta$ als auch von $\cos\theta$ dargestellt werden, z. B.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin\theta^2 = 2\cos\theta^2 - 1.$$

Ist m ungerade, so sind $\cos m\theta : \cos\theta$ und $\sin m\theta : \sin\theta$ ganze Functionen sowohl von $\sin\theta$ als auch von $\cos\theta$. Vgl. VI. 11.

Mittelst der Formel (7) kann man ein jedes Glied einer ganzen Function einer endlichen Anzahl von complexen Zahlen in die Form

$$P(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

überführen, wo P ein Monom aus ihren absoluten Beträgen und Θ ein Aggregat von Vielfachen ihrer Neigungen ist. Hängt der Ausdruck nur von einer complexen Zahl t ab, so wird er auf diese Art in eine endliche trigonometrische Reihe verwandelt. Eine solche kann man z. B. für $\cos\theta^m$ und $\sin\theta^m$ erhalten, unter m eine natürliche Zahl verstanden [12]). Setzt man nämlich

$$\cos\theta + i\sin\theta = t \qquad \cos\theta - i\sin\theta = \text{conj. } t = t',$$

so ist

$$2\cos\theta = t + t' \qquad 2i\sin\theta = t - t'.$$

Man hat also, indem $tt' = 1$ ist,

$$(2\cos\theta)^m = (t + t')^m = t^m + mt^{m-2} + \binom{m}{2}t^{m-4} + \cdots\cdots + \binom{m}{2}t'^{m-4} + mt'^{m-2} + t'^m.$$

Hier stehen, falls $2r < m$ ist, nebeneinander die Glieder

$$\binom{m}{r}\{t^{m-2r} + t'^{m-2r}\} = 2\binom{m}{r}\cos(m-2r)\theta,$$

wie sich nach den Gleichungen (8) und (11) ergiebt. Wir finden daher bei ungeradem $m\ (= 2k-1)$

$$2^{2k-2}\cos\theta^{2k-1} = \cos(2k-1)\theta + (2k-1)\cos(2k-3)\theta + \binom{2k-1}{2}\cos(2k-5)\theta + \cdots + \binom{2k-1}{k-1}\cos\theta.$$

Ist m gerade und $= 2k$, so kommt im Ausdrucke rechts auch das Glied $\binom{2k}{k}$ vor, so dafs man hat

$$2^{2k-1}\cos\theta^{2k} = \cos 2k\theta + 2k\cos(2k-2)\theta + \binom{2k}{2}\cos(2k-4)\theta + \cdots + \binom{2k}{k-1}\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}\binom{2k}{k}.$$

Auf ähnliche Art ergeben sich die Formeln

$$(-1)^{k-1}\,2^{2k-2}\sin\theta^{2k-1} = \sin(2k-1)\theta - (2k-1)\sin(2k-3)\theta + \binom{2k-1}{2}\sin(2k-5)\theta - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{2k-1}{k-1}\sin\theta$$

$$(-1)^k\,2^{2k-1}\sin\theta^{2k} = \cos 2k\theta - 2k\cos(2k-2)\theta + \binom{2k}{2}\cos(2k-4)\theta - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{2k}{k-1}\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(-1)^k\binom{2k}{k}.$$

14. Die Hauptsätze der Trigonometrie im engeren Sinne folgen aus der Gleichung in Nr. 3

$$BC + CA + AB = 0, \tag{13}$$

wenn die Punkte $A\,B\,C$ nicht in gerader Linie liegen. Bezeichnen wir die positiven Richtungen in den Dreiecksseiten $BC\ CA\ AB$ bezw. mit $a\ b\ c$, so hat man nach (4*)

$$\begin{aligned} BC &= \overline{BC}\ \{\cos x\hat{}a + i \sin x\hat{}a\} \\ CA &= \overline{CA}\ \{\cos x\hat{}b + i \sin x\hat{}b\} \\ AB &= \overline{AB}\ \{\cos x\hat{}c + i \sin x\hat{}c\}\,. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (13) ein und zerlegt in reellen und imaginären Theil, so ergeben sich die Gleichungen

$$\overline{BC} \cos x\hat{}a + \overline{CA} \cos x\hat{}b + \overline{AB} \cos x\hat{}c = 0 \tag{14}$$

$$\overline{BC} \sin x\hat{}a + \overline{CA} \sin x\hat{}b + \overline{AB} \sin x\hat{}c = 0. \tag{15}$$

Multiplicirt man die erste mit $\sin x\hat{}a$ (bezw. $\sin x\hat{}b$), die zweite mit $\cos x\hat{}a$ (bezw. $\cos x\hat{}b$) und subtrahirt, so erhält man durch Anwendung der Formeln (5), da

$$x\hat{}a - x\hat{}b = a\hat{}b$$

ist u. s. w.,

$$\begin{aligned} \overline{CA} \sin b\hat{}a + \overline{AB} \sin c\hat{}a &= 0 \\ \overline{BC} \sin a\hat{}b + \overline{AB} \sin c\hat{}b &= 0 \end{aligned}$$

d. i. den verallgemeinerten Sinussatz:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin b\hat{}c} = \frac{\overline{CA}}{\sin c\hat{}a} = \frac{\overline{AB}}{\sin a\hat{}b}. \tag{16}$$

Multiplicirt man aber (14) mit $\cos x\hat{}a$ (bezw. $\cos x\hat{}b$, $\cos x\hat{}c$) und (15) mit $\sin x\hat{}a$ (bezw. $\sin x\hat{}b$, $\sin x\hat{}c$) und addirt, so ergeben sich nach (1) und (5) die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \overline{BC} + \overline{CA} \cos b\hat{}a + \overline{AB} \cos c\hat{}a &= 0 \\ \overline{BC} \cos a\hat{}b + \overline{CA} + \overline{AB} \cos c\hat{}b &= 0 \\ \overline{BC} \cos a\hat{}c + \overline{CA} \cos b\hat{}c + \overline{AB} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Multiplicirt man die erste derselben mit $\overline{BC}$, die zweite mit $\overline{AC}$, die dritte mit $\overline{BA}$ und addirt, so findet man den verallgemeinerten Cosinussatz

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 + 2\overline{CA} \cdot \overline{AB} \cos b\hat{}c.$$

Für die Dreiecksfläche ABC hat man nach Nr. 7 (Fig. 11)

$$2\triangle ABC = \overline{AB} \cdot \overline{HC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin c\frown b$$
$$= \overline{CA} \cdot \overline{AB} \sin b\frown c.$$

15.[13]) Die Gleichung (13) ergiebt sich auch vermittelst eines von Bellavitis und Möbius ausgesprochenen Uebertragungsprincipes aus der Geometrie der Geraden in die der Ebene: „Wenn man in einer Gleichung zwischen den von beliebigen Punkten einer Geraden gebildeten Strecken $\overline{MN}$ anstatt der $\overline{MN}$ Strecken MN zwischen beliebigen Punkten MN der Ebene setzt, so erhält man eine Gleichung unter diesen Strecken MN der Ebene."

Vermöge dieses Uebertragungsprincipes leitet man aus der bekannten quadratischen Relation zwischen den von vier Punkten $A\ B\ C\ D$ einer Geraden gebildeten sechs Strecken

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$$

die Streckengleichung

$$BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD = 0 \qquad (18)$$

worin $A\ B\ C\ D$ vier beliebige Punkte der Ebene und zwar, wenn wir etwas von der ersteren Formel Verschiedenes haben wollen, solche die nicht in einer Geraden liegen, bedeuten. Sie geht in der That gerade wie die erstere aus der Identität

$$\left(\frac{1}{DB} - \frac{1}{DC}\right) + \left(\frac{1}{DC} - \frac{1}{DA}\right) + \left(\frac{1}{DA} - \frac{1}{DB}\right) = 0$$

hervor.

Bezeichnet man die positiven Richtungen in den Strecken BC CA AB AD BD CD bezw. mit $a\ b\ c\ a'\ b'\ c'$, so hat man nach (*) und (16)

$$BC \,.\, AD = \overline{BC} \,.\, \overline{AD}\,[\cos(x\frown a + x\frown a')$$
$$+ i \sin(x\frown a + x\frown a')] = B_1 C_1$$
$$CA \,.\, BD = \overline{CA} \,.\, \overline{BD}\,[\cos(x\frown b + x\frown b')$$
$$+ i \sin(x\frown b + x\frown b')] = C_1 A_1$$

und somit nach (18)

$$B \,.\, CD = \overline{AB} \,.\, \overline{CD}\,[\cos(x\frown c + x\frown c')$$
$$+ i \sin(x\frown c + x\frown c')] = A_1 B_1 .$$

Bei der geometrischen Interpretation der Gleichung (18) hat man zu

unterscheiden, ob die Punkte A_1 B_1 C_1 eine Gerade oder ein Dreieck bilden. Im ersten Falle mufs

$$(x\frown c + x\frown c') - (x\frown b + x\frown b') = 0 \text{ oder } \pi$$

d. i.

$$2(x\frown c + x\frown c') - 2(x\frown b + x\frown b') = 2b\frown c + 2b'\frown c' = 2b\frown c' + 2b'\frown c = 0$$

sein. Die Gleichung $2b\frown c = 2c'\frown b'$ besagt, dafs die vier Punkte A B C D auf einem Kreise liegen. — Im zweiten Falle erfahren wir, dafs „es ein Dreieck $A_1 B_1 C_1$ giebt, dessen Seiten

$$\overline{B_1C_1} = \overline{BC}\,.\,\overline{AD} \quad \overline{C_1A_1} = \overline{CA}\,.\,\overline{BD} \quad \overline{A_1B_1} = \overline{AB}\,.\,\overline{CD}$$

und dessen Winkel

$$b_1\frown c_1 = x\frown c_1 - x\frown b_1 = b\frown c + b'\frown c' = b\frown c' + b'\frown c$$
$$c_1\frown a_1 = x\frown a_1 - x\frown c_1 = c\frown a + c'\frown a' = c\frown a' + c'\frown a$$
$$a_1\frown b_1 = x\frown b_1 - x\frown a_1 = a\frown b + a'\frown b' = a\frown b' + a'\frown b$$

sind, wenn mit a_1 b_1 c_1 die positiven Richtungen in den Seiten B_1C_1 C_1A_1 A_1B_1, welche nach den soeben angeführten Werthen derselben zu bestimmen sind, bezeichnet werden.“ Es ist leicht, Dreiecke A_2 B_2 C_2 zu construiren, welche mit A_1 B_1 C_1 einstimmig ähnlich sind, so dafs man hat

$$\frac{B_2C_2}{BC\,.\,AD} = \frac{C_2A_2}{CA\,.\,BD} = \frac{A_2B_2}{AB\,.\,CD}.$$

Da man zwei Ecken willkürlich annehmen darf, so möge B_2 mit B, C_2 mit C zusammenfallen. Dann folgt wegen $B_2C_2 = BC$

$$\frac{1}{AD} = \frac{CA_2}{CA\,.\,BD}$$

d. i.

$$\frac{DB}{DA} = \frac{CA_2}{CA}.$$

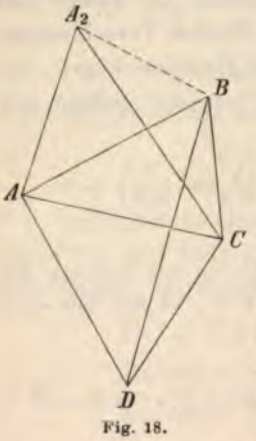


Fig. 18.

A_2 wird somit nach Nr. 7 gefunden, indem man das Dreieck $ACA_2 \stackrel{+}{\sim} ADB$ construirt (Fig. 18). Das gesuchte Dreieck ist mithin A_2BC. Man kann auch für B_2 A, C_2 D; für C_2 C, für A_2 A u. s. w. nehmen, so dafs man sechs Dreiecke A_2 B_2 C_2 erhält. Wenn A B C in einer Geraden liegen, D aber nicht in ihr, so ist zu $A_1B_1C_1$ ein Dreieck einstimmig ähnlich, dessen Seiten B_1C_1 C_1A_1 A_1B_1 bezw. mit AD BD CD parallel sind. Denn, indem die Richtungen a b c zusammenfallen, hat man

$$b_1\frown c_1 = b'\frown c' \quad c_1\frown a_1 = c'\frown a' \quad a_1\frown b_1 = a'\frown b'.$$

Setzt man den reellen Theil und den Coefficienten von i in der rechten Seite von (18) gleich Null, so erhält man zwei Gleichungen

aus welchen man auf ähnliche Weise, wie (16) (17) aus (14) (15), die Formeln

$$\frac{\overline{BC}\,.\,\overline{AD}}{\sin b_1 \frown c_1} = \frac{\overline{CA}\,.\,\overline{BD}}{\sin c_1 \frown a_1} = \frac{\overline{AB}\,.\,\overline{CD}}{\sin a_1 \frown b_1}$$

$$\overline{BC}\,.\,\overline{AD} + \overline{CA}\,.\,\overline{BD}\cos b_1 \frown a_1 + \overline{AB}\,.\,\overline{CD}\cos c_1 \frown a_1 = 0$$

u. s. w. gewinnt. — Im Falle dafs $ABCD$ ein Kreisviereck ist, verlieren die ersteren jegliche Bedeutung, jede der letzteren liefert den ptolemäischen Satz, indem

$$\cos b_1 \frown c_1 = \pm 1 \qquad \cos c_1 \frown a_1 = \pm 1 \qquad \cos a_1 \frown b_1 = \pm 1$$

ist. Um die Zeichen der drei Glieder näher zu bestimmen, lassen wir die sechs Seiten des Vierecks $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ u. s. w. positiv sein. Demnach hat man

$$b_1 \frown c_1 = b \frown c + b' \frown c' = CA \frown AB + BD \frown CD$$
$$= \pi + \overset{\frown}{BDC} - \overset{\frown}{BAC},$$

woraus ersichtlich ist, dafs $\cos b_1 \frown c_1 = -1$ oder $+1$ ist, je nachdem A und D auf der gleichen oder auf entgegengesetzten Seiten von C liegen d. i. je nachdem die Dreiecksflächen BCA und BCD sich oder entgegengesetzt bezeichnet sind. Analog ist

$$\cos c_1 \frown a_1 = -1 \text{ oder } +1,$$

nachdem die Dreiecksflächen CAB und CAD;

$$\cos a_1 \frown b_1 = -1 \text{ oder } +1,$$

nachdem ABC und ABD gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Mithin sind in dem Ptolemäischen Satze

$$\pm |BC\,.\,AD| \pm |CA\,.\,BD| \pm |AB\,.\,CD| = 0 \qquad (19)$$

die Glieder $|BC\,.\,AD|$ u. s. w. nacheinander mit den Zeichen der Dreiecksflächen ABC, ADB, ACD zu versehen. — Der Ptolemäische Satz läfst sich umkehren: „Besteht für ein Viereck die Gleichung (19), so mufs es ein Kreisviereck sein.“ Denn in jedem anderen Falle bilden $A_1\,B_1\,C_1$ ein Dreieck, also kann die Länge einer Seite nicht gleich der Summe oder Differenz der Längen der beiden anderen sein.

16. Schnitt- und Doppelverhältnisse von Punkten der Ebene.

Aus den Formeln (4*) (9) folgt, dafs wenn $g\ h$ die positiven Richtungen in den Geraden $AB\ CD$ bedeuten,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}(\cos h \frown g + i \sin h \frown g)$$

ist. Insbesondere erhält man für das Schnittverhältnifs der drei Punkte ABC in der Ebene

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} (\cos b\frown a + i \sin b\frown a), \qquad (20)$$

unter a b die positiven Richtungen in den Geraden AC CB verstanden. Nimmt man $a \equiv CA$, $b \equiv CB$, so folgt

$$\frac{AC}{CB} = - \left|\frac{AC}{CB}\right| (\cos B\widehat{C}A + i \sin B\widehat{C}A). \qquad (21)$$

Wenn die Punkte A B fest bleiben, so kann das Schnittverhältnifs $AC : CB$ durch passende Annahme von C jeden beliebigen Werth aufser Null und -1 erhalten. Liegt C in der Geraden AB, so ist, wie schon in Nr. 4 hervorgehoben wurde,

$$AC : CB = \overline{AC} : \overline{CB},$$

so dafs in diesem Falle $AC : CB$ jeden reellen Werth aufser Null und -1 annimmt (vgl. VII. 13 d. I. T.). Um

$$AC : CB = \varrho (\cos\theta + i \sin\theta) \quad (\varrho > 0)$$

zu machen, wo $\sin\theta$ nicht Null ist, construire man (Fig. 19) den Winkel $B\widehat{A}T = \pi + \theta$ und beschreibe einen Kreis, der durch die Punkte A B geht und AT berührt. Ermittelt man den Punkt H auf AB, wofür

$$\overline{AH} : \overline{HB} = \varrho$$

ist, halbirt denjenigen der Kreisbögen AB, der auf derselben Seite von AB liegt wie T, in K und zieht KH, so ist der zweite Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreise der gesuchte Punkt C. In der That ist

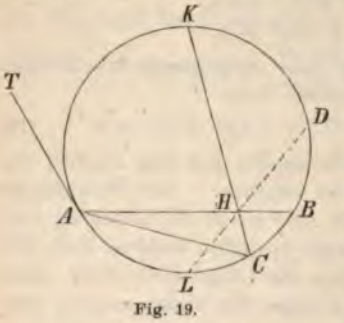


Fig. 19.

$$B\widehat{C}A = B\widehat{A}T = \pi + \theta$$

$$|AC| : |CB| = \overline{AH} : \overline{HB} = \varrho.$$

Den Zahlen Null, -1 ordnen wir die uneigentlichen Schnittverhältnisse zu, das des Punktes A und das des einzigen uneigentlichen Punktes U der Ebene (vgl. III. 5) gegen die festen Punkte A B. Da für sie der bisher benutzte Ausdruck des Schnittverhältnisses mittelst der Strecken AC CB keinen

hat, so führen wir für dasselbe die neue Bezeichnung
, C) ein, so dafs man hat

$$(AB, C) = AC : CB$$

er

$$(AB, A) = 0 \qquad (AB, U) = -1.$$

lich sagt man, (AB, B) sei unendlich d. i.

$$1 : (AB, B) = 0$$

, wenn man jedes Schnittverhältnifs durch einen Quoten $x_1 : x_2$ ersetzt und hinterher in den Formeln die ner weggeschafft, so entspreche dem Punkte B das Werthem $x_1 = a\ x_2 = 0$, wo a jede von Null verschiedene l sein darf.

Der Quotient der beiden Schnittverhältnisse

$$(AB, C) : (AB, D)$$

st das Doppelverhältnifs der vier Punkte $AB\ CD$ Ebene und wird kurz mit $(ABCD)$ bezeichnet. Hat a es mit vier eigentlichen Punkten zu thun, so seien die itiven Richtungen in den Geraden $AC\ CB\ AD\ DB$ $a\ b$ b', so dafs man neben (20) hat

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} (\cos b'\frown a' + i \sin b'\frown a')$$

BCD)

$$= \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\right) [\cos (b\frown a - b'\frown a') + \sin (b\frown a - b'\frown a')].$$

Setzt man

$$OA = a \quad OB = b \quad OC = c \quad OD = d,$$

hat man

$$(ABCD) = \frac{a-c}{c-b} : \frac{a-d}{d-b}. \qquad (22)$$

gen die vier Punkte $A\ B\ C\ D$ in einer Geraden, so ist Doppelverhältnifs reell. Sonst hat es dann und nur dann en reellen Werth, wenn sie auf einem Kreise liegen. l nämlich der vorstehende Ausdruck reell sein, so mufs

$b\frown a - b'\frown a' = 0$ oder π d. i. $2b\frown a = 2b'\frown a'$

n. Die uneigentlichen Doppelverhältnisse sind

$$ABAC) = (ABCB) = 0 \qquad (AABC) = (ABCC) = 1$$
$$(ABCA) = (ABBC) = \infty.$$

Auf dieselbe Art, wie in der neueren Geometrie, gelangt man zu den singulären Doppelverhältnissen. Es sind einerseits die harmonischen -1, 2, $\frac{1}{2}$; andererseits die äquianharmonischen

$$\tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}).$$

Wenn

$$(ABCD) = -1$$

ist und es liegen die Punkte $A\ B\ C\ D$ nicht auf einer Geraden, so liegen sie auf einem Kreise. Sind $A\ B\ C$ gegeben, so findet man D, indem man den Kreis durch ABC construirt (Fig. 19), den Bogen ACB in L halbirt, L mit dem Punkte H, wo AB von der Halbirungslinie des Winkels $\widehat{ACB}$ getroffen wird, verbindet. Der zweite Schnittpunkt von LH mit dem Kreise ABC ist der gesuchte Punkt D.

Allgemeine Wurzeln und Potenzen mit reellen Exponenten.

17. Die Wurzeln aus complexen Zahlen.

Die Gleichung

$$x^m = a,$$

worin a eine beliebige, von Null verschiedene complexe Zahl bedeutet, hat genau m von einander verschiedene Auflösungen.

Sind in der trigonometrischen Form

$$a = \mathsf{A}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$x = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

so ist dazu dafs $x^m = a$ sei, nothwendig und hinreichend, dafs

$$\varrho^m = \mathsf{A} \qquad m\theta = \alpha + 2k\pi$$

ist, wo k jede ganze Zahl sein kann. Man findet mithin, dafs ϱ nur die absolute m^{te} Wurzel aus der positiven Zahl A, θ aber ein jeder der Werthe

$$\theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{m}$$

sein kann. Dabei darf man sich auf die Annahmen

$$k = 0, 1, \ldots\ m - 1$$

beschränken, da bei jeder anderen wieder eine der diesen Werthen von k entsprechenden Zahlen herauskommt. Diese

m Werthe von $\sqrt[m]{a}$ sind aber unter sich verschieden; demnach ist die m^{te} Wurzel aus a m-deutig. Das Gesagte gilt auch, wenn a reell, insbesondere gleich der positiven Zahl A ist. Von dem m Werthen von $\sqrt[m]{A}$ ist nur einer reell und positiv. Dieser Werth giebt den absoluten Betrag aller übrigen an, so dafs wir ihn mit $\left|\sqrt[m]{A}\right|$ bezeichnen können. Somit läfst sich die allgemeine $\sqrt[m]{a}$ durch die Formel

$$\sqrt[m]{a} = \left|\sqrt[m]{A}\right| \cdot \left\{\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i \sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right\} \qquad (a)$$

darstellen. Denken wir uns α so angenommen, dafs

$$-\pi < \alpha \leq \pi$$

ist, so heifst der $k = 0$ entsprechende Werth von $\sqrt[m]{a}$ d. i.

$$\left|\sqrt[m]{A}\right| \left\{\cos\frac{\alpha}{m} + i \sin\frac{\alpha}{m}\right\} \qquad (b)$$

der Hauptwerth dieser Wurzel. Ist a reell und positiv, so ist darunter die positive reelle m^{te} Wurzel aus a zu verstehen.

Aus jedem Werthe von $\sqrt[m]{a}$ gehen die anderen hervor durch Multiplication mit den Factoren

$$c_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i \sin\frac{2k\pi}{m}$$

$$(k = 1, 2 \ldots m - 1),$$

welche neben $x = 1$ die Auflösungen der Gleichung $x^m = 1$ bilden und daher m^{te} Wurzeln der Einheit heifsen. Primitiv unter ihnen heifsen diejenigen, von welchen keine niedrigere als die m^{te} Potenz gleich 1 ist. Soll

$$c_k^n = \cos\frac{2nk\pi}{m} + i \sin\frac{2nk\pi}{m} = 1$$

sein, so mufs $nk : m$ eine ganze Zahl sein, was falls k m relative Primzahlen sind, nur möglich ist, wenn n durch m theilbar ist. Primitiv sind somit alle Wurzeln e_k, worin k m relativ prim sind und, wie leicht ersichtlich, nur diese. Bezeichnet man mit e irgend eine primitive m^{te} Wurzel der Einheit, so sind sämmtliche m^{te} Wurzeln der Einheit durch

$$1 \; e \; e^2 \ldots e^{m-1}$$

dargestellt. Dafs jede Potenz e^r die Gleichung $x^m = 1$ befriedigt, erhellt unmittelbar; dafs e^r und e^s, falls r und s kleiner als m sind, von einander verschieden sind, folgt daraus, dafs $r - s$ nicht durch m theilbar ist.

Satz. „Die Summe der n^{ten} Potenzen der m verschiedenen m^{ten} Wurzeln der Einheit ist m oder 0, je nachdem n durch m theilbar oder nicht." — Der erste Theil des Satzes ist unmittelbar ersichtlich. Hinsichtlich des zweiten bemerke man, dafs wenn e eine primitive m^{te} Wurzel der Einheit ist,

$$e_0 = 1 \quad e_1 = e \quad e_2 = e^2 \ldots e_{m-1} = e^{m-1}$$

gesetzt werden kann, so dafs man hat

$$e_0^n + e_1^n + \cdots + e_{m-1}^n = 1 + e^n + e^{2n} + \cdots + e^{(m-1)n}$$
$$= (1 - e^{mn}) : (1 - e^n) = 0 .$$

Denn es ist $e^m = 1$, e^n aber von 1 verschieden.

Um die m^{ten} Wurzeln aus der Strecke a geometrisch darzustellen, schlägt man vom Nullpunkte einen Kreis mit dem Radius $|\sqrt[m]{A}|$, bestimmt darauf den Endpunkt des Hauptwerthes (b) mittelst seiner Neigung $\alpha : m$ und theilt von ihm aus den Kreis in m gleiche Theile. Die m Punkte dieser Theilung bezeichnen die Endpunkte der m verschiedenen, in dem Ausdrucke (a) enthaltenen Werthe.

18. Sätze über die allgemeinen Wurzeln.

Wegen der Vieldeutigkeit der m^{ten} Wurzeln erleiden die Sätze 1) — 5) in VIII. 5 d. I. T. einige Veränderungen.

1) Jede m^{te} Wurzel aus a^n ist auch eine mp^{te} Wurzel aus a^{np}, das Umgekehrte gilt dann und nur dann, wenn in dem Ausdrucke

$$\sqrt[mp]{a^{np}} = \left|\sqrt[m]{A^n}\right| \left(\cos \frac{np\alpha + 2h\pi}{mp} + i \sin \frac{np\alpha + 2h\pi}{mp}\right)$$

die ganze Zahl h durch p theilbar ist." — Setzt man hier für h Vielfache von p, so erhält man alle Werthe von

$$\sqrt[m]{a^n} = \left|\sqrt[m]{A^n}\right| \left(\cos \frac{n\alpha + 2l\pi}{m} + i \sin \frac{n\alpha + 2l\pi}{m}\right). \qquad (c)$$

Soll aber der erste Ausdruck bei gegebenem h in den zweiten übergehen, so müssen ganze Zahlen l l' existiren, wofür

$$\frac{np\alpha + 2h\pi}{mp} = \frac{n\alpha + 2l\pi}{m} + 2l'\pi ,$$

also

$$h = p(l + l'm)$$

ist. Demnach muſs h durch p theilbar sein. Ist das der Fall, so giebt es bekanntlich immer ganze Zahlen l l', welche die letzte Gleichung befriedigen.

2) „Die n^{te} Potenz einer jeden m^{ten} Wurzel aus a ist eine m^{te} Wurzel aus a^n, umgekehrt ist eine m^{te} Wurzel aus a^n dann und nur dann die n^{te} Potenz einer m^{ten} Wurzel aus a, wenn die Zahl l in (c) durch den gemeinsamen Theiler von m n theilbar ist, also stets falls m n relative Primzahlen sind.“ — Um aus (c) die Werthe von

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \left|\sqrt[m]{A^n}\right| \cdot \left(\cos\frac{n\alpha + 2nk\pi}{m} + i\sin\frac{n\alpha + 2nk\pi}{m}\right) \quad \text{(d)}$$

zu erhalten, braucht man nur l Vielfache von n sein zu lassen. Damit aber (c) bei gegebenem l ein Werth von (d) sei, ist nothwendig und hinreichend, daſs es ganze Zahlen k k' gebe, wofür

$$l = nk + mk'$$

ist. Das ist bekanntlich stets der Fall, wenn m n relative Primzahlen sind und falls sie das nicht sind, wenn l durch den gemeinsamen Theiler von m und n theilbar ist.

Die Gleichungen

$$3)\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \qquad 4)\ \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$$

$$5)\ \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a:b}$$

sind nach der Bezeichnung von M. Ohm[14]) vollkommen d. h. jeder Werth der linken Seite ist auch ein Werth der rechten, und umgekehrt. — Ist $\sqrt[m]{a} = x$ und $\sqrt[n]{x} = y$, so hat man

$$a = x^m \quad x = y^n \quad \text{also} \quad a = y^{mn} \quad y = \sqrt[mn]{a}.$$

Ist umgekehrt y eine mn^{te} Wurzel aus a, so hat man

$$a = y^{mn} = (y^n)^m,$$

also

$$y^n = \sqrt[m]{a} \quad y = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Auf ähnliche Weise werden 4) und 5) bewiesen, wovon die letztere auch als eine unmittelbare Folgerung aus der ersteren dargestellt werden kann.

Gewöhnlich wird unter $\sqrt[m]{a}$ der Hauptwerth der m^{ten} Wurzel verstanden, also wenn a reell und positiv ist, der reelle und positive Werth von $\sqrt[m]{a}$. Von den Sätzen 1)—5) gilt nur der dritte für die Hauptwerthe der bez. Wurzeln unbedingt.

19. Potenzen von complexen Zahlen mit reellen Exponenten.

Um den Begriff der Potenz auf reelle Werthe des Exponenten zu erweitern, reichen ähnliche Betrachtungen, wie die in VIII, 6—8 d. I. T. angestellten, aus. Damit gelangen wir zugleich zur Lösung der Aufgabe[15]), sämmtliche eindeutigen und stetigen (reellen oder complexen) Functionen $f(\xi)$ (vgl. III, 1) der alle endlichen Werthe durchlaufenden reellen Veränderlichen ξ zu bestimmen, welche, was ξ η für reelle Zahlen auch sein mögen, der Functionalgleichung

$$f(\xi) \cdot f(\eta) = f(\xi + \eta)$$

und aufserdem der Bedingung

$$f(1) = a$$

genügen — unter a irgend eine von Null verschiedene complexe Zahl verstanden. Daraus ergiebt sich nothwendig

$$f(0) = 1 \quad f(n) = a^n \quad a^{-n} = f(-n) = 1 : a^n, \qquad (e)$$

worin n irgend eine natürliche Zahl bedeutet. Ferner hat man, wenn

$$A(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

die trigonometrische Form der Zahl a ist,

$$a^{\frac{1}{n}} = f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \qquad (f)$$

und falls m irgend eine ganze Zahl bedeutet,

$$a^{\frac{m}{n}} = f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad (g)$$

$$= \sqrt[n]{A^m}\left(\cos\frac{m}{n}(\alpha + 2k\pi) + i \sin\frac{m}{n}(\alpha + 2k\pi)\right),$$

wo k eine beliebige ganze Zahl sein kann. Die rechte Seite der letzten Gleichung hängt in der That nur vom Werthe $m : n$ ab.

Bedeutet ξ die reelle irrationale Zahl (φ_n), wo φ_n rational ist, so bilden wir zunächst

$$a^{\varphi_n} = f(\varphi_n)$$
$$= |A^{\varphi_n}| \{\cos\varphi_n(\alpha + 2k\pi) + i \sin\varphi_n(\alpha + 2k\pi)\}.$$

nken wir uns hier die ganze Zahl k constant und lassen
ns Unendliche wachsen, so nähert sich der absolute Be-
g des Ausdruckes auf der rechten Seite dem Grenzwerthe
im Sinne von VIII. 8 d. I. T. und es haben

$$\cos \varphi_n (\alpha + 2k\pi)$$
$$\sin \varphi_n (\alpha + 2k\pi)$$

gen der Stetigkeit des Cosinus und Sinus bei jedem reel-
Werthe des Argumentes bezw. die Grenzwerthe

$$\cos \xi (\alpha + 2k\pi)$$
$$\sin \xi (\alpha + 2k\pi).$$

r erhalten demnach, jedem Werthe von k entsprechend,
$\lim n = +\infty$ einen Grenzwerth, der sich nicht ändert,
an ξ durch eine gleiche Zahl ersetzt wird. Keine zwei
ser Grenzwerthe sind einander gleich, jedoch alle vom
nlichen absoluten Betrage. Jeder von ihnen soll ein
erth von a^ξ heifsen. Das Gesagte gilt insbesondere auch
A^ξ. Von den Werthen dieser Potenz ist nur der $k = 0$
sprechende reell und zwar positiv. Dieser Werth von A^ξ
mt überein mit der a. a. O. definirten Potenz von A
Exponenten ξ und kann, da er den absoluten Betrag aller
rthe von A^ξ angiebt, mit $|A^\xi|$ bezeichnet werden. So-
definiren wir a^ξ durch die Formel[16])

$$a^\xi = |A^\xi| \{\cos \xi(\alpha + 2k\pi) + i \sin \xi(\alpha + 2k\pi)\}, \quad \text{(h)}$$

er k irgend eine ganze Zahl verstanden. Sie umfafst als
ondere Fälle die Formeln (e) (f) (g). Die obige Auf-
be wird nun zufolge der Formel (6) in Nr. 13 und III. 1
ch alle Functionen

$$f(\xi) = |A^\xi| \{\cos \xi(\alpha + 2k\pi) + i \sin \xi(\alpha + 2k\pi)\}, \quad \text{(i)}$$

rin k eine constante ganze Zahl bedeutet, gelöst und
r durch sie.

Die Potenz a^ξ hat, je nachdem ξ eine ganze, gebrochene
r irrationale Zahl ist, einen, endlich oder unendlich viele
rthe. Beschränkt man α auf solche Bögen, dafs

$$-\pi < \alpha \leq +\pi$$

so heifst der zu $k = 0$ gehörige Werth von a^ξ der Haupt-
rth dieser Potenz. (Vgl. VI. 4.) Bei positivem a ist es

der reelle positive Werth von a^ξ. Für $\xi = 1 : n$ (natürliche Zahl) geht er in den Hauptwerth $\sqrt[n]{a}$ über. Gewöhnlich bedeutet das Zeichen a^ξ den Hauptwerth dieser Potenz. — 0^ξ ist 0 oder ∞, je nachdem ξ positiv oder negativ ist, 0^0 bleibt unbestimmt.

Was die für Potenzen bisher als giltig erwiesenen Relationen

$$a^\xi \cdot a^\eta = a^{\xi+\eta} \qquad a^\xi : a^\eta = a^{\xi-\eta}$$
$$(a^\xi)^\eta = a^{\xi\eta} \qquad a^\xi \cdot b^\xi = (ab)^\xi$$

betrifft, so ist nur die letzte eine vollkommene Gleichung. In den anderen bildet wohl jeder Werth der rechten Seite einen der linken, aber nicht umgekehrt jeder Werth der linken Seite stets einen der rechten. Sind ξ η rational und zwar in reducirter Form $\xi = m : n$, $\eta = p : q$, so ist $a^\xi \cdot a^\eta$ sicher ein Werth von $a^{\xi+\eta}$ und $a^\xi : a^\eta$ von $a^{\xi-\eta}$, wenn $n\,q$ relative Primzahlen sind, und $(a^\xi)^\eta$ einer von $a^{\xi\eta}$, wenn $m\,q$ relative Primzahlen sind. Bedeuten die Zeichen a^ξ u. s. w. die Hauptwerthe, so gilt die erste und zweite Formel stets, die dritte sicher dann, wenn η eine ganze Zahl ist.

Gestützt auf die Formel (h) kann man nach Schlömilch[17]) zur Definition des Hauptwerthes der Potenz e^x oder der Exponentialfunction (vgl. VI. 4) für nicht-reelle Werthe von x gelangen. Man versteht darunter den Grenzwerth des Hauptwerthes von $\left(1 + \frac{x}{\tau}\right)^\tau$, wo τ eine reelle Veränderliche bedeutet, bei

$$\lim \tau = +\infty \text{ (oder } -\infty).$$

In der That stimmt dieser Grenzwerth bei reellem x mit e^x überein. Es ist dann nicht schwer zu zeigen, dafs wenn

$$x = \xi + \eta i$$

gesetzt wird,

$$e^x = \lim_{\tau=+\infty} \left(1 + \frac{x}{\tau}\right)^\tau = e^\xi (\cos\eta + i \sin\eta)$$

ist.

III. Abschnitt.

Complexe Veränderliche und Functionen.

1. Unter einer eindeutigen complexen Function der reellen Veränderlichen τ versteht man die Gesammtheit der Werthe

$$f(\tau) = \varphi(\tau) + i\psi(\tau),$$

worin $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ eindeutige reelle Functionen von τ bedeuten, welche für denselben Bereich von τ definirt sind.

Man sagt, dafs die complexe Function $f(\tau)$ bei irgend einem Grenzübergange von τ z. B.

$$\lim \tau = \tau_0 + 0$$

einen endlichen Grenzwerth

$$b = \varkappa + \lambda i$$

hat, wenn bei demselben $\varphi(\tau)$ $\psi(\tau)$ bez. den Grenzwerthen $\varkappa$ λ sich nähern. Diese Erklärung stimmt überein mit der folgenden, die gleichlautend ist mit der des endlichen Grenzwerthes einer reellen Function von τ (vgl. IX. 5 d. I. T.): „$f(\tau)$ hat bei

$$\lim \tau = \tau_0 + 0$$

den Grenzwerth b, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ gehört, derart dafs

$$| f(\tau) - b | < \varepsilon$$

ist, wenn τ irgend einen zwischen τ_0 und $\tau_0 + \delta$ gelegenen Werth seines Bereiches erhält.“ Denn man schliefst hieraus wegen

$$| f(\tau) - b | = \sqrt{[\varphi(\tau) - \varkappa]^2 + [\psi(\tau) - \lambda]^2},$$

dafs wenn τ einen der soeben erwähnten Werthe annimmt,

$$|\varphi(\tau) - \varkappa| < \varepsilon \qquad |\psi(\tau) - \lambda| < \varepsilon$$

ist, somit

$$\lim \varphi(\tau) = \varkappa \qquad \lim \psi(\tau) = \lambda$$

bei

$$\lim \tau = \tau_0 + 0$$

ist. — Wenn $|f(\tau)|$ bei $\lim \tau = \tau_0 + 0$ den Grenzwerth $+\infty$ besitzt, so sagt man, dafs $f(\tau)$ beim genannten Grenzübergang unendlich wird. — Diese Erklärungen führen zu den nämlichen Folgerungen, wie die entsprechenden a. a. O. (Vgl. Nr. 7.)

$f(\tau)$ heifst stetig bei $\tau = \tau_0$, wenn sowohl die Function $\varphi(\tau)$, als auch $\psi(\tau)$ bei $\tau = \tau_0$ stetig ist, was durch dieselbe Definition wie in IX. 12 d. I. T. ersetzt werden kann. Eine für alle endlichen Werthe des reellen Argumentes stetige Function ist in II. 19 angeführt, der durch die Gleichung (i) erklärte eindeutige Zweig der Exponentialfunction.

Auf ähnliche Weise werden complexe Functionen von zwei und von mehreren reellen Veränderlichen gebildet. Auf dieselben lassen sich die in IX. 18—21 d. I. T. aufgeführten Begriffe und Bezeichnungen unmittelbar übertragen.

2. Geometrische Darstellung der complexen Functionen einer reellen Veränderlichen τ.

Wir nehmen an, dafs τ innerhalb des ihm zugewiesenen Intervalles (α, β) beständig zunehme und abgesehen von dem darin vielleicht vorkommenden Sprung von

$$\tau = +\infty \text{ zu } \tau = -\infty$$

stetig sei. Verzeichnet man in der Constructionsebene der complexen Zahlen mit den rechtwinkligen Axen XX' YY' die Curve, deren Punkte durch die Coordinaten

$$\xi = \varphi(\tau) \qquad \eta = \psi(\tau)$$

bestimmt sind, während τ das Intervall (α, β) durchläuft; so liefern die vom Nullpunkte O zu diesen Punkten gezogenen Strecken oder kürzer die von ihren Endpunkten gebildete Curve eine Darstellung der complexen Function

$$\varphi(\tau) + i\psi(\tau) = f(\tau).$$

ehrt kann man verlangen, zu einer geometrisch defi-
Curve eine Function $f(\tau)$ zu finden.

eispiele. 1) Die Gerade AB, wovon M ein beliebiger
sein soll, läfst sich darstellen durch die Gleichung

$$x = a + (b - a)\tau, \qquad (1)$$

$\tau = OM$ $a = OA$ $b = OB$ ist. Beschränkt man τ
s Intervall (0, 1), so giebt die Formel die Strecke
eht τ von $-\infty$ bis 0, so giebt sie die Verlängerung
B über A hinaus; geht τ von 1 bis $+\infty$, so die
gerung von AB über B hinaus. Für die Gerade durch
nkt A mit der positiven Richtung g findet man nach
1 II, 11

$$x = a + \tau\,\{\cos x\widehat{\ }g + i \sin x\widehat{\ }g\}, \qquad (2)$$

$\tau = \overline{AM}$ ist. Umgekehrt bedeutet die Gleichung

$$x = a + b\tau$$

rade, welche durch A parallel zur Strecke $OB = b$
n ist.

[1]) Für die Punkte M eines Kreises vom Mittelpunkte
Radius ϱ besteht die Relation

$$|x - c| = \varrho \quad (OM = x \quad OC = c).$$

enken wir uns den Kreis von einem Punkte R aus in
em bezw. negativem Sinne beschrieben, so ergiebt sich
die Gleichung

$$x - c = r(\cos\theta \mp i \sin\theta),$$

$? = r$ ist und θ von 0 bis 2π geht. Um für $x - c$
in τ rationalen Ausdruck zu erhalten, führt man in
Gleichung

$$\tan\tfrac{1}{2}\theta = \tau \qquad \cos\theta = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} \qquad \sin\theta = \frac{2\tau}{1 + \tau^2}$$

, dafs

$$x - c = r\,\frac{1 \pm \tau i}{1 \mp \tau i} \qquad (3)$$

Während τ von $-\infty$ bis $+\infty$ übergeht, durchläuft
ganzen Kreis im Falle des oberen Zeichens im posi-
n Falle des unteren im negativen Sinne.

Um umgekehrt die Bedeutung der gebrochenen linearen Function von τ

$$x = \frac{a + b\tau}{c + d\tau},$$

worin c, d, $ad - bc$ nicht 0 sein und τ von $-\infty$ bei $+\infty$ gehen soll, zu untersuchen, dividirt man im Zähler und Nenner durch c. Man setze

$$\frac{a}{c} = p = OP \quad \frac{d}{c} = -r \quad \frac{b}{c} = -qr \quad q = OQ,$$

sodafs man

$$x = \frac{p - qr\tau}{1 - r\tau} \qquad r\tau = \frac{p - x}{q - x} \tag{4}$$

findet. Ist r reell, so stellt die Function die Gerade PQ dar. Denn schreibt man für $-r\tau$ ω, so ergiebt sich

$$\omega = PM : MQ.$$

Ist $r = OR$ eine complexe Zahl $\varrho + \sigma i$, so beschreibt der Punkt M, während τ von $-\infty$ bis $+\infty$ übergeht, einen Kreis und zwar im positiven oder negativen Sinne, je nachdem σ positiv oder negativ ist. Bringen wir nämlich (4) nach Gleichung (21) in II. 16 auf die Form

$$r\tau = \frac{MP}{MQ} = \left|\frac{MP}{MQ}\right| \left\{\cos \widehat{QMP} + i \sin \widehat{QMP}\right\},$$

so erkennt man, dafs

$$\widehat{EOR} + \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} = \widehat{QMP} \qquad 2\widehat{EOR} = 2\widehat{QMP},$$

ist. Demnach liegt M auf dem Kreise, welcher durch die Punkte PQ geht und dessen Tangente in P durch den Winkel

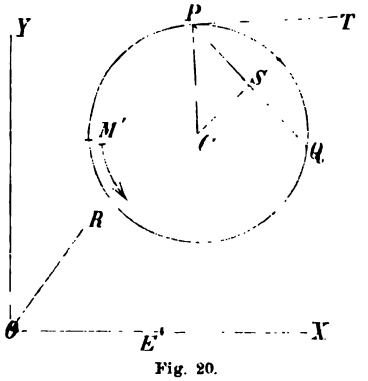


Fig. 20.

$$\widehat{QPT} = \widehat{EOR}$$

bestimmt ist (Fig. 20), denn es ist bekanntlich für alle Punkte dieses Kreises

$$2\widehat{QMP} = 2\widehat{QPT} = 2\widehat{EOR}.$$

Der Mittelpunkt C des Kreises ist der Schnittpunkt des im Mittelpunkte S von PQ auf PQ errichteten Perpendikels und der Normalen auf PT in P. Wenn $\varrho = 0$ ist, fällt C mit S zusammen. Der Sinn, in welchem der Kreis entsprechend den wachsenden Werthen von τ beschrieben wird, läfst sich angeben durch die Folge der Punkte

$$P, \quad OM' = \frac{p - qr\tau'}{1 - r\tau'} \ (\tau' > 0), \quad Q,$$

ren letzter zum Werthe $\tau = \pm\infty$ gehört. Er ist positiv oder nega-
, je nachdem M' auf der positiven oder negativen Seite der Strecke
P liegt, stimmt also nach II. 7 im Zeichen überein mit dem imagi-
ren Theile von

$$\frac{QM'}{QP} = \frac{1}{p-q}\left\{\frac{p-q\tau'}{1-r\tau'} - q\right\} = \frac{1}{1-r\tau'} = \frac{1-\varrho\tau'+\sigma\tau' i}{(1-\varrho\tau')^2+\sigma^2\tau'^2},$$

so mit σ.

Um die Coordinaten des Mittelpunktes C zu finden, führen wir in
) für τ die neue Veränderliche ω ein durch die reelle Substitution

$$\tau = \omega : (\mu + \nu\omega),$$

odurch der Nenner in

$$(\mu + \nu\omega) - (\varrho + \sigma i)\omega = \mu + (\nu - \varrho)\omega - \sigma\omega i$$

ergeht. Um ihn auf die Form $\varkappa(1 \mp \omega i)$ zu bringen, haben wir

$$\nu = \varrho \qquad \varkappa = \mu = \varepsilon\sigma$$

setzen, wo $\varepsilon = \pm 1$ und zwar im Zeichen mit σ übereinstimmen
ll, damit τ zugleich mit ω wächst. Nunmehr ergiebt sich

$$x - c = \frac{\varepsilon\sigma(p-c) + [\varrho p - (\varrho + \sigma i)q + \sigma c i]\omega}{\varepsilon\sigma(1 - \varepsilon\omega i)}.$$

Nach (8) ist c die Strecke vom Nullpunkte zum Mittelpunkte
wenn

$$\varrho p - (\varrho + \sigma i)q + \sigma c i = \varepsilon\sigma(p-c)\varepsilon i = (p-c)\sigma i$$

i.

$$c = \frac{p+q}{2} + \frac{\varrho i}{\sigma}\cdot\frac{p-q}{2}$$

Als Radius des Kreises erhält man

$$|p - c| = \tfrac{1}{2}\left|\frac{PQ}{\sigma}\sqrt{\varrho^2+\sigma^2}\right|.$$

3) Man bestimme den Ort derjenigen Punkte M, deren
ntfernungen von zwei festen Punkten A B das constante
erhältnifs λ haben. Man findet, wenn

$$O\lambda = a \qquad OB = b \qquad OM = x$$

,

$$\left|\frac{AM}{MB}\right| = \left|\frac{x-a}{b-x}\right| = \lambda$$

i.

$$\frac{x-a}{b-x} = \lambda u \qquad x = \frac{a + b\lambda u}{1 + \lambda u},$$

rin u jede Zahl vom absoluten Betrage 1 sein darf. Denkt man
h, was zulässig ist, $\lambda < 1$ und setzt

$$u = \frac{1+\tau i}{1-\tau i},$$

ergiebt sich

$$x = \frac{(a + b\lambda) - (a - b\lambda)\tau i}{1 + \lambda - (1-\lambda)\tau i}.$$

Falls $\lambda = 1$ ist, erhält man

$$x = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\tau i$$

d. h. die Punkte M erfüllen die im Mittelpunkte AB auf diese Strecke errichtete Normale. Falls $\lambda < 1$ ist, ist der Ort der Punkte M ein Kreis, für welchen die bezüglich der Punkte AB conjugirten Punkte

$$p = \frac{a+b\lambda}{1+\lambda} \qquad q = \frac{a-b\lambda}{1-\lambda}$$

einen Durchmesser bilden, da die obige Zahl ϱ hier Null ist.

3. Die geometrische Darstellung einer vorgelegten Function $x = f(\tau)$ wird manchmal durch Abänderung des Coordinatensystems XOY erleichtert. Der Verschiebung des Nullpunktes von O nach O' unter Beibehaltung der Fundamentalstrecken, also auch der Axenrichtungen, entspricht die Substitution

$$OM = OO' + O'M \tag{5}$$

d. i.

$$x = a + x'.$$

Die Drehung des von den Axen gebildeten rechten Winkels um den Punkt O bei gleichzeitiger Verschiebung der Punkte EJ nach $E'J'$ auf den neuen Axen OX', OY' wobei

$$|OE'| = |OJ'|$$

bleiben soll, wird durch die Substitution

$$x = bx' \tag{6}$$

ausgedrückt, wo b jede complexe, nicht reelle Zahl sein kann.

Es ist nämlich (Fig. 21)

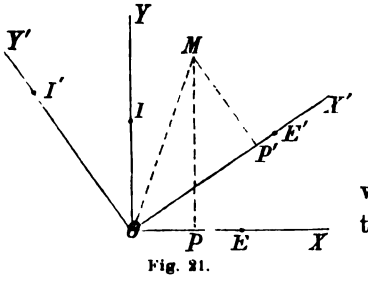


Fig. 21.

$$x = OM = \xi + \eta i$$

$$\xi = \left|\frac{OM}{OE'}\right| \cdot \left|\frac{OE'}{OE}\right| \cos x^{\wedge} r$$

$$\eta = \left|\frac{OM}{OE'}\right| \cdot \left|\frac{OE'}{OE}\right| \sin x^{\wedge} r,$$

wo r die Richtung OM bedeutet. Setzt man hier

$$x^{\wedge} r = x^{\wedge} x' + x'^{\wedge} r,$$

$$\xi' = \left|\frac{OM}{OE'}\right| \cos x'^{\wedge} r$$

$$\eta' = \left|\frac{OM}{OE'}\right| \sin x'^{\wedge} r$$

md

$$\left|\frac{OE'}{OE}\right| (\cos x\frown x' + i \sin x\frown x') = b$$

$$\xi' + \eta' i = x' \ (= OM),$$

so erhält man unmittelbar die Formel (6), welche übrigens auch aus (12) in II, 9 folgt.

Beide Aenderungen zusammen werden durch die Formel

$$x = a + bx'$$

dargestellt.

Handelt es sich z. B. um Construction der Function

$$x = a + b\tau + c\tau^2,$$

wo

$$c = \gamma (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

nicht Null sein soll, so ersetzt man sie mittelst passender Drehung des Winkels XOY um O durch die folgende

$$x' = x (\cos \alpha - i \sin \alpha) = a' + b'\tau + \gamma\tau^2.$$

Diese bedeutet, wie man durch Zerlegung von x' in reellen und imaginären Theil leicht erkennt, wenn b' nicht reell ist, eine Parabel, deren Axe der neuen reellen Axe OX' parallel ist.

4. Complexe Veränderliche.

Ein Zeichen, welches unbegrenzt viele reelle oder complexe Zahlen, deren jede völlig bestimmt sein muſs, bedeuten kann, heifst eine complexe Veränderliche; die ihr zu ertheilenden Werthe der Bereich derselben. Geometrisch wird jeder einzelne Werth a, den die Veränderliche annehmen kann, durch eine Strecke OA in der Ebene XOY oder, wie man der Kürze wegen gewöhnlich sich ausdrückt, durch den Endpunkt A derselben dargestellt. Dabei werden oft complexe Zahlen und die ihnen entsprechenden Punkte der Ebene mit den nämlichen Zeichen versehen. Der Bereich einer Veränderlichen wird geometrisch durch Punkte eines ebenen Flächenstückes, in besonderen Fällen durch Punkte einer ebenen Linie dargestellt. Eine ebene Fläche (ein Bereich) heifst einfach begrenzt, wenn der Rand derselben sich selbst nicht schneidet. Doch darf der Rand in einzelnen Punkten oder längs ganzer Linienstücke sich selbst berühren. Eine solche Fläche ist auch einfach zusammenhängend d. h. sie zerfällt durch jeden Querschnitt (d. i. von einem

Randpunkt zu einem anderen geführten Schnitt) in zwei getrennte Stücke.

Der absolute Betrag einer jeden complexen Veränderlichen hat als eine reelle, nicht negative Veränderliche eine obere und untere Grenze, wovon die obere $+\infty$, die untere Null sein kann.

Complexe Veränderliche werden unter $x\ y\ z\ t$ u. dgl., reelle im Gegensatze zu ihnen unter $\xi\ \eta\ \zeta\ \tau$ u. dgl. verstanden.

Die Veränderliche x heifst stetig auf einer von den Punkten $A\ B$ begrenzten Linie, wenn zum Bereiche von x alle Punkte von $A\ B$, die Endpunkte eingeschlossen, zu rechnen sind. x heifst stetig in der ebenen Fläche $\mathfrak{F}$, wenn zum Bereiche von x alle Punkte von $\mathfrak{F}$ mit Einschlufs des Randes gehören. Im ersten Falle ist der Bereich von x eine Linie AB, im zweiten eine ebene Fläche $\mathfrak{F}$.

5. Functionen complexer Veränderlichen.

Ordnet man jedem Werthe einer Veränderlichen x, der ein gewisser Bereich zugewiesen ist, durch eine Regel einen Werth y zu, so bilden diese Werthe eine eindeutige Function $y = f(x)$ der ersteren Veränderlichen, welche die unabhängige heifst. Setzt man

$$x = \xi + \eta i,$$

so ist y zugleich eine Function der Veränderlichen $\xi\ \eta$. Umgekehrt kann jede eindeutige (complexe oder reelle) Function zweier reellen Veränderlichen $\xi\ \eta$

$$y = F(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$$

als Function der complexen Veränderlichen

$$x = \xi + \eta i$$

betrachtet werden[2]). Da jedem der Werthsysteme $\xi\ \eta$, wofür y definirt ist, ein Werth von x entspricht, so ist hierdurch ein gewisser Bereich von x bestimmt, zu dessen jedem Punkte ein und nur ein Werth von y gehört. Man darf daher $F(\xi, \eta)$ auch mit $f(x)$ bezeichnen. — Werden jedem Werthe der unabhängigen Veränderlichen x zwei oder

mehrere Werthe y zugeordnet, so nennt man y eine zwei- oder mehrdeutige Function von x.

Die Function $y = f(x)$ wird in dem gegebenen Bereiche von x analytisch dargestellt durch einen Ausdruck, welcher die Berechnung von y aus x für alle genannten Werthe von x mittelst einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Fundamentaloperationen einer jeden der vier Arten lehrt. Hier drängt sich nun sofort die Bemerkung auf, dafs der analytische Ausdruck in x für die in einer ebenen Fläche $\mathfrak{F}$ definirte Function $F(\xi, \eta)$ im Allgemeinen von Linie zu Linie wechselt. In jedem endlichen Bereiche ist zunächst jede der Coordinaten ξ η selbst eine eindeutige (und stetige) Function von x. Um einen analytischen Ausdruck dafür, giltig z. B. längs der Geraden (2) in Nr. 2, wofür, $a = \alpha + \beta i$ $x \widehat{\ } g = \varphi$ gesetzt

$$\xi = \alpha + \tau \cos \varphi \quad \eta = \beta + \tau \sin \varphi$$

ist, zu erhalten, braucht man nur in diese Formeln den für τ aus (7) sich ergebenden Ausdruck

$$\tau = (x - a)(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

einzuführen, wodurch man findet

$$\xi = \alpha + \cos \varphi (\cos \varphi - i \sin \varphi)(x - a)$$
$$\eta = \beta + \sin \varphi (\cos \varphi - i \sin \varphi)(x - a).$$

Wie man sieht, kommen in den letzten Formeln die Constanten der Geraden a φ vor, sie ändern sich also beim Uebergange von einer Geraden zu einer anderen. Auf ähnliche Art ergiebt sich, dafs längs des Kreises (3) vom Mittelpunkte

$$c = \gamma + \delta i$$

und dem Radius ϱ die Ausdrücke gelten

$$\xi = \gamma + \frac{\varrho^2 + (x - c)^2}{2(x - c)} \qquad \eta = \delta + i \frac{\varrho^2 - (x - c)^2}{2(x - c)}.$$

Vermittelst der Formeln für ξ η läfst sich aber jede Function $F(\xi, \eta)$ als solche von x darstellen und zwar wird der hierfür erlangte Ausdruck im Allgemeinen von der Linie abhängen, auf welche x beschränkt ist.

Im Falle dafs nicht in sämmtlichen innerhalb einer bestimmten Fläche $\mathfrak{F}$ verlaufenden Linien für $F(\xi, \eta)$ ein und

derselbe Ausdruck $f(x)$ sich ergiebt, ist es überflüssig, diese Function von $\xi\ \eta$ auch noch als solche von x zu betrachten. Besondere Aufmerksamkeit werden vielmehr nur solche Functionen von x verdienen, die mindestens in einer Fläche oder einem Flächensysteme $\mathfrak{F}$ durch einen und denselben analytischen Ausdruck in x dargestellt sind. Indefs sind diese Functionen selbst dann, wenn der Ausdruck vermittelst der vier Rechnungsarten in unendlich häufiger Wiederholung gebildet ist, durch keine bemerkenswerthen gemeinsamen Eigenschaften ausgezeichnet (s. u.). Aber durch erneute Einschränkung des Functionsbegriffes ist eine eigentliche Functionentheorie zu Stande gebracht worden, was bei ausschliefslichem Gebrauche von reellen Veränderlichen gar nicht möglich wäre. Die Functionen, mit denen sie sich beschäftigt, werden nach Weierstrass als analytische bezeichnet. Den von ihm eingeführten Begriff der allgemeinen analytischen, ein- oder mehrdeutigen, Function zu entwickeln, gehört nicht zur Aufgabe dieses Werkes. Für uns wird Folgendes genügen.

Die eindeutige analytische Function $f(x)$ von x hat die Eigenschaft, dafs jedem nicht-singulären Punkte $x = a$ eine positive Zahl δ sich so zuordnen läfst, dafs die Werthe von $f(x)$, welche zu solchen Werthen von x gehören, wofür der absolute Betrag von $x - a$ kleiner als δ ist, durch eine endliche oder unendliche Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - a$ dargestellt werden. Der Kürze wegen sagt man in einem solchen Falle, $f(x)$ sei im Punkte $x = a$ vom Charakter der ganzen Functionen oder holomorph[3]). Die hier vorkommenden eindeutigen analytischen Functionen gehören sämmtlich zu den mit isolirten singulären Punkten im Endlichen d. h. ist $x = c$ ein Punkt, wo die eindeutige Function $f(x)$ nicht den Charakter der ganzen besitzt, so kommt ihm eine positive Zahl γ so zu, dafs die Function in allen Punkten x, wofür $|x - c|$ kleiner als γ ist, holomorph ist. Dadurch sind diese Functionen vollständig charakterisirt. Wir werden in V. 20 sehen, dafs $f(x)$ für die Werthe von x, wofür $|x - c|$ kleiner als γ ist, durch eine Reihe nach ganzen Potenzen von $x - c$ dargestellt wird.

Enthält dieselbe die Potenzen mit negativen Exponenten in endlicher Anzahl, so legt man der Function $f(x)$ im Punkte $x = c$ den Charakter der rationalen (nicht-ganzen) Functionen bei und nennt $x = c$ einen aufserwesentlichen singulären Punkt oder einen Pol derselben. Im anderen Falle heifst er ein wesentlicher singulärer Punkt von $f(x)$.

Eine mehrdeutige analytische Function $y = f(x)$ von x mufs der Forderung genügen, dafs jedem nicht-singulären Werthsysteme (Stelle) $x = a$ $y = b$ eine positive Zahl δ so zugeordnet werden kann, dafs zu jedem Werthe von x, wofür $|x - a|$ kleiner als δ ist, ein Werth von $f(x)$ gehört, welcher durch eine und dieselbe Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - a$, die für $x = a$ in $y = b$ übergeht, dargestellt wird. Wollte man nun als einfachste Klasse der vieldeutigen Functionen die mit isolirten singulären Punkten, ähnlich wie oben die eindeutigen definiren, so würde man nichts erreichen. Denn in dieser Ausdehnung wäre der Begriff werthlos, da man z. B. aus je zwei eindeutigen Functionen von x mit isolirten singulären Punkten eine zweideutige bilden könnte. Hier mufs noch eine Eigenschaft hinzutreten, die bei den eindeutigen Functionen mit isolirten singulären Punkten von selbst zutrifft, nämlich die Monogeneität der Function. Darunter ist nach Weierstrass zu verstehen, dafs alle Werthe der Function aus einem Functionenelemente d. i. aus einer gewöhnlichen Potenzreihe abgeleitet werden können, woraus dann weiter folgt (vgl. V. 14), dafs die ganze Function bestimmt ist durch ihre Werthe auf jeder, noch so kleinen, Linie. Wir können auf diesen Gegenstand hier nicht eingehen, sondern werden uns darauf beschränken, einige vieldeutige Functionen aufzuführen, welche man zu den analytischen rechnet, insbesondere die algebraischen, welche Bezeichnung, sowie die schon oben benutzten: „ganze und rationale Function", in dem in IX. 3 d. I. T. festgesetztem Sinne auch ferner gebraucht wird. Dasselbe gilt von dem Begriffe „zusammengesetzte Function".

Jede analytische Function, die nicht algebraisch ist, heifst transcendent.

Hat eine eindeutige Function in den Punkten innerhalb eines Kreises durchaus den Werth 1, in den aufserhalb desselben durchaus den Werth Null, so kann sie nicht eine analytische sein. Denn zufolge des Merkmales der Monogeneität mufs eine solche Function, die in allen Punkten innerhalb des Kreises den Werth 1 hat, in jedem Punkte der Ebene (mit Einschlufs von $x = \infty$) gleich 1 sein. Daraus ergiebt sich, wie Weierstrass[4]) bemerkt hat, dafs ein analytischer Ausdruck nicht eine analytische Function darzustellen braucht. Dies kann dann eintreten, wenn der Bereich derjenigen Punkte, wofür er definirt ist, aus getrennten Gebieten besteht (vgl. V. 17). Riemann war in dieser Frage anderer Ansicht[5]).

Hinsichtlich des allgemeinen Begriffes der Function von zwei und von mehreren unabhängigen Veränderlichen möge auf IX. 18 d. I. T. verwiesen werden. Die eindeutige analytische Function z. B. der zwei Veränderlichen x y hat in jeder nicht-singulären Stelle $x = a$ $y = b$ die Eigenschaft, dafs es positive Zahlen δ ε giebt, derart dafs die Werthe der Function für die in Rede stehende Stelle und für alle Stellen xy, welche der Bedingung

$$|x - a| < \delta \quad |y - b| < \varepsilon$$

genügen, durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $x - a$ und $y - b$ fortschreitende endliche oder unendliche Potenzreihe dargestellt werden.

6. Die uneigentliche Zahl ∞.

Wenn eine eindeutige Function $y = f(x)$ für den Werth $x = a$ nicht definirt, ihrem reciproken Werthe $1 : f(x)$ aber der Werth Null beigelegt ist, so sagt man, $f(x)$ sei *für* $x = a$ **unendlich**:

$$f(a) = \infty.$$

Das gilt insbesondere für die Function

$$x' = 1 : x,$$

wenn x den Werth Null annimmt. Wird der Veränderlichen x irgend ein endlicher Bereich zugewiesen, zu dem $x = 0$ gehört, so hat nun auch $1 : x$ für alle Werthe von x einen bestimmten Werth, denn zu $x = 0$ gehört $x' = \infty$. Wie früher zu den reellen Zahlen, so wird also auch zu den complexen die uneigentliche Zahl ∞ gefügt. — Die Function $y = f(x)$ hat für $x = \infty$ den endlichen Werth b oder den Werth ∞, je nachdem für $x' = 0$ der Function

$$g(x') = f\left(\frac{1}{x'}\right)$$

der Werth b oder der Function

$$g_1(x') = 1 : f\left(\frac{1}{x'}\right)$$

der Werth Null zukommt. — Der Werth $x = \infty$ gilt für eine eindeutige analytische Function $f(x)$ als nicht-singulär und sie selbst als holomorph in $x = \infty$, wenn $f(\infty)$ eine endliche Zahl b ist und es eine positive Zahl δ giebt, derart dafs alle Werthe $f(x)$, wofür

$$|x| > \delta$$

ist, durch eine endliche oder unendliche Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $1 : x$ dargestellt werden, welche für

$$1 : x = 0$$

b liefert. $x = \infty$ heifst ein aufserwesentlicher singulärer Punkt oder Pol von $f(x)$, wenn in dieser Reihe noch positive Potenzen von x in endlicher Anzahl vorkommen.

Entsprechend der vorstehenden Erweiterung des Systemes der complexen Zahlen wird die Ebene der Euklidischen Geometrie um einen uneigentlichen Punkt, den „Unendlichkeitspunkt“ U, bereichert. Ihm legen wir das in II. 16 noch nicht vergebene Schnittverhältnifs -1 zu jedem Paare eigentlicher Punkte bei. Es sei also

$$(AB, U) = -1$$

und ferner

$$(AU, C) = 0$$

$$1 : (UB, C) = 0.$$

Um das System der eigentlichen Punkte der Ebene zu vervollständigen, verfährt die Functionentheorie anders als die neuere Geometrie, die bekanntlich jedem Büschel von Parallelstrahlen einen uneigentlichen Schnittpunkt beilegt und die auf diese Art einer Ebene zugetheilten uneigentlichen Punkte eine uneigentliche Gerade bilden läfst. Diese Ansicht hat den Zweck, so viele uneigentliche Elemente ins Leben zu rufen, dafs jedem Elemente eines eigentlichen räumlichen Strahlbüschels ein und nur ein Element der Ebene entspricht und zwar jedem Strahle ein Punkt, jeder Ebene eine Gerade. Das von der Functionentheorie eingeschlagene Verfahren dagegen fällt zusammen mit der stereographischen Projection der Kugel auf eine Ebene (wobei die Punkte der Kugel von einem beliebigen derselben A auf die in seinem Gegenpunkte die Kugel berührende Ebene projicirt werden). Soll nämlich hier einem jeden Punkte der Kugel ein Punkt der Ebene ent-

bez. die endlichen Grenzwerthe $b_1\, b_2 \ldots b_m$ besitzen, so hat die Function von x

$$F(x) = R(f_1(x), f_2(x) \cdots f_m(x)),$$

wo R eine rationale Function der Veränderlichen $f_1 f_2 \ldots f_m$ bedeutet, bei $\lim x = a$ den Grenzwerth $R(b_1, b_2 \ldots b_m)$, wenn nur der Nenner von $R(f_1 f_2 \ldots f_m)$ sich nicht dem Grenzwerthe Null nähert. Hat dieser Nenner bei $\lim x = a$ den Grenzwerth Null, der Zähler einen von Null verschiedenen Grenzwerth, so ist

$$\lim R = \infty \quad \text{bei} \quad \lim x = a.“$$

Auch der Satz über die Substitution für die unabhängige Veränderliche in einer Grenzwerthformel gilt hier.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dafs bei einem vorgeschriebenen Grenzübergange von x z. B.

$$\lim x = a \quad f(x) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$$

einen endlichen Grenzwerth hat, besteht darin, dafs zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ gehört, derart dafs für alle dem Bereiche der Veränderlichen x angehörigen Werthe $x\ x'$, welche den Ungleichungen

$$|x - a| < \delta \qquad |x' - a| < \delta$$

genügen,

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

ist. Dafs diese Ungleichungen nebeneinander bestehen müssen, ergiebt sich auf die nämliche Art, wie die entsprechende Bemerkung in IX. 8 d. I. T. Die in Rede stehende Bedingung ist aber auch hinreichend. Setzt man nämlich

$$x = \xi + \eta i \quad x' = \xi' + \eta' i \quad a = \alpha + \beta i,$$

so ist für irgend zwei Werthsysteme $\xi\eta$, $\xi'\eta'$, welche den Ungleichungen

$$|\xi - \alpha| < \tfrac{1}{2}\delta \qquad |\eta - \beta| < \tfrac{1}{2}\delta,$$
$$|\xi' - \alpha| < \tfrac{1}{2}\delta \qquad |\eta' - \beta| < \tfrac{1}{2}\delta$$

genügen, nach dem Vorstehenden sowohl

$$|\varphi(\xi', \eta') - \varphi(\xi, \eta)| < \varepsilon,$$

als auch

$$|\psi(\xi', \eta') - \psi(\xi, \eta)| < \varepsilon.$$

Somit existiren bei denjenigen Grenzübergängen

$$\lim \xi = \alpha \quad \lim \eta = \beta,$$

welche dem oben vorausgesetzten $\lim x = a$ entsprechen, endliche Grenzwerthe[7])

$$\lim \varphi(\xi, \eta) = \alpha' \qquad \lim \psi(\xi, \eta) = \beta'.$$

Also gehört zu jeder Zahl $\varepsilon' > 0$ eine Zahl $\delta' > 0$, so dafs, wenn für Werthsysteme dieses Bereiches von ξ η

$$|\xi - \alpha| < \delta' \qquad |\eta - \beta| < \delta'$$

ist, sowohl

$$|\varphi(\xi, \eta) - \alpha'| < \varepsilon',$$

als auch

$$|\psi(\xi, \eta) - \beta'| < \varepsilon'$$

ist. Man hat also sicher neben

$$|x - a| < \delta' \qquad |f(x) - \alpha' - \beta' i| < \varepsilon' \sqrt{2};$$

es ist somit

$$\lim_{x=a} f(x) = \alpha' + \beta' i.$$

Die hinsichtlich der Grenzwerthe von Functionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen in IX. 19, 20 d. I. T. vorgetragenen Sätze lassen sich ebenfalls ohne Schwierigkeit auf den Fall ausdehnen, dafs unter den Veränderlichen auch complexe vorkommen.

8. Stetige Functionen complexer Veränderlichen[8]).

Die für alle Punkte eines den Punkt $x = a$ enthaltenden stetigen Bereiches von x — sei derselbe eine Linie oder Fläche — eindeutig definirte Function $f(x)$ heifst dann und nur dann stetig im Punkte $x = a$, wenn $f(x)$ bei stetigem Grenzübergange $\lim x = a$ den Grenzwerth $f(a)$ hat d. i. zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ gehört, derart dafs

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ist für alle der Bedingung

$$|x - a| < \delta$$

genügenden Punkte des Bereiches von x. Auch diese Er-

klärung läfst sich als Verallgemeinerung der entsprechenden für die Functionen reeller Veränderlichen in IX. 12 d. l. T. ansehen.

Wenn für jedes Werthsystem $x_1\ x_2 \ldots x_m$, das sich zusammenstellen läfst aus den Werthen von x_1 in einem den Punkt $x_1 = a_1$ enthaltenden stetigen Bereiche, den Werthen von x_2 in einem den Punkt $x_2 = a_2$ enthaltenden stetigen Bereiche ....., den Werth von x_m in einem den Punkt $x_m = a_m$ enthaltenden stetigen Bereiche, eine Function $f(x_1\ x_2 \ldots x_m)$ eindeutig definirt ist, so heifst sie dann und nur dann an der Stelle $x_1 = a_1 \quad x_2 = a_2 \cdots x_m = a_m$ stetig, wenn zu jeder positiven Zahl ε positive Zahlen $\delta_1\ \delta_2 \ldots \delta_m$ gehören, derart dafs für alle den Relationen

$$|x_1 - a_1| < \delta_1 \quad |x_2 - a_2| < \delta_2 \cdots |x_m - a_m| < \delta_m$$

genügenden Werthsysteme

$$|f(x_1\ x_2 \ldots x_m) - f(a_1\ a_2 \ldots a_m)| < \varepsilon$$

ist.

Auf die nämliche Weise wie a. a. O. Nr. 21 leiten wir daraus den wichtigen Satz ab: „Ist die eindeutige Function $\varphi(y_1, y_2 \cdots y_n)$ an der Stelle

$$y_1 = b_1 \quad y_2 = b_2 \cdots y_n = b_n$$

stetig und haben die Functionen

$$f_1(x_1\ x_2 \cdots x_m), \quad f_2(x_1\ x_2 \cdots x_m) \cdots f_n(x_1\ x_2 \cdots x_m) \qquad (7)$$

bei denselben von einander unabhängigen Grenzübergängen der Veränderlichen $x_1\ x_2 \ldots x_m$

$$\lim x_1 = a_1 \quad \lim x_2 = a_2 \cdots \lim x_m = a_m$$

bezw. die endlichen Grenzwerthe $b_1\ b_2 \ldots b_n$, so hat auch die zusammengesetzte Function der $x_1\ x_2 \ldots x_m$

$$\varphi\{f_1(x_1 \cdots x_m) \cdots f_n(x_1 \cdots x_m)\} \qquad (8)$$

bei diesen Grenzübergängen einen Grenzwerth und zwar ist er $\varphi(b_1\ b_2 \cdots b_n)$.“ — Ein besonderer Fall des Satzes ist: „Ist jede der Functionen (7) an der Stelle

$$x_1 = a_1 \quad x_2 = a_2 \cdots x_m = a_m$$

stetig, so auch die Function (8).“

Wenn

$$f(x) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$$

im Punkte $x = \alpha + \beta i$ stetig ist, so sind $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$ stetige Functionen von ξ η an der Stelle $\xi = \alpha$ $\eta = \beta$, somit zufolge des soeben erwähnten Satzes d. I. T. auch

$$|f(x)| = |\sqrt{\varphi(\xi,\eta)^2 + \psi(\xi,\eta)^2}|.$$

Daraus ergiebt sich nach einem a. a. O. bewiesenen Satze der folgende: „Wenn für alle Punkte eines stetigen Bereiches von x mit Einschlufs der Begrenzung $f(x)$ eindeutig definirt und stetig ist, so ist die obere Grenze von $|f(x)|$ eine endliche Zahl γ und es giebt mindestens einen Punkt $x = x_0$ in dem Bereiche, so dafs

$$|f(x_0)| = \gamma$$

ist." Ein ähnlicher Satz gilt für die untere Grenze von $|f(x)|$.

Es ist auch leicht einzusehen, dafs für die obige Function $f(x)$ ein dem Theoreme in IX. 16 d. I. T. analoges besteht.

Wenn für alle Punkte aufserhalb einer beliebigen endlichen Fläche, also auch für $x = \infty$, eine Function $f(x)$ eindeutig definirt ist, so heifst sie in $x = \infty$ stetig, wenn $f(x)$ bei dem Grenzübergange $\lim x = \infty$ in diesem Bereiche den endlichen Grenzwerth $f(\infty)$ hat.

9. Stetigkeitsunterbrechungen.

Da die Stetigkeit von $f(x)$ im Punkte $x = a$ voraussetzt, dafs 1) $f(x)$ für $x = a$ definirt und 2) bei stetigem Grenzübergange $\lim x = a$ in dem für x festgesetztem Bereiche

$$\lim f(x) = f(a)$$

ist, so wird sie aufgehoben, wenn $f(x)$ für $x = a$ nicht definirt ist oder falls $f(x)$ für $x = a$ definirt ist, wenn $f(x)$ bei obigem Grenzübergange $\lim x = a$ keinen oder einen von $f(a)$ verschiedenen Grenzwerth hat, insbesondere unendlich wird. Zur Darstellung der Discontinuitäten von $f(x)$ in einem Punkte

$$x = a = \alpha + \beta i$$

hat man das Verhalten ihrer Coordinaten $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ als Functionen der reellen Veränderlichen ξ η an der Stelle $\xi = \alpha$ $\eta = \beta$ zu untersuchen.

Die einfachste Unstetigkeit ist folgende. Eine Function $f(x)$ ist für alle Punkte einer geschlossenen Linie eindeutig definirt und für

alle stetig mit Ausnahme eines einzigen $x = a$, wo sie nur nach einer Seite hin stetig ist, während von der anderen Seite her $f(x)$ sich einem von $f(a)$ verschiedenen Grenzwerthe nähert.

Eine solche Function bildet z. B. der auf dem vom Nullpunkte mit dem Radius σ^2 $(\sigma > 0)$ beschriebenen Kreise

$$x = \sigma^2\{\cos\theta + i\sin\theta\} \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

eindeutig definirte Zweig der Quadratwurzel aus x

$$f(x) = \sqrt{x} = \sigma\{\cos\tfrac{1}{2}\theta + i\sin\tfrac{1}{2}\theta\}\,.$$

Man hat nämlich

$$f(0) = \sigma \qquad \lim_{\theta=+0} f(x) = \sigma \qquad \lim_{\theta=2\pi-0} f(x) = -\sigma\,.$$

10. Conforme oder isogonale Abbildung einer Ebene.

Um eine Function der complexen Veränderlichen x

$$x' = f(x)$$

geometrisch darzustellen, construirt man die Punkte x' in einer zweiten Ebene oder auch in der Ebene der x selbst. Dadurch werden sämmtlichen Punkten der letzteren oder wenigstens einem Theile von ihnen je ein, bezw. mehrere Punkte der ersteren zugeordnet und so jene auf diese abgebildet. Wenn $f(x)$ eine analytische Function von x ist, so bezeichnet man die Abbildung als conform oder isogonal, was an den einfachsten Fällen, der Aehnlichkeit und Kreisverwandtschaft, erläutert werden soll. Dabei construiren wir die Punkte x' ebenfalls in der Ebene der x und gebrauchen für beide Schaaren von Punkten dasselbe Coordinatensystem XOY.

1) Durch die Gleichung

$$x' = a + bx \tag{10}$$

wird die x-Ebene einstimmig ähnlich auf sich selbst abgebildet.

Sind nämlich $x\,y\,z$ drei beliebige Punkte, $x'\,y'\,z'$ die ihnen entsprechenden, so dafs

$$x' = a + bx \qquad y' = a + by \qquad z' = a + bz$$

ist, so hat man

$$\frac{x'-y'}{x-y} = \frac{z'-x'}{z-x} = \frac{y'-z'}{y-z} = b\,, \tag{11}$$

woraus nach II. 7 folgt, dafs die Dreiecke $x\,y\,z$ und $x'\,y'\,z'$ einstim-

hnlich und insbesondere falls $|b| = 1$ ist, einstimmig congruent – Setzt man in (10) $x' = x$, so findet man den sich selbst ent-enden eigentlichen Punkt (das Aehnlichkeitscentrum)

$$x' = x = a : (1 - b).$$

i ist jedoch b als von 1 verschieden vorausgesetzt. Im Falle giebt es keinen solchen Punkt. — Die ähnlichen Systeme $x\,x'$ en sich in perspectiver Lage d. h. je zwei entsprechende Ge-$x\,y$, $x'\,y'$ sind einander parallel dann und nur dann, wenn b st, wie man aus (11) unmittelbar erkennt.

?) Durch die Gleichung

$$x' = \frac{a + bx}{c + dx} \tag{12}$$

$ad - bc$ und d nicht Null sein sollen, wird die eigent-Kreisverwandtschaft definirt[9]). Der Name rührt her, dafs wenn vier Punkte x auf einem Kreise liegen, ich die entsprechenden vier Punkte x'. Das folgt so-daraus, dafs nach Gleichung (22) in II. 16 das Doppel-ltnifs von vier beliebigen Punkten x gleich ist dem ier entsprechenden x', als auch aus der Formel (4) in . Beschreibt nämlich x den Kreis (4), so verharrt x' er Curve

$$x' = \frac{a + bp - (a + bq)\,r\tau}{c + dp - (c + dq)\,r\tau},$$

e im Allgemeinen d. i. falls $c + dp$ nicht Null und

$$(c + dq)r : (c + dp)$$

reell ist, ebenfalls ein Kreis ist. Dafs kreisverwandte en nicht ähnlich sind, zeigt die Formel (13) unten, ch der Quotient entsprechender Strecken nicht con-ist.

Die wichtigste Eigenschaft der Kreisverwandtschaft, e sie mit allen conformen Verwandtschaften theilt, ist m folgenden Satze enthalten: „Zieht man durch einen tlichen Punkt M_0 irgend eine convexe Curve $M_0 M$,

$$OM = x = g(\tau) \qquad OM_0 = x_0 = g(\tau_0)$$

soll und durch den M_0 entsprechenden, auch als eigent-vorausgesetzten Punkt M_0' die entsprechende Curve $_0'$; so ist der Grenzwerth

$$\lim_{\tau=\tau_0+0} \frac{M_0' M'}{M_0 M}$$

nur vom Punkte M_0, nicht aber von der Curve $M_0 M$ abhängig." In der That hat man nach (12)

$$OM_0' = x_0' = \frac{a + bx_0}{c + dx_0}$$

$$\frac{x' - x_0'}{x - x_0} = - \frac{ad - bc}{(a + dx)(a + dx_0)}, \tag{13}$$

also nach Nr. 6

$$\lim_{\tau=\tau_0+0} \frac{M_0' M'}{M_0 M} = - \frac{ad - bc}{(a + dx_0)^2}.$$

Daraus ergiebt sich, wenn die Polarcoordinaten der rechten Seite mit A, α und die positiven Richtungen in den Strecken $M_0 M$, $M_0' M'$ mit r, r' bezeichnet werden,

$$\lim_{\tau=\tau_0+0} \frac{|M_0' M_0'|}{|M_0 M|} = \mathsf{A} \qquad \lim_{\tau=\tau_0+0} (x^\frown r' - x^\frown r) = \alpha.$$

Die letztere Gleichung ist identisch mit

$$t^\frown t' = x^\frown t' - x^\frown t = \alpha,$$

unter t t' passend gewählte Richtungen in der Tangente der Curve $M_0 M$ in M_0 und der der Curve $M_0' M'$ in M_0' verstanden. Denkt man sich durch $M_0 M_0'$ noch ein Paar entsprechender Curven $M_0 M_1$, $M_0' M_1'$ gezogen und bezeichnet gewisse Richtungen in der Tangente der ersteren in M_0 und der der letzteren in M_0' mit t_1 t_1', so hat man

$$\lim_{\tau=\tau_0+0} \frac{|M_0' M'|}{|M_0 M|} = \lim_{\tau=\tau_0+0} \frac{|M_0' M_1'|}{|M_0 M_1|}$$

$$t^\frown t_1 = t'^\frown t_1'.$$

Die irgend zweien durch einen Punkt gehenden Curven entsprechenden schneiden sich unter demselben Winkel, wie diese selbst: die Kreisverwandtschaft ist isogonal oder conform.

Um die Kreisverwandtschaft eingehender zu untersuchen, ersetzt man durch zweckmäfsige Wahl der Fundamentalstrecken in der Constructionsebene die Gleichung (12) durch eine einfachere. Setzen wir darin

$$x = k + ly \qquad x' = k + ly',$$

so erhalten wir anstatt (12) die Gleichung

$$k + ly' = \frac{a + bk + bly}{c + dk + dly}$$

und wenn k l so angenommen werden, dafs

$$c + dk = 0 \qquad a + bk = dl^2$$

ist,

$$y' = \frac{1}{y} + \frac{b + c}{dl}.$$

Somit läfst sich die Abbildung (12) auch dadurch erzielen, dafs man nach einander die beiden Abbildungen

$$y_1 = \frac{1}{y} \qquad y' = y_1 + \frac{b + c}{dl}$$

ausführt. Die letztere erheischt lediglich eine Verschiebung der ersteren in ihrer Ebene. Wir brauchen uns demnach nur mit dieser d. i. mit der Abbildung

$$x' = \frac{1}{x} \tag{14}$$

zu beschäftigen. Sie ist involutorisch d. h. je zwei zugeordnete Punkte x x' entsprechen einander wechselseitig, z. B. die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$.

Setzen wir in (14) für x den Ausdruck (4) ein, so ergiebt sich als dem Kreise entsprechende Curve

$$x' = \frac{1 - r\tau}{p - qr\tau}$$

d. i. wieder ein Kreis, falls pq nicht Null und $qr : p$ nicht reell ist d. i. der Kreis (4) nicht durch den Nullpunkt geht. In der That, soll die rechte Seite von (4) für einen reellen Werth von τ ($\pm \infty$ eingeschlossen) Null liefern, so mufs

$$p - qr\tau = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{p}{\tau} - qr = 0$$

sein, also entweder $p = 0$ oder $q = 0$ oder $qr : p$ reell sein. Jedem durch den Nullpunkt gehenden Kreise entspricht eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt geht. Denn wir haben neben

$$x = \frac{p}{1 - r\tau} \qquad x' = \frac{1 - r\tau}{p}.$$

Umgekehrt entspricht jeder nicht durch den Nullpunkt gehenden Geraden (2) ein Kreis durch den Nullpunkt. Nur der durch den Nullpunkt gehenden Geraden

$$x = \tau (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

entspricht wieder eine solche Gerade, nämlich

$$x' = \frac{1}{\tau} (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

d. i. die zur reellen Axe symmetrisch mit der ersteren liegende. Die beiden Axen OX, OY entsprechen sich selbst, auf der ersteren be-

finden sich die sich selbst entsprechenden Punkte $x = \pm 1$. — Geht der Kreis (4) nicht durch den Nullpunkt, so entspricht ihm wieder ein Kreis. Sind $c\ \varrho$ Mittelpunkt und Radius des ersteren, $m'\ \sigma'$ Mittelpunkt und Radius des letzteren, so hat man nach Nr. 2

$$m' = \frac{c}{c^2 - \varrho^2} \qquad \sigma' = \frac{\varrho}{|c^2 - \varrho^2|}.$$

Wenn der Kreis (4) den Mittelpunkt O hat, so auch der ihm entsprechende, welcher, wie Formel (3) zeigt, im entgegengesetzten Sinne beschrieben ist.

Aus (14) folgt

$$|OM| \cdot |OM'| = 1,$$

eine Relation, welche auch bei der Abbildung der Ebene mittelst reciproker Radienvectoren vorkommt. Da bei dieser jedem Punkte $M(\xi\ \eta)$ ein Punkt $M'(\xi'\ \eta')$ auf dem Strahle OM durch die Gleichung

$$\overline{OM} \,.\, \overline{OM'} = 1$$

zugeordnet wird, so hat man

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2},$$

so daſs

$$\xi' + \eta' i = x' = 1 : (\xi - \eta i)$$

ist. Die Abbildung der Ebene durch reciproke Radienvectoren gehört mithin nicht zu den conformen, sie läſst sich jedoch zerlegen in die conforme Abbildung (14)

$$\xi_1 + \eta_1 i = x_1 = 1 : x$$

und die nicht-conforme Spiegelung

$$\xi' = \xi_1 \qquad \eta' = -\eta_1.$$

IV. Abschnitt.

Die ganzen rationalen Functionen.

1. Ein Ausdruck, welcher aus einer endlichen Anzahl von Veränderlichen

$$x_1\, x_2 \ldots x_m \,(m \geq 1),$$

deren jede alle complexen Werthe annehmen kann, und von Constanten mittelst der vier Species, jede endlich oft angewandt, gebildet ist, heifst eine rationale Function dieser Veränderlichen. Ein Aggregat aus einer endlichen Anzahl von Gliedern von der Form

$$a_{r_1, r_2 \ldots r_m}\, {x_1}^{r_1}\, {x_2}^{r_2} \ldots {x_m}^{r_m},$$

worin der erste Factor eine Constante, $r_1\, r_2 \ldots r_m$ ganze positive Zahlen oder Null bedeuten, heifst eine ganze rationale oder schlechthin ganze Function von $x_1\, x_2 \ldots x_m$ und zwar von dem Grade in Bezug auf jede Veränderliche, welche der gröfste Exponent von ihr angiebt und von der Dimension in Bezug auf $x_1\, x_2 \ldots x_m$, welche der gröfste Werth der Summe

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_m$$

angiebt. Eine ganze Function, die in Bezug auf eine Veränderliche z. B. x_1 vom ersten Grade ist, heifst auch eine lineare Function derselben und eine, welche diese Veränderliche gar nicht enthält, eine ganze Function derselben vom Grade „Null“. Eine ganze Function heifst ganzzahlig, wenn die Coefficienten ihrer Glieder ganze Zahlen sind. Hat die Summe

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_m$$

in allen Gliedern denselben Werth n, so nennt man die ganze Function $F(x_1, x_2 \ldots x_m)$

homogen in Bezug auf die Veränderlichen; man hat nun, was auch t sein mag,

$$F(tx_1, tx_2 \ldots tx_m) = t^n F(x_1, x_2 \ldots x_m).$$

Der Quotient zweier ganzen Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_m$ heifst eine gebrochene rationale oder schlechthin rationale Function dieser Veränderlichen. Ist der Nenner vom ersten, der Zähler nicht von höherem als vom ersten Grade in Bezug auf eine Veränderliche, so nennt man sie auch eine gebrochene lineare Function derselben. Der Quotient zweier homogenen Functionen der $x_1 x_2 \ldots x_m$ heifst ebenfalls eine homogene Function derselben und zwar von der Dimension, welche der Unterschied: Dimension des Zählers weniger der des Nenners angiebt.

Eine rationale Function der $x_1 x_2 \ldots x_m$ heifst symmetrisch, wenn sie bei Vertauschung von je zweien der Veränderlichen ihren Werth nicht ändert; alternirend, wenn sie dabei das Zeichen wechselt und falls sie Null ist, Null bleibt.

2. Rechnungsoperationen mit den ganzen Functionen.

Bezeichnen $F(x_1, x_2 \ldots x_m)$, $G(x_1, x_2 \ldots x_m)$ ganze Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_m$ von den Dimensionen n, p und ist $n \geq p$, so können die Summe und Differenz $F \pm G$ nicht von höherer als der n^{ten} Dimension hinsichtlich $x_1 x_2 \ldots x_m$ sein; das Product FG hat genau die Dimension $n + p$.

Läfst sich eine ganze Function $H(x_1, x_2 \ldots x_m)$ von $x_1, x_2 \ldots x_m$ als Product einer ganzen Function $F(x_1, x_2 \ldots x_m)$ mit einer andern $G(x_1, x_2 \ldots x_m)$ darstellen, so heifst sie durch F theilbar, F ein Theiler von H. Dabei ist gemeint, dafs die Coefficienten von H F G rationale Functionen irgend welcher als bekannt angesehener Zahlen seien. In der Functionentheorie und analytischen Geometrie gelten zumeist alle reellen und complexen Zahlen als bekannt, bei algebraischen Untersuchungen jedoch oft nur gewisse Classen derselben z. B. die rationalen Zahlen oder neben ihnen die Wurzeln aus ihnen u. dgl. Im letzteren Falle hängt natürlich die Theilbarkeit einer ganzen Function davon ab, welche

narten benutzt werden dürfen. So ist $x^2 - 2$ durch ganze ganzzahlige Function von x theilbar, erscheint als das Product $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, wenn man $\sqrt{2}$ als nt betrachtet.

Division der ganzen Functionen. „Sind die ganzen ionen einer Veränderlichen x vom n^{ten} und p^{ten} Grade p)

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$
$$G(x) = b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \cdots + b_p$$

egt, so giebt es stets ein und nur ein Paar ganze ionen Q G_1 von x, die erste genau vom Grade $n - p$, weite nicht von höherem Grade als $p - 1$, wofür nat

$$F = QG + G_1.“$$

oefficienten von QG_1 sind ganze Functionen von

$$a_0\ a_1 \ldots a_n\ b_1 \ldots b_p,$$

hene von b_0.

Beweis. Der Ausdruck

$$F_1 = F - \frac{a_0}{b_0} x^{n-p} G$$

ne ganze Function höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x. 1) der Coefficient der höchsten Potenz von x in F_1,

$$F_2 = F_1 - \frac{a_0^{(1)}}{b_0} x^{n-p-r} G \qquad (r \geq 1)$$

ganze Function höchstens $(n-p-r-1)^{\text{ten}}$ Grades von . f. Schliefslich gelangt man zu zwei ganzen Func- $F_{k-1}(x)$, $F_k(x)$, die erste in x vom Grade

$$p + s \quad (s \geqq 0),$$

reite höchstens vom Grade $p - 1$, so dafs

$$F_k = F_{k-1} - \frac{a_0^{(k-1)}}{b_0} x^s G$$

Setzt man

$$\frac{a_0}{b_0} x^{n-p} + \frac{a_0^{(1)}}{b_0} x^{n-p-r} + \cdots + \frac{a_0^{(k-1)}}{b_0} x^s = Q(x)$$

ddirt die vorstehenden Gleichungen, so erhält man in hat

$$F_k = F - QG.$$

Gäbe es noch ein anderes Functionenpaar $Q' G_1'$, erstere in x vom Grade $n - p$, letztere höchstens vom Grade $p - 1$, welche die Gleichung

$$F = Q' G + G_1'$$

befriedigen, so hätte man

$$(Q' - Q)G = G_1 - G_1'.$$

Das ist aber nur möglich, wenn $Q' = Q$, $G_1' = G_1$ ist; denn eine Function von höchstens $(p-1)^{\text{ten}}$ Grade in x kann nicht durch eine p^{ten} Grades theilbar sein.

Für ein Paar von Functionen von mehreren Veränderlichen

$$F(x_1\, x_2 \ldots x_m) \qquad G(x_1, x_2 \ldots x_m) \qquad (m \geqq 2)$$

besteht eine der vorstehenden ähnliche Relation nur insofern, als man sie als ganze Functionen einer und derselben Veränderlichen z. B. x_1 (mit Coefficienten, die ganze Functionen der übrigen Veränderlichen sind) betrachtet. Dies ist unmittelbar klar, wenn F und G in x_1 je von demselben Grade sind, als die Dimension in Beziehung auf alle Veränderliche beträgt. Sollte das nicht der Fall sein, so läfst es sich durch eine lineare Substitution

$$x_1 = c_1 x_1', \qquad x_2 = x_2' + c_2 x_1,$$
$$x_3 = x_3' + c_3 x_1' \ldots x_m = x_m' + c_m x_1'$$

bei passender Wahl der Coefficienten $c_1\, c_2 \ldots c_m$ erreichen. Nimmt man diese Zahlen nur so an, dafs weder das Aggregat der Glieder höchster Dimension in F, noch das in G für

$$x_1 = c_1 \qquad x_2 = c_2 \ldots x_m = c_m$$

Null ist, so ist in jeder der transformirten Functionen der höchste Exponent von x_1' gleich der Dimension der ursprünglichen Function hinsichtlich $x_1\, x_2 \ldots x_m$.

3. Die Ableitungen einer ganzen Function einer Veränderlichen.

Setzen wir in

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

anstatt x $x + h$, unter x einen bestimmten Werth verstehend, und ordnen $F(x + h)$ mit Hilfe des binomischen Satzes für ganze positive Exponenten (I. 7) nach Potenzen von h, so treten als Coefficienten von h $h^2 \ldots h^n$ ganze Functionen von x bezw. den Graden $n - 1$, $n - 2 \ldots 0$ auf, welche mit

$2! \ldots n!$ multiplicirt, die erste, zweite $\ldots n^{te}$ Ableiung von $F(x)$ heifsen und mit

$$DF(x),\ D^2F(x) \ldots D^nF(x)$$

er kürzer

$$F'(x),\ F''(x) \ldots . F^{(n)}(x)$$

:eichnet werden. Man schreibt also

$$F(x+h)$$

$$F(x) + F'(x).h + \frac{F''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(x)}{n!}h^n, \qquad (1)$$

$$(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1} \qquad (2)$$

$$F^{(r)}(x) = \sum_r^n k\,(k-1)\ldots(k-r+1)\,a_{n-k}\,x^{k-r} \qquad (r = 1, 2 \ldots n) \qquad (3)$$

— Aus den Formeln (2) (3) erkennt man, dafs $F^{(r)}(x)$ s $F^{(r-1)}(x)$ nach demselben Gesetze hervorgeht, wie (x) aus $F(x)$.

Beispiele. 1) Setzt man in $(x-a)^n$ statt x $x+h$, so ergiebt a die Formel

$$D_x^r (x-a)^n = n(n-1)\ldots(n-r+1)(x-a)^{n-r} \qquad (r = 1, 2 \ldots n). \qquad (4)$$

2) Bedeuten $F(x)$ $G(x)$ zwei ganze Functionen von x, so hat n für $r = 1, 2 \ldots$

$$D_x^r F(x)\,G(x)$$

$$F^{(r)}(x)\,G(x) + r\,F^{(r-1)}(x)G'(x) + \cdots + \binom{r}{k}F^{(r-k)}(x)\,G^{(k)}(x) + \cdots + r\,F'(x)\,G^{(r-1)}(x) + F(x)G^{(r)}(x). \qquad (5)$$

e Formel ergiebt sich sofort, wenn man in

$$F(x+h)\,G(x+h)$$

r $F(x+h)$ den Ausdruck (1) und für $G(x+h)$ den analogen einsetzt und das Product nach Potenzen von h ordnet.

3) Für das Product

$$P(x) = a_0\,(x-c_1)^{k_1}\,(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_l)^{k_l},$$

) a_0 eine Constante, $k_1\ k_2 \ldots k_l$ natürliche Zahlen bedeuten, ist

$$P'(x) = a_0 \sum_1^l k_i\,(x-c_1)^{k_1}\ldots(x-c_{r-1})^{k_{r-1}}\,(x-c_r)^{k_r-1}\,(x-c_{r+1})^{k_{r+1}}\cdots(x-c_l)^{k_l}, \qquad (6)$$

so dafs sich ergiebt

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{k_1}{x - c_1} + \frac{k_2}{x - c_2} + \cdots + \frac{k_l}{x - c_l} \quad (7)$$

Wenn für einen bestimmten Werth $x = x_0$ $F(x)$ verschwindet, so heifst er eine Wurzel von $F(x)$. Bestehen neben der Gleichung $F(x_0) = 0$ noch die folgenden

$F'(x_0) = 0 \quad F''(x_0) = 0 \cdots\cdots F^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad (n \geqq k \geqq 1)$

während $F^{(k)}(x_0)$ nicht 0 ist, so heifst x_0 eine k-fache Wurzel von $F(x)$. Setzt man in (1) zuerst $x = x_0$, hierauf

$$h = x - x_0,$$

so erkennt man, dafs in dem in Rede stehenden Falle $F(x)$ durch $(x - x_0)^k$ theilbar ist. Man nennt k die Ordnung des Verschwindens von $F(x)$ für $x = x_0$.

Dafs die ganze Function $F(x)$ für jeden Werth $x = x_0$ stetig ist, folgt schon aus dem ersten Satze in III. 8. Insbesondere hat man den Satz: „Die ganze Function n^{ten} Grades von h

$$G(h) = b_m h^m + b_{m+1} h^{m+1} + \cdots + b_n h^n, \quad (1 \leqq m \leqq n)$$

welche für $h = 0$ Null ist, hat bei $\lim h = 0$ den Grenzwerth 0.“ Dieser Satz, mittelst dessen auch die Stetigkeit von $F(x)$ für jeden Werth von x und zwar aus (1) sich ergiebt, wird manchmal direct bewiesen (vgl. p. 279 d. I. T.).

4. Ableitungen von ganzen Functionen mehrerer Veränderlichen.

Setzen wir in der ganzen Function n^{ter} Dimension von

$$x_1\, x_2 \ldots x_m$$

$F(x_1\, x_2 \ldots x_m)$ anstatt $x_1\, x_2 \ldots x_m$ bezw.

$$x_1 + h_1,\ x_2 + h_2 \ldots x_m + h_m$$

und ordnen

$$F(x_1 + h_1,\ \ x_2 + h_2 \ldots x_m + h_m) \quad (8)$$

mit Hilfe des polynomischen Satzes für ganze positive Exponenten nach Potenzen von $h_1\ h_2 \ldots h_m$, so nennen wir den Coefficienten des Gliedes

$$r_1!\, r_2! \ldots h_{k_1}^{r_1}\, h_{k_2}^{r_2} \ldots,$$

ı die Exponenten natürliche Zahlen sind, deren Summe ıicht übersteigt, eine partielle Ableitung s^{ter} Ord- ; von F und zwar k_1 mal nach x_1, k_2 mal nach . und bezeichnen ihn gewöhnlich mit

$$F_{k_1 \ldots k_2 \ldots}(x_1\, x_2 \ldots x_m),$$

ı zuerst $k_1\, r_1$ mal, hierauf $k_2\, r_2$ mal .... als Index an- zt wird. Manchmal erscheint als zweckmäſsiger die ıde Bezeichnung des allgemeinen Gliedes von (8):

$$\frac{h_1^{r_1} h_2^{r_2} \ldots h_m^{r_m}}{r_1!\, r_2! \ldots r_m!} F_{r_1, r_2 \ldots r_m}(x_1\, x_2 \ldots x_m), \tag{9}$$

ı $r_1\, r_2 \ldots$ natürliche Zahlen oder Null bedeuten und $0! = 1$ ·tzen ist. Hervorzuheben sind die m partiellen Ablei- n erster Ordnung, nämlich nach x_1, nach $x_2 \ldots$ nach velche man aus $F(x_1 \ldots x_m)$ dadurch erhält, daſs man alle Veränderlichen bis auf eine constant denkt, hin- ich dieser aber $F(x_1 \ldots x_m)$ demselben Processe unter- , welcher in Nr. 6 von $F(x)$ auf $F'(x)$ geführt hat. lie nämliche Art gelangt man von der partiellen Ab- g in (9) auf eine solche, in der irgend ein Index um Einheit gröſser ist.

)aſs die ganze Function

$$F(x_1\, x_2 \ldots x_m)$$

edes System bestimmter Werthe von $x_1\, x_2 \ldots x_m$ g ist, folgt schon aus dem ersten Satze in III. 8. Ins- dere hat man den Satz: „Die ganze Function von h_1 h_m, in h_1 vom Grade n_1, in h_2 vom Grade $n_2 \ldots$, in h_m Grade n_m

$$G(h_1, h_2 \ldots h_m),$$

e für

$$h_1 = 0 \qquad h_2 = 0 \ldots \qquad h_m = 0$$

ist, hat bei

$$\lim h_1 = 0 \qquad \lim h_2 = 0 \ldots \qquad \lim h_m = 0$$

ırenzwerth O.“ Dieser Satz, mittelst dessen auch die keit von $F(x_1 \ldots x_m)$ für jedes Werthsystem $x_1 \ldots x_m$ ırgiebt, läſst sich direct, wie folgt, beweisen.

Bezeichnen wir den gröfsten der absoluten Beträge der Coefficienten von G mit B und die absoluten Beträge von $h_1\ h_2 \ldots h_m$ mit $H_1\ H_2 \ldots H_m$, so finden wir, wie leicht ersichtlich ist,

$$\begin{aligned}&|\,G(h_1 \ldots h_m)\,|\\ &\leqq B\,[(1 + H_1 + \cdots + H_1^{n_1}) \ldots (1 + H_m + \cdots + H_m^{n_m}) - 1],\end{aligned}$$

somit vermöge der Formel

$$1 + H_r + \cdots + H_r^n r = \frac{1 - H_r^n r}{1 - H_r}, \qquad (r = 1, 2 \ldots m),$$

wenn $H_r < 1$ vorausgesetzt wird,

$$|\,G(h_1 \ldots h_m)\,| < B\left\{\frac{1}{(1 - H_1)\ldots(1 - H_m)} - 1\right\}.$$

Demnach ist

$$|\,G(h_1 \ldots h_m)\,| < \varepsilon,$$

wenn nur $|\,h_r\,| < H$ ist, wo die Zahl H so zu wählen ist, dafs sie kleiner als 1 ist und die Ungleichung

$$B\left\{\frac{1}{(1 - H)^m} - 1\right\} < \varepsilon$$

befriedigt, also

$$H < 1 - \sqrt[m]{\frac{B}{B + \varepsilon}}$$

zu denken ist. Demnach ist nach III. 7

$$\lim_{h_1 = 0 \ldots\ h_m = 0} G(h_1 \ldots h_m) = 0.$$

Satz von den homogenen ganzen Functionen n^{ter} Dimension der Veränderlichen $x_1\ x_2 \ldots x_m$. Nach Nr. 1 hat man für eine solche bei beliebigem t

$$F(tx_1,\ tx_2 \ldots tx_m) = t^n\, F(x_1\ x_2 \ldots x_m). \tag{10}$$

Setzt man hier $t = 1 + u$, also $tx_1 = x_1 + ux_1$ u. s. w. und entwickelt auf beiden Seiten nach Potenzen von u, so findet man zufolge des Vorstehenden

$$F + u(x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_m F_m) + \cdots = (1 + nu + \cdots)F,$$

worin $F_1\ F_2 \ldots F_m$ die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von F sind. Vermöge der Willkürlichkeit von u müssen nach dem 2. Satze der folgenden Nr. 5 die nämlichen Potenzen von u auf beiden Seiten dieser Gleichung gleiche Coefficienten haben. Man findet demnach

$$x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_m F_m = nF$$

und eine Reihe ähnlicher Formeln.

Diese Formeln gelten im Allgemeinen auch für nicht ganze analytische Functionen

$$F(x_1 \ldots x_m),$$

lche der Gleichung (10) Genüge leisten und zwar auch im Falle n keine natürliche Zahl ist.

5. Identitätssätze für ganze Functionen.

Hilfssatz. „Wenn die ganze Function n^{ten} Grades n x

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \qquad (11)$$

k_0-fache Wurzel $x = x_0$, die k_1-fache Wurzel $x = x_1 \ldots$ k_r-fache Wurzel $x = x_r$ $(r \geq 0)$ hat, wobei

$$k_0 + k_1 + \cdots + k_r$$

Zahl n nicht übersteigt, so ist $F(x)$ durch

$$(x - x_0)^{k_0}(x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_r)^{k_r}$$

ilbar."

Beweis. Man hat zunächst nach (1) in Nr. 3

$$F(x) = (x - x_0)^{k_0} F_1(x), \qquad (12)$$

$F_1(x)$ eine ganze Function $(n-k_0)^{ten}$ Grades von x ist, welcher das Glied x^{n-k_0} den Coefficienten a_0 hat. Nach raussetzung soll ferner

$$F(x_1) = 0 \qquad F'(x_1) = 0 \ldots \qquad F^{(k_1-1)}(x_1) = 0 \qquad (13)$$

1. Aus der ersten Gleichung folgt nach Formel (12) wegen Ungleichheit von x_0 und x_1

$$F_1(x_1) = 0.$$

nmehr ergiebt sich aus den Relationen (5) d. i.

$$(x) = k_0(x - x_0)^{k_1-1} F_1(x) + (x - x_0)^{k_0} F_1'(x)$$
$$(x) = k_0(k_0 - 1)(x - x_0)^{k_0-2} F_1(x) + 2k_0(x - x_0)^{k_0-1} F_1'(x) + (x - x_0)^{k_0} F_1''(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gen der Gleichungen (13) nacheinander

$$F_1'(x_1) = 0 \qquad F_1''(x_1) = 0 \ldots. \qquad F_1^{(k_1-1)}(x_1) = 0.$$

Da $F^{(k_1)}(x_1)$ nicht Null ist, so kann jetzt auch $F_1^{(k_1)}(x_1)$ ht Null sein. Demnach ist $x = x_1$ k_1-fache Wurzel auch $F_1(x)$ und man hat

$$F_1(x) = (x - x_1)^{k_1} F_2(x), \qquad (14)$$

$F_2(x)$ eine ganze Function $(n-k_0-k_1)^{ten}$ Grades von x

ist, in welcher das Glied höchsten Grades den Coefficienten a_0 besitzt. Mithin ist

$$F(x) = (x - x_0)^{k_0} (x - x_1)^{k_1} F_2(x).$$

Denkt man sich hier $(x - x_0)^{k_0} (x - x_1)^{k_1}$ als eine ganze Function und wendet wieder den Satz (5) an, so ergiebt sich, dafs $x = x_2$ k_2-fache Wurzel von $F_2(x)$, also

$$F_2(x) = (x - x_2)^{k_2} F_3(x) \tag{15}$$

ist, wo $F_3(x)$ eine ganze Function $(n - k_0 - k_1 - k_2)^{\text{ten}}$ Grades von x ist, in welcher das Glied höchsten Grades den Coefficienten a_0 hat u. s. f. Auf diese Art gelangt man schliefslich zu ganzen Functionen $F_r(x)$ $F_{r+1}(x)$ von x, bezw. von den Graden

$$n - k_0 - k_1 - \cdots - k_{r-1},$$
$$n - k_0 - k_1 - \cdots - k_r,$$

in deren jeder das Glied höchsten Grades den Coefficienten a_0 hat und unter denen die Beziehung besteht:

$$F_r(x) = (x - x_r)^{k_r} F_{r+1}(x). \tag{16}$$

Aus den Gleichungen (13) (14)—(16) folgt dann die Formel

$$F(x) = (x - x_0)^{k_0} (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_r)^{k_r} F_{r+1}(x). \tag{17}$$

1. Satz. „Wenn eine ganze Function n^{ten} Grades von x, wie $F(x)$ in (11), $l + 1$ $(l \geqq 0)$ Wurzeln und zwar die k_0-fache Wurzel $x = x_0$, die k_1-fache $x = x_1 \ldots$ die k_l-fache $x = x_l$ hat und es ist

$$k_0 + k_1 + \cdots + k_l = n + 1,$$

so ist $F(x)$ identisch Null d. h. man hat in (11)

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = 0 \ldots . \qquad a_n = 0.$$

Insbesondere besteht der Satz: „Wenn eine ganze Function n^{ten} Grades von x für $n + 1$ ungleiche Werthe von x:

$$x = x_0 \qquad x = x_1 \ldots . \qquad x = x_n$$

Null ist, so ist sie identisch Null."

Beweis. Wir haben nach (17)

$$F(x) = a_0 (x - x_0)^{k_0} (x - x_1)^{k_1} \ldots .$$
$$(x - x_{l-1})^{k_{l-1}} (x - x_l)^{k_l - 1}. \tag{18}$$

Ist $l = 0$ $k_l = n + 1$, so hat man

$$F^{(k_l-1)}(x_l) = (k_l - 1)!\, a_0,$$

lso, da

$$F^{(k_l-1)}(x_l) = 0 \tag{19}$$

in soll, $a_0 = 0$. Ist $l > 1$, so denke man sich in (18) alle ictoren bis auf den letzten zu einer ganzen Function $P(x)$ reinigt. Dann zeigen die Formeln (4) (5) in Nr. 3, dafs

$$F(x_l) = 0 \qquad F'(x_l) = 0 \ldots \quad F^{(k_l-2)}(x_l) = 0$$

. Vermöge der Gleichung (19) mufs $P(x_l) = 0$, somit, da $x_1 \ldots x_l$ als ungleiche Zahlen zu betrachten sind, $a_0 = 0$ in. — Es hat demnach auch die Function

$$a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

e k_0-fache Wurzel $x = x_0$, die k_1-fache Wurzel $x = x_1 \ldots$, e k_l-fache Wurzel $x = x_l$, wobei

$$k_0 + k_1 + \cdots + k_l > (n - 1) + 1$$

t, also mufs $a_1 = 0$ sein u. s. f.

2. Satz. Die ganzen Functionen von x, jede höchens vom n^{ten} Grade,

$$G(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$$
$$H(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$$

llen für $l + 1$ $(l \geq 0)$ Werthe

$$x = x_0 \qquad x = x_1 \ldots \qquad x = x_l$$

eiche Werthe haben:

$$G(x_r) = H(x_r) \qquad (r = 0, 1 \ldots l).$$

nd nun $k_0\ k_1 \ldots k_l\ l + 1$ natürliche Zahlen, deren mme $n + 1$ beträgt, und bestehen aufser diesen leichungen noch die folgenden

$$G'(x_r) = H'(x_r), \qquad G''(x_r) = H''(x_r) \ldots$$
$$G^{(k_r-1)}(x_r) = H^{(k_r-1)}(x_r) \quad (r = 0, 1 \ldots l),$$

sind die ganzen Functionen $G(x)$ und $H(x)$ idensch d. h. es ist

$$b_0 = c_0 \qquad b_1 = c_1 \ldots \qquad b_n = c_n.$$

Insbesondere besteht der Satz[1]): Wenn zwei ganze unctionen von x_1 jede höchstens vom n^{ten} Grade, r $n + 1$ von einander verschiedene Werthe von x

$$x_0, x_1 \ldots x_n$$

gleiche Werthe haben, so sind sie identisch.

Die Sätze folgen unmittelbar durch Anwendung des vorhergehenden auf die Differenz

$$G(x) - H(x) = (b_0 - c_0)x^n + (b_1 - c_1)x^{n-1} + \cdots + (b_n - c_n).$$

3. Satz. „Wenn die ganze Function $F(x_1\, x_2 \ldots x_m)$, in $x_1\, x_2 \ldots x_m$ bezw. von den Graden $n_1\, n_2 \ldots n_m$, Null ist für alle Werthsysteme $x_1\, x_2 \ldots x_m$, worin $x_1\, x_2 \ldots x_m$ bezw. aus den Reihen

$$\begin{array}{l} x_0^{(1)}\, x_1^{(1)} \ldots x_{n_1}^{(1)} \\ x_0^{(2)}\, x_1^{(2)} \ldots x_{n_2}^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_0^{(m)} x_1^{(m)} \ldots x_{n_m}^{(m)}, \end{array}$$

deren jede unter sich verschiedene Zahlen enthält, entnommen sind, so ist sie identisch Null d. h. alle ihre Coefficienten sind Null."

Der Satz wird schrittweise bewiesen. Denkt man sich zunächst $m = 2$, so sei

$$F(x_1, x_2) = \sum_0^{n_2} x_2^{n_2 - r} F_r(x_1).$$

Da

$$F(x_r^{(1)}, x_2) = 0 \qquad (r = 0, 1 \ldots n_1)$$

ist für die Werthe

$$x_2 = x_0^{(2)} \quad x_2 = x_1^{(2)} \ldots x_2 = x_{n_2}^{(2)},$$

so hat man nach dem 1. Satze

$$F_0(x_r^{(1)}) = 0 \qquad F_1(x_r^{(1)}) = 0 \ldots \qquad F_{n_2}(x_r^{(1)}) = 0.$$

Jedes der Polynome $F_r(x_1)$ ist höchstens vom Grade n_1 in x_1 und verschwindet für die Werthe

$$x_1 = x_0^{(1)} \qquad x_1 = x_1^{(1)} \ldots \qquad x_1 = x_{n_1}^{(1)},$$

ist also identisch Null d. i. alle Coefficienten von $F(x_1, x_2)$ sind Null. Denselben Schluſs wiederholt man im Falle $m = 3$ u. s. f.

4. Satz[2]). „Wenn zwei ganze Functionen von m Veränderlichen

$$G(x_1\, x_2 \ldots x_m) \qquad H(x_1\, x_2 \ldots x_m),$$

n Grad in x_1 die Zahl n_1, in x_2 die Zahl $n_2 \ldots$ in x_m die n_m nicht übersteigt, für alle im 3. Satze genannten thsysteme von $x_1\, x_2 \ldots x_m$ einander gleich sind, so sind dentisch d. h. die Coefficienten eines jeden Gliedes

$$x_1^{r_1}\, x_2^{r_2} \ldots x_m^{r_m}$$

in beiden einander gleich." — Der Satz folgt aus dem ergehenden ebenso wie der 2. aus dem 1.

6. Theilbarkeit der ganzen Functionen einer Veränderlichen x.

An den in Nr. 2 vorgeführten Satz über die Division er ganzen Functionen einer Veränderlichen knüpft sich Theorie, welche der in II. 11 d. I. T. entwickelten über Theilbarkeit der natürlichen Zahlen analog ist. — Zu- st bemerke man die aus dem Begriffe der Theilbarkeit ittelbar hervorgehenden Sätze: „Es seien $F(x)$, $G(x)$,) ..... ganze Functionen von x. Ist $F(x)$ durch $G(x)$ bar, so auch das Product $F(x)\, H(x)$. Ist $F(x)$ durch), $G(x)$ durch $H(x)$ theilbar, so auch $F(x)$ durch $H(x)$. $F(x)$, $G(x)$ durch $H(x)$ theilbar, so auch jede ganze tion

$$P(x)\, F(x) + Q(x)\, G(x)."$$

Wenn von den ganzen Functionen $F(x)$, $G(x)$ des n^{ten} p^{ten} Grades $(n \geqq p)$ die erste nicht durch die zweite bar ist, so hat man

$$F(x) = Q(x)\, G(x) + G'(x), \qquad \text{(a)}$$

n Q eine Function vom Grade $n-p$, G' eine solche höch- s vom Grade $p-1$ bedeutet. Jeder gemeinsame Theiler F und G ist auch Theiler von G'. Ist G durch G' bar, so auch F und zwar ist G' der beiden Functionen einsame Theiler höchsten Grades. Ist aber G durch G' t theilbar, so hat man

$$G(x) = Q'(x)\, G'(x) + G''(x),$$

G'' von niedrigerem Grade als G' und durch jeden ge-

meinsamen Theiler von $F\ G$ theilbar ist u. s. f. Im Allgemeinen sei

$$G^{(r-2)}(x) = Q^{(r-1)}(x)\, G^{(r-1)}(x) + G^{(r)}(x). \qquad (b)$$

Da die Grade der Reste $G'\ G''\ldots G^{(r)}$ beständig abnehmen, so mufs diese Reihe einmal abbrechen. Auch der letzte Rest $G^{(k)}$ ist durch jeden gemeinsamen Theiler von F und G theilbar; somit kann es keinen solchen von höherem Grade in x geben als $G^{(k)}$. Falls $G^{(k)}$ vom 0ten Grade in x, also ein in den Coefficienten von $F\ G$ (bezw. in den als bekannt geltenden Zahlen) rationaler Ausdruck ist, so bezeichnet man $F\ G$ als Functionen von x ohne gemeinsamen Theiler. Falls $G^{(k)}$ x enthält, so ist es der gemeinsame Theiler höchsten Grades von $F\ G$ und heifst ihr gröfster gemeinsamer Theiler. Man hat dann

$$\begin{aligned} F(x) &= G^{(k)}(x)\, F_1(x) \\ G(x) &= G^{(k)}(x)\, G_1(x), \end{aligned} \qquad (c)$$

wo F_1 und G_1 Functionen ohne gemeinsamen Theiler sind. — Der gröfste gemeinschaftliche Theiler von mehr als zwei Functionen $F\ G\ H\ldots$ läfst sich ermitteln, indem man zuerst den gröfsten gemeinsamen Theiler T von $F\ G$ sucht, hierauf den von T und H u. s. f.

Auch hier gilt der Hauptsatz: Haben die Functionen $F(x)$, $G(x)$ keinen gemeinsamen Theiler, so ist jeder gemeinsame Theiler $M(x)$ der Functionen $F(x)\,.\,H(x)$ und $G(x)$ ein Theiler von $H(x)$.

Er wird genau so bewiesen, wie der entsprechende Satz a. a. O. und führt zu der analogen Folgerung: „Eine ganze Function $F(x)$ ist entweder irreducibel d. h. ohne Theiler oder sie läfst sich und zwar nur auf eine Weise als Product einer endlichen Anzahl von irreducibelen Functionen darstellen.“ Die Frage, ob eine gegebene Function von x irreducibel ist oder nicht, hängt zufolge einer in Nr. 2 gemachten Bemerkung davon ab, welche Arten von Zahlen als bekannt vorausgesetzt sind. Wir werden sehen, dafs wenn sie alle zugelassen werden, jede ganze Function von x von höherem als dem ersten Grade in lineare Factoren zerlegt werden kann.

Aus dem Hauptsatze ergiebt sich noch, wie die gemeinen Vielfache zweier oder mehrerer Functionen gefunden rden und dafs es, wie in dem Falle der gemeinen Brüche III. 11 d. I. T., für jede gebrochene rationale Function n x $F(x) : G(x)$ eine und nur eine reducirte Form

$$F(x) : G(x) = F_1(x) : G_1(x)$$

e, in welcher Zähler und Nenner Functionen ohne gemeinsamen Theiler sind.

Theilbarkeit von ganzen Functionen von zwei und von mehreren Veränderlichen.

Die Sätze der vorigen Nr. lassen sich in folgender Art f ganze Functionen zunächst von zwei Veränderlichen x_1 übertragen.

1. Hilfssatz. „Wenn eine ganze Function von x_1 x_2

$$F(x_1, x_2)$$

ch eine ganze Function von nur einer der Veränderlichen z. B. x_1 ilbar sein soll, so müssen alle Coefficienten der nach der anderen, o x_2 geordneten Function F durch dieselbe theilbar sein."

Es sei wie in Nr. 5

$$F(x_1, x_2) = \sum_0^{n_2} F_r(x_1)\, x_2^{n_2 - r}. \tag{d}$$

n soll

$$F(x_1, x_2) = G(x_1)\, H(x_1, x_2) \tag{e}$$

, worin G eine ganze Function von x_1 allein, H eine solche von x_2 bedeutet. Dann mufs H in x_2 vom Grade n_2 sein; es sei also

$$H(x_1, x_2) = \sum_0^{n_2} H_r(x_1)\, x_2^{n_2 - r}.$$

ken wir uns in (e) für x_1 irgend einen bestimmten Werth x_1' ge-t, so dürfen wir nach dem 2. Satze in Nr. 5 schliefsen, dafs

$$F_r(x_1') = G(x_1')\, H_r(x_1') \qquad (r = 0, 1 \ldots n_2)$$

woraus sich auf die nämliche Art wegen der Willkürlichkeit von die Relation

$$F_r(x_1) = G(x_1)\, H_r(x_1) \qquad (r = 0, 1 \ldots n_2)$$

ebt.

2. Hilfssatz. „Wenn das Product zweier ganzen Functionen von x_2:

$$F(x_1\, x_2) \,.\, G(x_1\, x_2),$$

die beide x_2 enthalten, theilbar ist durch eine irreducibele Function von x_1: $\Psi(x_1)$, so müssen entweder alle Coefficienten der nach x_2 geordneten Function F, oder alle der nach x_2 geordneten Function G durch $\Psi(x_1)$ theilbar sein."

Beweis. Angenommen, es seien sowohl in der Entwickelung (d) von F nach Potenzen von x_2, als auch in der von G Glieder vorhanden, deren Coefficienten nicht durch $\Psi(x_1)$ theilbar sind, so seien ihre Summen die ganzen Functionen $F'(x_1\, x_2)$ $G'(x_1\, x_2)$, in x_2 bezw. vom Grade i, k d. i.

$$F'(x_1, x_2) = F_0'(x_1) \cdot x_2^i + \cdots$$
$$G'(x_1, x_2) = G_0'(x_1) \cdot x_2^k + \cdots$$

Dann kann man

$$F = F' + \Psi F'' \qquad G = G' + \Psi G''$$

setzen, wo F'' G'' entweder Null oder ganze Functionen von x_1 x_2 bedeuten. Nun hat man

$$FG = F'G' + \Psi(F'G'' + F''G' + \Psi F''G'').$$

Daraus ist ersichtlich, dafs unter der obigen Voraussetzung der Coefficient von x_2^{i+k} d. i. die ganze Function von x_1

$$F_0'(x_1) \cdot G_0'(x_1) + \Psi(x_1) \cdot \Psi'(x_1),$$

worin $\Psi'(x_1)$ auch eine ganze Function von x_1 bezeichnet, nicht durch $\Psi(x_1)$ theilbar sein kann. — Somit sind entweder alle Coefficienten $F_r(x_1)$ in (d) oder alle in der analogen Darstellung von G durch $\Psi(x_1)$ theilbar.

Wenn zwei ganze Functionen $F(x_1\, x_2)$ $G(x_1\, x_2)$ einen Theiler gemein haben, so mufs derselbe entweder frei von x_2 sein oder x_2 enthalten. Ihr gröfster gemeinsamer Theiler der ersten Art mufs zufolge des 1. Hilfssatzes der gröfste gemeinsame Theiler aller Functionen $F_r(x_1)$ in (d) und aller analogen Functionen $G_r(x_1)$ in G sein. Kommt ein solcher Theiler $T(x_1)$ vor, so setze man

$$F(x_1, x_2) = T(x_1)\, F'(x_1, x_2)$$
$$G(x_1, x_2) = T(x_1)\, G'(x_1, x_2),$$

worin F' und G' keinen blofs x_1 enthaltenden Theiler gemein haben. Der gröfste gemeinsame Theiler von F G der zweiten Art ist zugleich gröfster gemeinsamer Theiler von F' G'.

3. Satz. „Findet man nach dem Verfahren der vorigen Nr., dafs die Functionen $F'(x_1\, x_2)$ $G'(x_1\, x_2)$, welche keinen blofs x_1 enthaltenden Theiler gemein haben, als Func-

tionen von x_2 betrachtet, einen gröfsten gemeinsamen Theiler $U(x_2)$ besitzen, so wird der gröfste, ihnen als Functionen von x_1 und x_2 gemeinsame Theiler $U(x_1\, x_2)$ erhalten, indem man die Glieder von $U(x_2)$, falls sie in x_1 nicht schon ganz sein sollten, auf den Generalnenner bringt und diesen, sowie etwaige blofs x_1 enthaltende Factoren des neuen Zählers wegläfst. Dann hat man

$$F'(x_1, x_2) = U(x_1, x_2)\, F_1(x_1, x_2)$$
$$G'(x_1, x_2) = U(x_1, x_2)\, G_1(x_1, x_2),$$

wo U, F_1, G_1 ganze Function von x_1 und x_2 bezeichnen, die beiden letzteren solche ohne gemeinsamen Theiler."

Beweis. Aus den Gleichungen (c) d. i. hier

$$F'(x_1, x_2) = U(x_2)\, F_1(x_2)$$
$$G'(x_1, x_2) = U(x_2)\, G_1(x_2)$$

ergiebt sich, wenn man anstatt $U(x_2)$ $U(x_1\, x_2)$ und analog anstatt $F_1(x_2)$ $G_1(x_2)$ ganze Functionen von x_1 und x_2:

$$F_1(x_1\, x_2), \quad G_1(x_1\, x_2),$$

welche keinen blofs von x_1 abhängigen Theiler enthalten und sicher ohne gemeinsamen Theiler sind, einführt,

$$F'(x_1, x_2) = \frac{\Phi(x_1)\, U(x_1, x_2)\, F_1(x_1\, x_2)}{\Psi(x_1)}$$
$$G'(x_1, x_2) = \frac{\mathsf{X}(x_1)\, U(x_1, x_2)\, G_1(x_1\, x_2)}{\Omega(x_1)}.$$

Die darin etwa auftretenden Functionen von x_1: Φ Ψ einer-, und X Ω andererseits sollen jedenfalls ohne gemeinsamen Theiler sein. Dann mufs aber $\Psi(x_1)$ eine Constante sein. Denn wäre das nicht der Fall, und $\Psi_0(x_1)$ ein irreducibeler Factor von $\Psi(x_1)$, so müfste er in UF_1 enthalten, somit nach dem 2. Hilfssatze entweder alle Coefficienten der nach x_2 geordneten Function $U(x_1\, x_2)$ oder alle von $F_1(x_1\, x_2)$ durch $\Psi_0(x_1)$ theilbar sein, was unmöglich ist, da weder die einen noch die anderen einen Theiler gemein haben. Auch $\Phi(x_1)$ mufs eine Constante sein, da $F'(x_1\, x_2)$ durch keine Function von x_1 theilbar sein soll. Auf die nämliche Art ergiebt sich, dafs X Ω Constante sind.

4. Hauptsatz. „Haben $F(x_1\, x_2)$ $G(x_1\, x_2)$ keinen ge-

meinsamen Theiler, so ist jeder gemeinsame Theiler der Functionen $F(x_1\, x_2)$. $H(x_1\, x_2)$ und $G(x_1\, x_2)$ ein Theiler von $H(x_1\, x_2)$."

Beweis. Der genannte gemeinsame Theiler ist entweder frei von x_2 oder nicht. Im ersten Falle folgt nach dem 2. Hilfssatze, dafs alle Coefficienten der nach x_2 geordneten Function $H(x_1\, x_2)$ durch jeden irreducibelen Factor $M_0(x_1)$ dieses Theilers, den wir mit $M(x_1)$ bezeichnen, theilbar sind, denn die Coefficienten von $F(x_1\, x_2)$ haben mit denen von $G(x_1\, x_2)$ keinen Theiler gemein. Dividirt man $F.H$ durch $M_0(x_1)$ und wiederholt am Quotienten denselben Schlufs hinsichtlich eines zweiten irreducibelen Factors von $M(x_1)$ (der natürlich wieder $M_0(x_1)$ sein kann) u. s. f., so gelangt man zur Einsicht, dafs alle Coefficienten von $H(x_1\, x_2)$ durch $M(x_1)$ theilbar sein müssen. — Im zweiten Falle sei die Function $M(x_1\, x_2)$ gemeinsamer Theiler von $F.H$ und G und zwar ohne blofs x_1 enthaltenden Theiler. Wenn man alle Functionen als solche von x_2 betrachtet, so darf man nach dem Hauptsatze der vorigen Nr. schliefsen, dafs $H(x_1\, x_2)$ durch $M(x_1\, x_2)$ theilbar sein mufs. Man hat also

$$H(x_1, x_2) = \frac{M(x_1, x_2)\, H'(x_1, x_2)}{\Psi(x_1)},$$

wo H' eine ganze Function von $x_1\, x_2$, $\Psi(x_1)$ zunächst eine solche von x_1 bedeutet, beide jedenfalls ohne gemeinsamen Theiler. Demnach mufs nach dem soeben Bemerkten $M(x_1\, x_2)$ durch $\Psi(x_1)$ theilbar sein. Da jedoch $M(x_1\, x_2)$ keinen Theiler von der Form $\Psi(x_1)$ enthalten soll, so mufs $\Psi(x_1)$ eine Constante sein und es ist

$$H(x_1, x_2) = M(x_1, x_2)\, H'(x_1, x_2).$$

Aus dem vorstehenden Satze folgen:

5. Satz. „Eine ganze Function $F(x_1\, x_2)$ ist entweder irreducibel d. i. ohne Theiler oder sie läfst sich und zwar nur auf eine Weise als Product einer endlichen Anzahl von irreducibelen Factoren darstellen."

6. Satz. „Für jede gebrochene rationale Function von $x_1\, x_2$: $F(x_1\, x_2) : G(x_1\, x_2)$ giebt es eine und nur eine reducirte Form

$$F(x_1\, x_2) : G(x_1\, x_2) = F_1(x_1\, x_2) : G_1(x_1\, x_2),$$

in welcher Zähler und Nenner Functionen ohne gemeinsamen Theiler sind.

Die Sätze 1—6 kann man auf ganze Functionen von beliebig vielen Veränderlichen $x_1\, x_2 \ldots x_m$ ausdehnen. Der Beweis ist so zu führen, dafs man sie für ganze Functionen von $1, 2 \ldots m-1$ Veränderlichen als giltig voraussetzt, und bietet keine Schwierigkeit mehr dar.

8. Der Fundamentalsatz der Algebra [3]).

Was immer auch die Coefficienten der ganzen Function n^{ten} Grades von x

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \qquad |a_0| > 0$$

für Werthe haben mögen, es giebt mindestens eine bestimmte, reelle oder complexe Zahl c, welche für x in die Gleichung $F(x) = 0$ gesetzt, sie befriedigt. c heifst eine Wurzel dieser Gleichung.

Beweis. Setzen wir $x = \xi + \eta i$ und bilden

$$F(\xi + \eta i) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta) \qquad (1)$$

$$|F(\xi + \eta i)| = \sqrt{\Phi(\xi\eta)^2 + \Psi(\xi\eta)^2} = \mathsf{P}(\xi, \eta),$$

so springt in die Augen, dafs $\mathsf{P}(\xi, \eta)$ eine stetige Function von ξ η für jedes System bestimmter Werthe von ξ η ist. Da $F(0) = a_n$ ist, so hat $\mathsf{P}(\xi, \eta)$, während ξ η alle endlichen Werthe durchlaufen, eine endliche untere Grenze $\varkappa$:

$$0 \leq \varkappa \leqq |a_n|.$$

Es ist ferner (vgl. III. 7)

$$\lim_{x=\infty} F(x) = \infty.$$

Bringt man nämlich $F(x)$ auf die Form

$$F(x) = x^n \left\{ a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} \right\}$$

und bemerkt, dafs weil bei $\lim x = \infty$

$$\lim (1 : x) = 0$$

ist, der zweite Factor bei $\lim x = \infty$ den von Null verschiedenen Grenzwerth a_0 hat, so erkennt man, dafs $F(x)$ bei

$\lim x = \infty$ den Grenzwerth ∞ hat. D. h. es giebt zu jeder positiven Zahl Γ eine solche positive Zahl ϱ, dafs für alle Werthe von x, wofür

$$|x| > \varrho, \quad P(\xi, \eta) = |F(x)| > \Gamma \tag{2}$$

ist. — Wir zeigen nun:

1) Es giebt ein Werthsystem $\xi = \alpha$ $\eta = \beta$, wofür $P(\xi, \eta)$ den Werth $\varkappa$ annimmt. Nehmen wir in (2) $\Gamma > \varkappa$ an und ziehen in der Constructionsebene der x vom Nullpunkte einen Kreis mit dem Radius ϱ, so mufs innerhalb desselben (seinen Umfang mitgerechnet) die untere Grenze von $P(\xi, \eta)$ $\varkappa$ sein. Denn da sie in einem der beiden Gebiete, in welche die Ebene durch den genannten Kreis zerlegt wird, $\varkappa$ sein mufs, so mufs sie in dem soeben bezeichneten $\varkappa$ sein. Nun ist $\Phi(\xi, \eta)$ eine stetige Function von ξ η in allen Punkten dieses Gebietes, somit giebt es nach IX. 21 d. I. T. ein Werthsystem $\xi = \alpha$ $\eta = \beta$, wofür die Gleichung besteht

$$P(\alpha, \beta) = \varkappa.$$

2) Die untere Grenze $\varkappa$ von $P(\xi, \eta)$ ist Null, also ist $P(\alpha, \beta) = 0$ und

$$F(\alpha + \beta i) = 0.$$

Denn wird $\varkappa$ als positiv angenommen, so können Werthsysteme ξ η nachgewiesen werden, wofür $P(\xi, \eta) < \varkappa$ ist, was der Relation $P(\xi, \eta) \geq \varkappa$ widerspricht. Die Möglichkeit solcher Werthe ξ η wird so gezeigt. Setzt man

$$\alpha + \beta i = c,$$

so sei

$$|F(c)| = \varkappa > 0.$$

$F'(c)$, $F''(c)$ ... können Null sein, endlich mufs man aber auf eine nicht verschwindende Ableitung

$$F^{(m)}(c) \quad (1 < m < n)$$

stofsen, da

$$F^{(n)}(c) = n!\, a_0$$

ist. Man hat demnach

$$F(c + h) = F(c) + \frac{F^{(m)}(c)}{m!} h^m + \frac{F^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} h^{m+1} + \cdots + a_0 h^n$$

$$\frac{F(c+h)}{F(c)} = 1 + c_m h^m + c_{m+1} h^{m+1} + \cdots + c_n h^n,$$

wo in trigonometrischer Form

$$c_r = \frac{F^{(r)}(c)}{r!\,F(c)} = \varrho_r (\cos \gamma_r + i \sin \gamma_r) \quad (r = m, m+1 \ldots n)$$
$$h = H(\cos \theta + i \sin \theta)$$

sein sollen. Es ist mithin

$$\frac{F(c+h)}{F(c)} = 1 + \varrho_m H^m [\cos(\gamma_m + m\theta) + i \sin(\gamma_m + m\theta)] + c_{m+1} h^{m+1} + \cdots + c_n h^n .$$

Bestimmen wir nun, was uns frei steht, θ so, dafs

$$\gamma_m + m\theta = \pi$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{F(c+h)}{F(c)} = (1 - \varrho_m H^m) + c_{m+1} h^{m+1} + \cdots + c_n h^n .$$

Nehmen wir H zunächst so an, dafs

$$\varrho_m H^m < 1$$

ist, so ergiebt sich nach dem 1. Satze in I. 8

$$\left| \frac{F(c+h)}{F(c)} \right| < (1 - \varrho_m H^m) + \varrho_{m+1} H^{m+1} + \cdots + \varrho_n H^n$$

$$\left| \frac{F(c+h)}{F(c)} \right| \leq 1 - \varrho_m H^m \left(1 - \frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m} H - \cdots - \frac{\varrho_n}{\varrho_m} H^{n-m}\right).$$

Durch weitere Verkleinerung von H läfst sich jedenfalls bewirken, dafs auch

$$\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m} H + \cdots + \frac{\varrho_n}{\varrho_m} H^{n-m} < 1$$

ist. Dann ist aber

$$|F(c+h)| < |F(c)|,$$

also, wenn das in dieser Art bestimmte

$$h = \varrho + \sigma i$$

gesetzt wird,

$$P(\alpha + \varrho, \beta + \sigma) < \varkappa .$$

9. Folgerungen.

1) Jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (3)$$

hat n Wurzeln $x = c_1\ c_2 \ldots c_n$, wobei eine wiederholte

Wurzel so oft zu zählen ist, als die Ordnung des Nullseins von $F(x)$ angiebt.

Nach dem Satze der vorigen Nr. giebt es mindestens eine Zahl c_1, wofür $F(c_1) = 0$ ist. Dividiren wir $F(x)$ durch den Wurzelfactor $x - c_1$, so ist der Quotient eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x: $F_1(x)$ (Nr. 3). Nach dem genannten Satze giebt es eine Zahl c_2 (die auch gleich c_1 sein kann), wofür $F_1(c_2) = 0$ und zufolge der Formel

$$F(x) = (x - c_1) F_1(x)$$

auch $F(c_2) = 0$ ist. Mittelst der ganzen Function $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades

$$\frac{F_1(x)}{x - c_2} = F_2(x)$$

gelangen wir zu einer dritten Wurzel c_3 der Gleichung (3). So fortfahrend werden wir, da der Grad der Quotienten $F_1(x)$ $F_2(x)\ldots$ sich stets um eine Einheit erniedrigt, n Zahlen c_1 $c_2 \ldots c_n$ erhalten, deren jede die Gleichung (3) befriedigt, denn man hat

$$F(x) = a_0 (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n). \qquad (4)$$

Wenn unter den $c_1 \ldots c_n$ k_1 (aber nicht mehr) gleich c_1 sind, so ist $F(x)$ durch $(x - c_1)^{k_1}$ theilbar und der Quotient

$$F(x) : (x - c_1)^{k_1}$$

verschwindet für $x = c_1$ nicht mehr. k_1 ist also die Ordnung des Nullseins von $F(x)$.

Der vorstehende Satz zeigt schon, dafs wir erst durch Einführung der gemeinen complexen Zahlen die richtige Grundlage für die Analysis erlangt haben. Ohne dieselben würden sich ihre Sätze viel umständlicher gestalten. So könnten wir, wenn wir blofs die reellen Zahlen zulassen würden, nur sagen: Eine algebraische Gleichung von geradem Grade hat entweder keine oder zwei oder vier ..., eine von ungeradem Grade hat entweder eine oder drei oder fünf ... Wurzeln.

2) Die Formel (4) lehrt, dafs wenn sämmtliche reellen und complexen Zahlen als bekannt vorausgesetzt werden, jede ganze Function n^{ten} Grades von x in n lineare Factoren zerlegt werden kann.

Aus (4) ergeben sich ferner nach dem 2. Satze in Nr. 5 die folgenden Beziehungen zwischen den Coefficien-

en $a_0\ a_1 \ldots a_n$ der Gleichung (11) und ihren Wurzeln
$_1 c_2 \ldots c_n$:

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\Sigma\, c_p\, c_q = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\Sigma\, c_p\, c_q\, c_r = -\frac{a_3}{a_0}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$c_1\, c_2 \ldots c_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0},$$

orin die Summen sich erstrecken bez. auf alle Amben $p\ q$, if alle Ternen $p\ q\ r \ldots$ aus den Nummern $1, 2 \ldots n$.

Jede mehrfache Wurzel von (3) ist zufolge ihres Beriffes (Nr. 3) auch Wurzel der Gleichung $F'(x) = 0$, folgch auch Wurzel des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers (x) der Functionen $F(x)$, $F'(x)$. Umgekehrt ist jede Wurl von $T(x)$ eine mehrfache Wurzel von $F(x)$. Nunmehr nnen wir aber den folgenden Satz aussprechen:

3) „Es seien $c_1\ c_2 \ldots c_l$ ungleiche Zahlen und $l < n$. enn c_1 eine k_1-fache, c_2 eine k_2-fache $\ldots c_l$ eine k_l-fache urzel der Gleichung (3) ist und sie keine anderen Wurln hat, so dafs

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$$

$$F(x) = a_0(x - c_1)^{k_1}\,(x - c_2)^{k_2} \ldots (x - c_l)^{k_l} \qquad (5)$$

in mufs, so ist das Product

$$T(x) = (x - c_1)^{k_1 - 1}\,(x - c_2)^{k_2 - 1} \ldots (x - c_l)^{k_l - 1}$$

er gröfste gemeinschaftliche Theiler von $F(x)$ und $'(x)$, somit rational in den Coefficienten $a_0\ a_1 \ldots a_n$."

Die Formel (5) zeigt, dafs $F(x)$, die Formel (6) in r. 3, dafs $F''(x)$ durch $T(x)$ theilbar ist. Die ganzen unctionen

$$F(x) : T(x) = a_0(x - c_1)\,(x - c_2) \ldots (x - c_l)$$

nd $F'(x) : T(x)$ haben keine gemeinsame Wurzel mehr, enn eine solche könnte nur eine der Zahlen $c_1\ c_2 \ldots c_l$ sein, ür deren keine $F'(x) : T(x)$ den Werth Null annimmt. Also aben $F(x) : T(x)$ und $F'(x) : T(x)$ keinen Theiler mehr emein.

4) Einer Gleichung mit reellen Coefficienten genügt neben einer complexen Wurzel

$$x = \alpha + \beta i$$

auch die conjugirte Zahl

$$x = \alpha - \beta i$$

und zwar kommen beide Wurzeln gleich oft vor.

Soll $F(\alpha + \beta i) = 0$ sein, so muſs nach (1)

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0 \qquad \Psi(\alpha, \beta) = 0$$

sein. Im Falle daſs die Coefficienten $a_0\, a_1 \ldots a_n$ reell sind, hat man

$$F(\alpha - \beta i) = \Phi(\alpha, \beta) - i\Psi(\alpha, \beta),$$

also

$$F(\alpha - \beta i) = 0.$$

Da wir denselben Schluſs am Quotienten

$$\frac{F(x)}{(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i)} = \frac{F(x)}{(x - \alpha)^2 + \beta^2},$$

der eine ganze Function $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades von x mit reellen Coefficienten darstellt, wiederholen können u. s. f., so ergiebt sich, daſs die Wurzeln

$$x = \alpha + \beta i \quad \text{und} \quad x = \alpha - \beta i$$

der Gleichung (3) gleich vielfach sind.

Deckt man sich unter der Voraussetzung, daſs die $a_0\, a_1 \ldots a_n$ reell sind, in (4) die zu jedem Paare conjugirter Wurzeln gehörigen Wurzelfactoren mit einander multiplicirt, so erhält man den Satz von Gauſs[4]): Jede ganze Function von x mit reellen Coefficienten läſst sich in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegen."

5) In vielen Lehrbüchern wird ein besonderer, schon von Cotes gefundener Fall des folgenden Satzes[5]) angeführt. „Es seien $c_1\, c_2 \ldots c_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$G(x) = x^n + b_1\, x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n,$$

jede so oft angesetzt, als sie darin vorkommt, so daſs

$$G(x) = (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$$

ist. Construirt man in der Ebene XOY die Strecken

$$OM = x, \quad OC_1 = c_1 \quad OC_2 = c_2 \ldots OC_n = c_n,$$

so ist demnach

$$G(OM) = C_1M \cdot C_2M \ldots C_nM$$
$$|G(OM)| = |C_1M| \cdot |C_2M| \ldots |C_nM|.$$

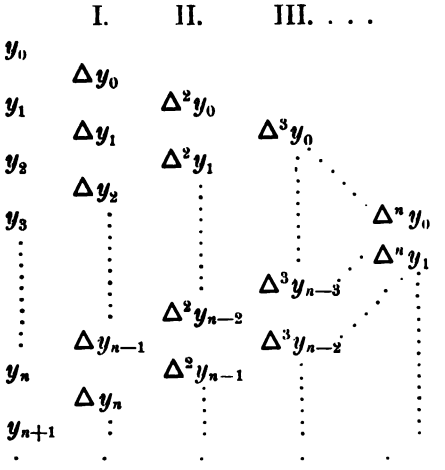
sonders einfach gestaltet sich diese Formel, wenn x und die Coefienten $b_1 \ldots b_n$ reell sind, wie in dem von Cotes betrachteten lle, wo

$$G(x) = x^n - b$$

setzen ist.

Anhang. Arithmetische Reihen und Interpolation.

10. Die Differenzenreihen.



Es sei eine Reihe von beliebigen Zahlen

$$y_0\, y_1 \ldots y_n, y_{n+1} \ldots$$

orgelegt. Man bildet zuerst die Differenzen der aufeinanderfolgenden Glieder, wofür gewöhnlich die Bezeichnung

$$\Delta y_r = y_{r+1} - y_r \quad (r = 0, 1, 2 \ldots)$$

ebraucht wird. Subtrahirt man je zwei aufeinander folende Glieder der ersten Differenzenreihe (I), so erhält man ie zweiten Differenzen (II) der gegebenen Zahlen

$$\Delta^2 y_r = \Delta y_{r+1} - \Delta y_r \quad (r = 0, 1, 2 \ldots)$$

s. f. Auf diese Weise gelangt man nach und nach zur $n-1)^{\text{ten}}$ Differenzenreihe mit den Gliedern

$$\Delta^{n-1}y_0, \quad \Delta^{n-1}y_1 \ldots$$

und endlich zur n^{ten} mit den Gliedern

$$\Delta^n y_r = \Delta^{n-1}y_{r+1} - \Delta^{n-1}y_r \quad (r = 0, 1, 2 \ldots), \qquad (2)$$

bei der wir stehen bleiben. Für die Differenzen

$$\Delta y_r \; \Delta^2 y_r \; \Delta^3 y_r \ldots \Delta^n y_r \quad (r = 0, 1, 2 \ldots)$$

ergeben sich die folgenden Ausdrücke durch die Zahlen der Reihe (1)

$$\begin{aligned}
\Delta\, y_r &= y_{r+1} - y_r \\
\Delta^2 y_r &= y_{r+2} - 2y_{r+1} + y_r \\
\Delta^3 y_r &= y_{r+3} - 3y_{r+2} + 3y_{r+1} - y_r \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta^n y_r &= \sum_0^n {}_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_{r+k}. \qquad (I)
\end{aligned}$$

Die letzte Formel wird durch den Schluſs von $n-1$ auf n begründet. Angenommen, es sei

$$\Delta^{n-1}y_r = \sum_0^{n-1} {}_k (-1)^{n-k-1} \binom{n-1}{k} y_{r+k}$$

$$\Delta^{n-1}y_{r+1} = \sum_0^{n-1} {}_k (-1)^{n-k-1} \binom{n-1}{k} y_{r+k+1},$$

so findet man mit Benutzung der in VIII. 3. d. I. T. erwähnten Gleichung

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

aus (2) sofort die Formel (I).

Die Formel (I) gilt auch bei negativen Werthen von r d. i. wenn man sich die Reihe (1) durch die Glieder y_{-1}, y_{-2} ... nach rückwärts verlängert denkt.

Aus (I) ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze der Differenzenrechnung: 1) Sind die Glieder der gegebenen Reihe (1) Summen mit gleichviel Gliedern, so ist jede n^{te} Differenz gleich der Summe der entsprechenden n^{ten} Differenzen für die aus den gleichstelligen Gliedern der Summen (1) gebildeten Reihen. 2) Ein gemeinsamer Factor c der Glieder (1) ist auch Factor jeder n^{ten} Differenz d. i.

$$\Delta^n(cy_r) = c\Delta^n y_r.$$

Aus diesen beiden Sätzen folgt: 3) „Die m^{te} Differenz einer ganzen Function m^{ten} Grades von x

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

ist constant, d. h. setzt man in (1)

$$y_r = F(x + rd) \quad (r = 0, 1, 2 \ldots),$$

so hat $\Delta^m F(x)$ den von x, also $\Delta^m y_r$ den von r unabhängigen Werth $m!\, d^m a_0$."

Beweis. Vermöge der Formel

$$(x+d)^k - x^k = d\,\{k x^{k-1} + k_2 x^{k-2} d + \cdots + d^{k-1}\}$$
$$(k = 1, 2 \ldots m)$$

findet man, dafs

$$\Delta F(x) = F(x+d) - F(x) = m d a_0 x^{m-1} + \cdots$$

eine ganze Function $(m-1)^{ten}$ Grades von x sein mufs, worin x^{m-1} den Coefficienten $m d a_0$ hat. Indem also $\Delta F(x)$ eine ganze Function $(m-1)^{ten}$ Grades von x ist, ergiebt sich durch denselben Schlufs, dafs

$$\Delta^2 F(x) = \Delta F(x+d) - \Delta F(x)$$
$$= m(m-1)\, d^2 a_0\, x^{m-2} + \cdots$$

eine ganze Function $(m-2)^{ten}$ Grades von x ist, worin x^{m-2} den Coefficienten $m(m-1) d^2 a_0$ hat, u. s. f. Schliefslich erhält man

$$\Delta^m F(x) = m!\, d^m a_0.$$

Setzt man hier statt x $x + rd$, so erhält man auch

$$\Delta^m F(x + rd) = m!\, d^m a_0.$$

II. Durch Auflösung der Gleichungen (I) gelangt man dazu, die Glieder $y_{r+1}\ y_{r+2} \ldots y_{r+n}$ der Reihe (1) durch

$$y_r,\ \Delta y_r,\ \Delta^2 y_r \ldots \Delta^n y_r \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

auszudrücken. Man findet nacheinander

$$y_{r+1} = y_r + \Delta y_r$$
$$y_{r+2} = y_r + 2\Delta y_r + \Delta^2 y_r$$
$$y_{r+3} = y_r + 3\Delta y_r + 3\Delta^2 y_r + \Delta^3 y_r$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(p \leq n) \quad y_{r+p} = \sum_0^p \binom{p}{k} \Delta^k y_r. \qquad \text{(II)}$$

Dabei ist $\Delta^0 y_r = y_r$ zu setzen. Auch diese Formel beweist man leicht durch den Schlufs von $p-1$ auf p.

Der Formel (II) steht eine zur Seite, welche die Glieder

$$y_{r-1} \quad y_{r-2} \cdots y_{r-n}$$

der (nach rückwärts verlängerten) Reihe (1) durch die nach rückwärts verlaufenden Differenzen

$$y_r \quad \Delta y_{r-1} \quad \Delta^2 y_{r-2} \ldots \Delta^n y_{r-n}$$

auszudrücken lehrt. Wir erhalten sie durch Auflösung der in (I) enthaltenen Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta y_{r-1} &= y_r - y_{r-1} \\ \Delta^2 y_{r-2} &= y_r - 2y_{r-1} + y_{r-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^n y_{r-n} &= y_r - n y_{r-1} + \cdots + y_{r-n} \end{aligned}$$

nach y_{r-1}, y_{r-2} u. s. f. — Daraus folgt

$$\begin{aligned} y_{r-1} &= y_r - \Delta y_{r-1} \\ y_{r-2} &= y_r - 2\Delta y_{r-1} + \Delta^2 y_{r-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$(p < n) \quad y_{r-p} = \sum_0^p (-1)^k \binom{p}{k} \Delta^k y_{r-k}. \tag{III}$$

12. Arithmetische Reihen m^{ter} Ordnung.

Wenn die Reihe

$$\cdots y_{-2} \quad y_{-1} \quad y_0 \quad y_1 \quad y_2 \cdots \tag{3}$$

so beschaffen ist, dafs die m^{te} Differenz constant ist, so heifst sie eine arithmetische Reihe m^{ter} Ordnung. Den Ausdruck des allgemeinen Gliedes derselben y_p liefert die Formel (II). Setzt man dort $r = 0$ und läfst $n \geq p$ und $p \geq m$ sein, so folgt wegen

$$\Delta^{m+1} y_0 = \Delta^{m+2} y_0 = \cdots = \Delta^n y_0 = 0$$

$$y_p = \sum_0^m \binom{p}{k} \Delta^k y_0. \tag{4}$$

Die Formel gilt auch, wenn $p < m$ und p negativ ist. Letzteres ergiebt sich auf folgende Art. Nach (4) ist y_p bei $p > 0$ eine ganze Function m^{ten} Grades von p. Da um-

gekehrt die Werthe einer ganzen Function m^{ten} Grades von x für

$$x = \cdots -2, -1, 0, +1, +2 \ldots$$

eine arithmetische Reihe m^{ter} Ordnung bilden und die Zahl y_p auch bei $p < 0$ aus den Werthen

$$y_0, \quad \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_0 \ldots \Delta^m y_0$$

vollständig bestimmt ist, so mufs sie auch bei $p < 0$ mit der rechten Seite von (4) übereinstimmen.

Auf ähnliche Art findet man aus (III) die Formel

$$y_p = \sum_0^m {}_k (-1)^k \binom{-p}{k} \Delta^k y_{-k}$$

$$= \sum_0^m {}_k \binom{p+k-1}{k} \Delta^k y_{-k}. \tag{5}$$

Die Summen

$$s_p = y_0 + y_1 + \cdots + y_p \quad (p > 0)$$

bilden eine arithmetische Reihe $(m+1)^{ter}$ Ordnung. Fügt man Null als erstes Glied hinzu, so hat man nur in (4)

$$y_0 = 0 \quad \Delta 0 = y_0 \quad \Delta^2 0 = \Delta y_0 \ldots \quad \Delta^{m+1} 0 = \Delta^m y_0$$

zu setzen, um die Summenformel

$$s_p = \sum_1^{m+1} {}_k \binom{p+1}{k} \Delta^{k-1} y_0 = \sum_0^m {}_k \binom{p+1}{k+1} \Delta^k y_0 \tag{6}$$

zu erhalten. — Die Summen

$$s_{-p} = y_{-p} + y_{-p+1} + \cdots y_{-1} + y_0 \quad (p > 0)$$

bilden nach steigendem Index geordnet, ebenfalls eine arithmetische Reihe $(m+1)^{ter}$ Ordnung, welche mit den Gliedern

$$0, \quad -s_1 + y_0, \quad -s_2 + y_0 \ldots$$

fortzusetzen ist. Demnach findet man nach (4)

$$s_{-p} = y_0 + \sum_1^{m+1} {}_k \binom{-p}{k} (-\Delta^{k-1} y_0)$$

$$= (p+1)\, y_0 - \sum_1^m {}_k \binom{-p}{k+1} \Delta^k y_0.$$

Beispiel. Die m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen

$$1^m \quad 2^m \ldots (n-1)^m \ldots$$

bilden nach Nr. 10 eine arithmetische Reihe m^{ter} Ordnung, welche au folgende Art summirt wird. Es sei

$$1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m = S_{n-1}^{(m)} \quad (n \geqq 2).$$

Nach (6) hat man für $y_0 = 0^m$

$$S_{n-1}^{(m)} = \sum_1^m \binom{n}{k+1} \Delta^k 0^m;$$

es läfst sich demnach $S_{n-1}^{(m)}$ als ganze Function $(m+1)^{ten}$ Grades vo n darstellen. Setzt man

$$S_{n-1}^{(m)} = c_0 n^{m+1} + c_1 n^m + \cdots + c_m n,$$

so kann man die Coefficienten c_r recurrirend bestimmen. Aus der hi sichtlich n identischen Gleichung

$$S_n^{(m)} - S_{n-1}^{(m)} = n^m = \sum_0^m c_r \left[(n+1)^{m+1-r} - n^{m+1-r}\right]$$

ergeben sich vermöge der Formel

$$(n+1)^{m+1-r} - n^{m+1-r} = \sum_1^{m+1-r} \binom{m+1-r}{k} n^{m+1-r-k}$$

durch Vergleichung der Coefficienten derselben Potenzen von n a beiden Seiten die Formeln:

$$1 = (m+1)\, c_0$$

$$0 = \binom{m+1}{2} c_0 + m c_1$$

$$0 = \sum_0^h \binom{m+1-r}{h+1-r} c_r \quad (h = 2, 3 \ldots m).$$

Daraus folgt

$$c_0 = \frac{1}{m+1} \qquad c_1 = -\tfrac{1}{2}.$$

Falls $r \geqq 2$ ist, setzen wir zunächst

$$c_r = \binom{m+1}{r} \frac{d_{r-1}}{m+1},$$

wodurch die vorstehenden Gleichungen übergehen in

$$1 = \frac{h+1}{2} - \sum_2^h \binom{h+1}{r} d_{r-1}. \qquad (7$$

Hieraus erkennt man, dafs d_r explicite nur von r, nicht vo m abhängt und findet

$$d_2 = d_4 = \cdots = 0.$$

r werden in VII. 9 f. sehen, daſs allgemein $d_{2s} = 0$ und

$$B^s = (-1)^{s-1} d_{2s-1} \quad (s = 1, 2 \ldots)$$

e positive Zahl ist. B_1, B_2 ... heifsen die Bernoulli'schen hlen. Man erhält aus den Gleichungen (7)

$$B_1 = \tfrac{1}{6} \quad B_2 = \tfrac{1}{30} \quad B_3 = \tfrac{1}{42} \quad B_4 = \tfrac{1}{30} \quad B_5 = \tfrac{5}{66}$$
$$B_6 = \tfrac{691}{2730} \quad B_7 = \tfrac{7}{6} \text{ u. s. w.}$$

Die ganzen Functionen

$$\varphi_1(x) = x \qquad \varphi_2(x) = x^2 - x$$

$$\varphi_m(x) = x^m - \frac{m}{2} x^{m-1} + \binom{m}{2} B_1 x^{m-2} - \binom{m}{4} B_2 x^{m-4} + \cdots,$$
$$(m \geq 3),$$

cher Ausdruck bei ungeradem m bis zum Gliede mit x, bei ge- :m m bis zu dem mit x^2 fortzusetzen ist, nennt man Bernoul- che Functionen[6]). Hiernach hat man

$$S_{n-1}^{(m)} = \frac{1}{m+1} \varphi_{m+1}(n).$$

besteht die Relation

$$\varphi_{m+1}(x+1) - \varphi_{m+1}(x) = (m+1)x^m, \quad (m \geq 0);$$

n sie gilt, wie die letzte Formel zeigt, für jedes ganzzahlige ≥ 2. —

Setzt man in (7) $h = m$, so folgt noch

$$\varphi_{m+1}(1) = 0 \quad (m \geq 1).$$

Die Lagrange'sche und die Newton'sche Interpolationsformel.

Es giebt eine und nach dem 2. Satze in Nr. 3 nur eine nze Function n^{ten} Grades von x, welche für $x = x_0$ den gebenen Werth y_0 annimmt und für die von x_0 und unter :h verschiedenen Werthe

$$x = x_1, \quad x_2 \ldots x_n$$

ull ist. Nach dem Hilfssatze in Nr. 5 muſs eine solche nction durch

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

eilbar, folglich von der Form

$$y = c(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

in. Bestimmt man die noch willkürliche Constante c so, ıfs für $x = x_0$ $y = y_0$ ist, so findet man

$$y = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} = \frac{y_0}{P'(x_0)} \cdot \frac{P(x)}{x-x_0}, \quad (8)$$

wobei

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) = P(x)$$

gesetzt ist und $P'(x)$ die Ableitung von $P(x)$ nach x bezeichnet.

Defsgleichen giebt es eine und nach dem 2. Satze in Nr. 5 nur eine ganze Function n^{ten} Grades von x: $F(x)$, welche für die ungleichen Werthe $x = x_0, x_1 \ldots x_n$ bez. die gegebenen Werthe $y = y_0, y_1 \ldots y_n$ annimmt. Und zwar erhält man dafür nach der Formel (8) den Ausdruck

$$F(x) = \sum_0^n \frac{y_r}{P'(x_r)} \cdot \frac{P(x)}{x-x_r}. \quad (IV)$$

Denn setzt man rechts $x = x_r$, so sind alle Glieder Null mit Ausnahme des hier angeschriebenen, das den Werth $y = y_r$ annimmt. Die Formel (IV),[7]) welche die Lagrange'sche Interpolationsformel heifst, erscheint als besonderer Fall einer in V. 12 angeführten.

Nimmt man in (IV) die Werthe $x_0, x_1 \ldots x_n$ äquidistant an und setzt

$$x_0 = a, \quad x_r = a + rd \quad (r = 1, 2 \ldots n) \quad x = a + vd,$$

wo $a\,d\,v$ zunächst beliebige Zahlen bedeuten, so erhält man

$$F(a+vd) = \sum_0^n \binom{v}{r}\binom{n-v}{n-r} y_r. \quad (9)$$

Da die Werthe

$$y_r = F(a+rd)$$
$$(r = \cdots -2, -1, 0, +1, +2 \ldots)$$

eine arithmetische Reihe n^{ter} Ordnung bilden, so findet man nach (4) für jeden ganzzahligen Werth von v

$$F(a+vd) = \sum_0^n \binom{v}{k} \Delta^k y_0. \quad (V)$$

Indem auf beiden Seiten der Gleichung ganze Functionen n^{ten} Grades von v stehen, so darf man nach dem 2. Satze in Nr. 5 schliefsen, dafs sie für beliebige Werthe von v gilt. Die Formel (V) heifst Newton'sche Interpolations-

formel. Auf ähnliche Art gelangt man, von (5) ausgehend, zur Formel

$$F(a + vd) = \sum_0^n \binom{-r}{k} (-1)^k \Delta^k y_{-k}, \qquad \text{(VI)}$$

welche bei der Interpolation von rückwärts benutzt wird. — Uebrigens läfst sich $F(a + vd)$ auch direct mit Hilfe der Relationen (II), (III) in die rechte Seite der Formeln (V), (VI) überführen.[8])

14. Interpolirte Functionswerthe.

Es sei $f(x)$ eine eindeutige Function von x, von der zunächst die zu den ungleichen Werthen von $x = x_0, x_1 \ldots x_n$ gehörigen Werthe

$$f(x_0) = y_0 \quad f(x_1) = y_1 \ldots f(x_n) = y_n$$

bekannt sind. Weifs man noch weiter, dafs $f(x)$ für alle Werthe eines die Punkte $x_0\, x_1 \ldots x_n$ enthaltenden Bereiches eine ganze Function von höchstens n^{tem} Grade von x sei, so ist sie vollständig durch die Formel (IV) bestimmt.

So wird die Aufgabe, zwischen je zwei Glieder einer arithmetischen Reihe m^{ter} Ordnung mit dem allgemeinen Gliede (4) q Glieder so einzuschalten, dafs die Gesammtheit aller Glieder z_n neuerdings eine arithmetische Reihe m^{ter} Ordnung bildet, nach der Formel (V) gelöst. z_n mufs nämlich eine ganze Function m^{ten} Grades von n sein und für $n = qp$ mit y_p übereinstimmen. Man hat demnach

$$z_n = \sum_0^n \binom{\frac{n}{q}}{k} \Delta^k y_0 .$$

Wenn jedoch aufserdem nur bekannt ist, dafs eine solche ganze Function n^{ten} Grades von x: $F(x)$ existirt, dafs ihr Unterschied von $f(x)$ für alle Werthe von x im genannten Bereiche dem absoluten Betrage nach unter einer bestimmten positiven Zahl ε liegt, so stellt die Formel (IV) $f(x)$ bis auf einen Fehler vom absoluten Betrage ε dar. Im Falle dafs die Werthe $x_0\, x_1 \ldots x_n$ äquidistant sind, ersetzt man (IV) durch die Formeln (V) und (VI), von denen mithin ebenfalls das Gesagte gilt. Wenn x eine reelle Veränderliche und $f(x)$ eine reelle Function derselben ist, so

dafs v auf das Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ beschränkt werden kann, so gebraucht man die erstere, falls v zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, die letztere, falls v zwischen $-\frac{1}{2}$ und 0 liegt.

Bei numerischer Berechnung der rechten Seiten der Formeln (V) und (VI) zeigen sich noch zwei Fehlerquellen, so dafs der Unterschied zwischen $f(a + v\,d)$ und dem Resultate dieser Rechnung ε übersteigen kann. Erstens müssen anstatt der wahren Functionswerthe

$$y_r = f(a + r\,d)$$

gewöhnlich unvollständige Decimalzahlen η_r gebraucht werden, deren jede mit Einheiten von der Ordnung 10^p schliefst und mit einem Fehler δ_r, welcher absolut genommen unter einer positiven Zahl δ liegt, behaftet ist. Zweitens werden die Producte

$$\binom{v}{k} \Delta^k \eta_0 \quad (k = 1, 2 \ldots n)$$

nicht vollständig, sondern abgekürzt entwickelt, wodurch neuerdings Fehler begangen werden. Zu ihnen gesellt sich noch ein Fehler ϱ, dem absoluten Betrage nach auch unter δ gelegen, der von der Verkürzung der aus den genannten n Producten gebildeten Summe auf Einheiten von der Ordnung 10^p herrührt. — Der aus der ersten Quelle stammende Fehler läfst sich so abschätzen. Setzt man

$$y_r = \eta_r + \delta_r \qquad |\,\delta_r\,| < \delta\,,$$

so hat man nach (9)

$$F(a + v\,d) = \sum_0^n \binom{v}{r}\binom{n-v}{n-r}\eta_r + \sum_0^n \binom{v}{r}\binom{n-v}{n-r}\delta_r\,.$$

Der erste Theil rechts stimmt überein mit

$$\sum_0^n \binom{v}{k} \Delta^k \eta_0\,,$$

der zweite wird also vernachlässigt.

Ist $0 < v \leqq \frac{1}{2}$ und $r \geqq 1$, so hat $\binom{v}{r}$ das Zeichen von $(-1)^{r-1}$ und der Binomialcoefficient $\binom{n-v}{n-r}$ ist positiv. Demnach bleibt der absolute Betrag des zweiten Theiles unter

$$\left\{\binom{n-v}{n} + \sum_1^n (-1)^{r-1}\binom{v}{r}\binom{n-v}{n-r}\right\}\delta\,. \tag{10}$$

Ist $0 > v \geqq -\frac{1}{2}$, so hat $\binom{v}{r}$ das Zeichen von $(-1)^r$ und $\binom{e-r}{n-r}$ ist positiv. Dabei sind diese Binomialcoefficienten, absolut genom-

an, von $r = 2$ an gröfser als die entsprechenden oben. Benutzt man gegen jetzt die Formel (VI), so kommt man wieder auf die absolute Fehlergrenze (10), indem aus (IV) für

$$x = a + \nu\delta, \quad x_r = a - r\delta$$

$$F(a + \nu d) = \sum_0^n \binom{-\nu}{r} \binom{n+\nu}{n-r} y_{-r}$$

lgt. Somit ist in dem in Rede stehenden Falle die Formel (VI) vorziehen. — Im Falle $n = 1$ liefert (10)

$$(1 - \nu + \nu)\,\delta$$

i. δ. Rechnet man hierzu wenigstens noch den Fehler von $F(a + \nu d)$ d den zuletzt genannten ϱ, so erhält man für den absoluten Betrag s Fehlers des interpolirten Functionswerthes die Grenze $\varepsilon + 2\delta$.

Interpolation der gemeinen Logarithmen. Bei positivem hat man

$$0 < x - l(1 + x) < \tfrac{1}{2} x^2,$$

i negativem $x > -1$

$$0 < x - l(1 + x) < \frac{x^2}{2(1 + x)} \cdot {}^{9})$$

tzt man hier

$$x = \nu : a$$

d multiplicirt mit dem Modulus M der gemeinen Logarithmen, so gt aus der ersten Formel

$$0 < \left(\frac{M\nu}{a} + \log a\right) - \log(a + \nu) < \frac{M}{2} \cdot \frac{\nu^2}{a^2}.$$

bt die Tafel die Logarithmen der Zahlen von 10^p bis 10^{p+1}, so ist $\geqq 10^p$, folglich wenn ν positiv und $\leqq \frac{1}{2}$ ist,

$$\frac{M}{2} \cdot \frac{\nu^2}{a^2} \leqq \frac{M}{8} \cdot \frac{1}{10^{2p}}.$$

Berücksichtigt man beim Vorwärtsinterpoliren nur die erDifferenzen d. i. beschränkt man sich auf die beiden ersten Glieder Reihe für

$$\log(a + \nu),$$

hat man die Fehlergrenze

$$\varepsilon = \frac{M}{8} \cdot \frac{1}{10^{2p}} = \frac{0{,}05428..}{10^{2p}}$$

setzen. Beim Rückwärtsinterpoliren

$$(0 > \nu > -\tfrac{1}{2})$$

t zufolge der zweiten Formel ε etwas gröfser anzusetzen, nämlich

$$\varepsilon = \frac{M}{8 \,.\, 10^{2p}} : \left(1 - \frac{1}{2 \,.\, 10^p}\right).$$

Sind die Logarithmen der natürlichen Zahlen in der Tafel auf l Stellen genau, so dafs

$$\delta = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^l}$$

ist, so nimmt man $2p \geqq l$ an, also bei einer vierstelligen Tafel $p = 2$, bei einer fünfstelligen $p = 3$, bei einer sechs- und siebenstelligen $p = 4$. Die absolute Fehlergrenze für die vorwärts interpolirten Logarithmen liegt dann nicht unter

$$\varepsilon + 2\delta = \frac{M}{8} \cdot \frac{1}{10^{2p}} + \frac{1}{10^l},$$

z. B. bei siebenstelligen Tafeln nicht unter $1{,}005428\ldots : 10^7$.

V. Abschnitt.

Unendliche Reihen mit complexen Gliedern.

1. Convergente und divergente Reihen.

Es sei eine endlose Folge von beliebigen Zahlen

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \ldots a_n \ldots$$

gegeben. Wenn wir die Partialsummen

$$s_0 = a_0 \quad s_1 = a_0 + a_1 \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \ldots$$

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_0^n{}_\nu a_\nu$$

bilden, so kann s_n beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$, wobei n alle ganzen Zahlen von Null an zu durchlaufen hat, einen endlichen Grenzwerth a haben oder nicht. Im ersten Falle heifst die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{1}$$

convergent, im zweiten divergent.

Wir sagen demnach, dafs die unendliche Reihe (1) convergirt und a ihr Grenzwerth ist, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl μ so gehört, dafs für alle Werthe von n gröfser als μ

$$|s_n - a| < \varepsilon \tag{2}$$

ist. Daraus folgt, dafs wenn jedes Glied von (1) in seinen reellen und imaginären Theil zerlegt wird:

$$a_n = \alpha_n + \beta_n i,$$

auch die ersteren, sowie die letzteren eine convergente Reihe bilden müssen. Denn ist

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \sigma_n \qquad \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n = \tau_n$$
$$s_n = \sigma_n + \tau_n i \qquad a = \alpha + \beta i,$$

so hat man für $n > \mu$ auch

$$|\sigma_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |\tau_n - \beta| < \varepsilon. \tag{3}$$

Demnach ist

$$\lim_{n=+\infty} \sigma_n = \alpha \qquad \lim_{n=+\infty} \tau_n = \beta.$$

Sind umgekehrt die Reihen

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots \quad \text{und} \quad \beta_0 + \beta_1 + \cdots$$

convergent, so auch die Reihe (1). In der That folgt aus (3) für $n > \mu$

$$|s_n - \alpha - \beta i| < 2\varepsilon.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dafs die Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ convergirt, besteht darin, dafs jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl μ sich so zuordnen läfst, dafs wenn $n > \mu$ ist,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+r}| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2 \ldots) \tag{4}$$

ist, was für eine natürliche Zahl r auch sein mag [1]). — Zufolge (2) ist bei Convergenz der Reihe (1) nothwendig, dafs wenn $n > \mu$ ist,

$$|s_{n+r} - a| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad |s_{n+r} - s_n| < 2\varepsilon$$

ist. Wenn aber (4) erfüllt ist, so ergiebt sich, dafs bei $n > \mu$

$$|\alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+r}| < \varepsilon$$
$$|\beta_{n+1} + \cdots + \beta_{n+r}| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2 \ldots)$$

ist. Somit convergiren die Reihen

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots \quad \text{und} \quad \beta_0 + \beta_1 + \cdots$$

und daher auch die Reihe (1). — Zur Convergenz der Reihe (1) ist zwar nach (4) nothwendig, jedoch nicht hinreichend, dafs a_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth Null hat.

Der vorstehende Satz, welcher als ein besonderer Fall eines Satzes in III. 7 zu betrachten ist, hat denselben Wortlaut, wie der ihm entsprechende in X. 1 d. I. T. Das wird Dank der zweckmäfsigen Ausdehnung des Begriffes „absoluter Betrag“ bei vielen Sätzen dieses Abschnittes der Fall

sein; selbst die in der reellen Reihentheorie gegebenen Beweise lassen sich oft in dem jetzt betrachteten allgemeinen Falle gebrauchen. So können wir genau so wie a. a. O. beweisen:

1) Die unendliche geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

convergirt dann und nur dann, wenn x dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist und zwar ist ihr Grenzwerth $1 : (1 - x)$.

Aus diesem Satze folgt, dafs wenn $|x| < |a|$ ist,

$$\frac{a}{a-x} = \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \cdots$$

Denkt man sich a in trigonometrischer Form:

$$a = A\{\cos\alpha + i\sin\alpha\}$$

und x als reelle Zahl ξ, so dafs

$$\frac{a}{a-\xi} = \frac{A(A - \xi\cos\alpha) - iA\xi\sin\alpha}{A^2 - 2A\xi\cos\alpha + \xi^2}$$

ist, so erhält man die für alle reellen ξ, deren absoluter Betrag kleiner als A ist, giltigen Entwickelungen

$$\frac{(A - \xi\cos\alpha)A}{A^2 - 2A\xi\cos\alpha + \xi^2} = 1 + \frac{\xi}{A}\cos\alpha + \cdots + \left(\frac{\xi}{A}\right)^n \cos n\alpha + \cdots$$

$$\frac{A^2\sin\alpha}{A^2 - 2A\xi\cos\alpha + \xi^2} = \sin\alpha + \frac{\xi}{A}\sin 2\alpha + \cdots + \left(\frac{\xi}{A}\right)^{n-1}\sin n\alpha + \cdots.$$

e Coefficienten dieser recurrenten Reihen lassen sich auch mittelst r Recursionsgleichungen erhalten. Dafs ihr Convergenzintervall ge- n $(-A, A)$ ist, erkennt man auch nach IX. 22 d. I. T. sofort, in- m die Coefficienten von

$$(\xi : A)^n \quad (n \geq 0)$$

wischen den Grenzen -1 und $+1$ liegen. — Schreibt man in der letzten Formel statt $A\cos\alpha$ $A\sin\alpha$ bez. a b, also statt A $\sqrt{a^2+b^2}$, so erhält man die auf p. 287 u. 291 d. I. T. angekündigte Potenzreihe für die Function

$$b\sqrt{a^2+b^2} : \{(a-\xi)^2 + b^2\}$$

mit dem Convergenzintervall

$$(-\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{a^2+b^2}).$$

2) Die unendliche Reihe

$$(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + \cdots$$

convergirt dann und nur dann, wenn b_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth b hat. Der Grenzwerth derselben ist $b_0 - b$. Ein Beispiel s. Nr. 17, 2.

Im Falle dafs die Reihe (1) divergirt, kann $|s_n|$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen oder unendlichen Grenzwerth oder von einander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen haben. Ist

$$\lim |s_n| = +\infty,$$

so sagt man, dafs die Reihe (1) den Grenzwerth ∞ hat.

2. Allgemeine Sätze über die unendlichen Reihen.

Es bestehen auch für Reihen mit complexen Gliedern die Sätze 1)—6) in X. 3 d. I. T. und zwar gelten dafür, den zweiten Satz ausgenommen, die nämlichen Beweise. — Im zweiten Satze ist „gröfser" in dem Sinne von I. 1 zu verstehen. Der Beweis desselben ergiebt sich sofort, wenn man die Grenzwerthe der beiden darin vorkommenden convergenten Reihen in ihre reellen und imaginären Theile zerlegt.

3. Unbedingte und bedingte Convergenz.

Satz.[2]) Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dafs die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots,$$

worin

$$a_n = \alpha_n + \beta_n i \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

ist, bei jeder Anordnung ihrer Glieder convergirt und stets den nämlichen Grenzwerth darbietet, besteht in der absoluten Convergenz derselben, d. h. die Reihe der absoluten Beträge ihrer Glieder

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (5)$$

mufs convergiren.

Der Satz erscheint als eine unmittelbare Folge des entsprechenden über reelle Reihen in X. 9 d. I. T., wenn man bedenkt, dafs nach Nr. 1

$$\lim_{n=+\infty} s_n = \sum_0^\infty \alpha_n + i \sum_0^\infty \beta_n$$

st. Soll dieser Grenzwerth von der Aufeinanderfolge der lieder nicht abhängen, so mufs demnach sowohl die Reihe hrer reellen Theile

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots,$$

ls auch die ihrer imaginären Theile d. i.

$$\beta_0 + \beta_1 + \cdots$$

nbedingt, also absolut convergiren. Das ist auch hinreichend. Wenn aber die Reihen

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots, \qquad |\beta_0| + |\beta_1| + \cdots \tag{6}$$

onvergiren, so ist die Reihe

$$(|\alpha_0| + |\beta_0|) + (|\alpha_1| + |\beta_1|) + \cdots$$

onvergent, somit wegen der Relationen

$$|\alpha_n| + |\beta_n| \geq \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = |a_n| \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

uch die Reihe (5). Convergirt umgekehrt die Reihe (5), so onvergirt wegen der Relationen

$$|a_n| \geq |\alpha_n| \text{ bezw. } |\beta_n| \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

de der Reihen (6).

Die Grenzwerthe der absolut convergenten Reihen und ar sie dürfen, wie aus den folgenden Sätzen hervorgeht, als ummen ihrer in unbegrenzter Anzahl vorhandenen Glieder ngesehen werden. Im Falle dafs die absoluten Beträge der eihenglieder $a_0, a_1 \ldots$ eine divergente Reihe bilden, verteht man unter der Aussage: „die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

onvergirt (divergirt)", dafs ihre Glieder in der angegebenen, dem Wachsen des Index n entsprechenden Anrdnung eine convergente (divergente) Reihe bilden.

1) „Wenn die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots \tag{7}$$

bsolut convergirt und die Glieder derselben nicht sämmtch dieselbe Neigung haben, so hat man

$$\left| \sum_0^\infty{}_n a_n \right| < \sum_0^\infty{}_n |a_n|.“$$

Beweis. Zufolge der Voraussetzung mufs von einem bestimmten Werthe von n: $n = m$ an

$$|s_n| < |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = \Sigma_n$$

sein. Daraus folgt bei $\lim n = +\infty$ aber nur, dafs

$$\left| \sum_0^\infty{}_n a_n \right| \leqq \sum_0^\infty{}_n |a_n|$$

ist. Setzt man jedoch

$$a_{m+r} + \cdots + a_{m+p} = r_{m,p}$$
$$|a_{m+1}| + \cdots + |a_{m+p}| = \mathsf{P}_{m,p}$$

so dafs

$$s_{m+p} = s_m + r_{m,p} \qquad \Sigma_{m+p} = \Sigma_m + \mathsf{P}_{m,p}$$
$$|s_{m+p}| \leqq |s_m| + |r_{m,p}| \qquad |r_{m,p}| \leqq \mathsf{P}_{m,p}$$

ist, so findet man

$$\Sigma_{m+p} - |s_{m+p}| \geqq \Sigma_m - |s_m| + \mathsf{P}_{m,p} - |r_{m,p}|$$
$$\geqq \Sigma_m - |s_m|,$$

somit

$$\lim_{p=+\infty} \Sigma_{m+p} - \left| \lim_{p=+\infty} s_{m+p} \right| > 0.$$

w. z. b. w.

2) „Convergirt neben (7) die Reihe

$$b_0 + b_1 + \cdots$$

absolut, so convergiren auch die Reihen

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \cdots$$

absolut.“

3) „Convergirt die Reihe (7) absolut und bedeuten c_0 $c_1 \ldots c_n \ldots$ Zahlen, die dem absoluten Betrage nach unter einer positiven Zahl C liegen, so convergirt auch die Reihe

$$a_0 c_0 + a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n + \cdots$$

absolut.“

4) „Hebt man aus einer absolut convergenten Reihe irgend eine endlose Folge von Gliedern hervor, so bilden auch sie eine absolut convergente Reihe.“

5) „Vertheilt man die Glieder einer absolut convergenten Reihe in eine endliche Anzahl von Reihen, so con-

giren die unendlichen unter ihnen absolut und es ist die mme aus ihren Grenzwerthen und den Summen der etwa handenen endlichen Reihen gleich dem Grenzwerthe der ihe."

Die Sätze 2)—5) werden genau so wie die entsprechen- in X. 10 d. I. T. bewiesen.

6) „Vertheilt man die Glieder der absolut conver- nten Reihe (7), deren Grenzwerth $a = \alpha + \beta i$ sei, in begrenzt viele Reihen

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_n^{(0)} + \cdots \\ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \cdots + a_n^{(1)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \cdots + a_n^{(m)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{8}$$

convergirt jede unendliche Reihe unter ihnen absolut. e aus den Summen der endlichen und den Grenzwerthen unendlichen Reihen in (8)

$$a^{(0)} \quad a^{(1)} \ \ldots \ a^{(m)} \ldots$$

ildete unendliche Reihe convergirt absolut und zwar ist Grenzwerth a."

7) „Convergiren die unendlichen Reihen

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 + \cdots + a_m + \cdots \\ b_0 + b_1 + \cdots + b_n + \cdots \end{array} \tag{9}$$

solut und sind ihre Grenzwerthe bezw. a b, so conver- t jede aus den Gliedern $a_m b_n$ gebildete einfach-unendliche ihe, wie

$$\begin{array}{l} a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + \cdots \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_r b_{n-r} + \cdots + a_n b_0 + \cdots, \end{array} \tag{10}$$

solut und es ist ihr Grenzwerth $a \,.\, b$."

Die Sätze 6) und 7) können auf die entsprechenden tze für reelle Reihen zurückgeführt werden, indem die ieder der Reihen (7)—(10) in ihre reellen und imaginären standtheile zerlegt werden. Z. B. setzt man in (8)

$$a_n^{(m)} = \alpha_n^{(m)} + i\beta_n^{(m)}$$

d bezeichnet den Grenzwerth der Reihe der reellen Theile

der Glieder in der $(m+1)^{\text{ten}}$ Zeile von (8) mit $\alpha^{(m)}$, den der Reihe der Coefficienten von i mit $\beta^{(m)}$, so hat man nach dem Satze 6) in X. 10 d. I. T.

$$\Sigma\alpha^{(m)} = \alpha \qquad \Sigma\beta^{(m)} = \beta,$$

mithin, da

$$a^{(m)} = \alpha^{(m)} + i\beta^{(m)}$$

ist,

$$\Sigma a^{(m)} = \Sigma\alpha^{(m)} + i\Sigma\beta^{(m)} = \alpha + \beta i = a.$$

Die beiden letzten Sätze lassen sich auch vermittelst des Hilfssatzes in X. 11 d. I. T. ableiten, welcher auch bei complexen Werthen der $a_n^{(m)}$ gilt. Der a. a. O. gegebene Beweis desselben ist ebenfalls noch zu brauchen. — Demnach besteht auch der Cauchy'sche Satz 3) a. a. O. für complexe Werthe der $a_n^{(m)}$.[3])

Die in der Anmerkung zu X. 11 d. I. T. angeführten Sätze von Abel und Mertens über die Multiplication von bedingt convergenten Reihen gelten auch dann noch, wenn ihre Glieder complexe Zahlen sind.

4. Über die Convergenz und Divergenz der Reihe $\Sigma\beta_n a_n$.[4])

1) Satz. „Wenn die Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots \tag{11}$$

convergirt und die reellen Zahlen $\beta_0\ \beta_1 \ldots \beta_n \ldots$ bei unbegrenzt wachsendem n dem endlichen Grenzwerthe β in einem Sinne sich nähern, so convergirt auch die unendliche Reihe

$$\beta_0 a_0 + \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n + \cdots\text{“} \tag{12}$$

Der Satz folgt aus der Identität

$$\sum_0^n \beta_r a_r = \sum_0^{n-1} (\beta_r - \beta_{r+1}) s_r + \beta_n s_n, \tag{13}$$

worin

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

ist, bei $\lim n = +\infty$. Denn zufolge des 3. Satzes in Nr. 3 convergirt die unendliche Reihe

$$\sum_0^\infty (\beta_r - \beta_{r+1}) s_r,$$

bsolut, da die $\beta_r - \beta_{r+1}$ gleichbezeichnet und die s_r dem bsoluten Betrage nach unter einer positiven Zahl liegen.

Der Satz gilt offenbar auch, wenn an Stelle der β_n com-plexe Zahlen b_n treten, deren beide Coordinaten sich ihnlich wie die β_n verhalten.

Aus dem ersten Satze folgt durch einen indirecten Beweis:

2) Satz. „Wenn die Reihe (11) divergirt und die reellen Zahlen $\beta_0\ \beta_1 \ldots \beta_n \ldots$ bei unbegrenzt wachsendem n einem von Null verschiedenen Grenzwerthe in einem Sinne sich nähern, so divergirt auch die Reihe (12)."

3) Satz. „Die Reihe (12) convergirt ebenfalls, wenn die Partialsummen von (11)

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (n = 0, 1, \ldots) \qquad (14)$$

dem absoluten Betrage nach unter einer positiven Zahl C liegen und die reellen Zahlen $\beta_0\ \beta_1 \ldots \beta_n \ldots$ bei unbegrenzt wachsendem n dem Grenzwerthe Null in einem Sinne sich nähern."

Der Satz folgt gleichfalls aus (13) bei

$$\lim n = +\infty.$$

Aus ihm ergiebt sich der Satz: „Wenn die positiven Zahlen $\beta_1 \ldots \beta_n \ldots$ mit wachsendem n beständig abnehmen und bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth Null haben, so convergirt die Potenzreihe

$$\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n + \cdots$$

cher für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag 1 nicht berschreitet, ausgenommen $x = 1$." — Denn ist $|x| \leq 1$, doch x nicht 1, so hat man wegen

$$s_n = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$|s_n| \leq 2 : |1 - x|.$$

4) Satz. „Liegen die Partialsummen s_n in (14) dem absoluten Betrage nach unter einer positiven Zahl C und nähern sich die reellen Zahlen $\beta_0\ \beta_1 \ldots \beta_n \ldots$ bei unbegrenzt wachsenden n in einem Sinne einem endlichen Grenzwerthe β, so liegen auch die Summen

$$w_n = \beta_0 a_0 + \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n \quad (n = 0, 1 \ldots)$$

dem absoluten Betrage nach unter einer positiven Zahl."

Aus (13) folgt unmittelbar, dafs

$$|w_n| < C\left|\sum_{0}^{n-1}(\beta_r - \beta_{r+1})\right| + C|\beta_n| = C\{|\beta_0 - \beta_n| + |\beta_n|\}$$

$$|w_n| < C\{|\beta_0| + 2|\beta_n|\}$$

ist. Es liegen aber die Zahlen $|\beta_n|$ $(n = 0, 1 \ldots)$ unter einer positiven Zahl, und zwar entweder unter $|\beta_0|$ oder unter $|\beta|$, wodurch der Satz erwiesen ist. — Aus ihm ergiebt sich durch einen indirecten Beweis der

5) Satz. „Liegen die $|s_n|$ nicht unter einer positiven Zahl und die reellen Zahlen $\beta_0\ \beta_1 \ldots \beta_n \ldots$ nähern sich bei unbegrenzt wachsendem n in einem Sinne einem von Null verschiedenen Grenzwerthe, so liegen auch die Zahlen $|w_n|$ nicht unter einer positiven Zahl."

In den Sätzen 1) und 3) kann man die reellen Zahlen β_0 $\beta_1 \ldots \beta_n \ldots$ durch solche complexe Zahlen $b_0\ b_1 \ldots b_n \ldots$ ersetzen, dafs die Reihe

$$|b_0 - b_1| + |b_1 - b_2| + \cdots + |b_n - b_{n+1}| + \cdots$$

convergirt und b_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth, bezw. den Grenzwerth Null hat.

5. Criterien der Convergenz und Divergenz von Reihen mit complexen Gliedern.

Gelingt es mit Hilfe der im I. T. gegebenen Sätze zu zeigen, entweder dafs die absoluten Beträge der Glieder der Reihe Σa_n eine convergente Reihe bilden oder dafs $|a_n|$ bei $\lim n = +\infty$ einen positiven Grenzwerth hat, so ist im ersten Falle die Convergenz, im zweiten die Divergenz von Σa_n erwiesen. So erkennt man z. B., dafs die Reihe Σa_n convergirt oder divergirt, je nachdem

$$\lim_{n=+\infty} |a_{n+k+1} : a_{n+k}|,$$

wo k wie im I. T. eine feste ganze Zahl bedeutet, kleiner oder gröfser als 1 ist. Wenn aber bei

$$\lim n = +\infty \qquad \lim a_n = 0$$

ist und dabei $\Sigma|a_n|$ divergirt, so läfst sich über das Verhalten der Reihe Σa_n erst durch eine weitere Untersuchung entscheiden. Den folgenden Fall kann man nach Weierstrafs[5]) vollständig erledigen. — Der Kürze halber bezeichne $\lim f(n)$ den Grenzwerth von $f(n)$ bei $\lim n = +\infty$, wobei n alle ganzen Zahlen von einer bestimmten an durchläuft.

Satz. „Es sei gegeben eine endlose Folge von Zahlen $a_0\ a_1 \ldots a_n \ldots$ und es sei $a_n = A_n$. Angenommen der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ lasse sich von einem bestimmten Werthe von n an in eine endliche oder unendliche Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $1 : n$ verwandeln:

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots \quad (n > m), \tag{15}$$

wo

$$c_r = \mu_r + \nu_r i \qquad (r = 1, 2 \ldots) \tag{16}$$

sein soll, so kann man Folgendes schliefsen:

I) Ist $\mu_1 > 0$, so ist

$$\lim A_n = +\infty$$

und zwar wächst A_n von einem bestimmten Werthe von n an mit n beständig. Die Reihe Σa_n divergirt, ihre Partialsummen

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (n = 0, 1 \ldots) \tag{17}$$

liegen ihrem absoluten Betrage nach nicht unter einer positiven Zahl.

II) Ist $\mu_1 = 0$, so nähert sich A_n bei

$$\lim n = +\infty$$

einem positiven endlichen Grenzwerthe und zwar von einem bestimmten Werthe von n an in einem Sinne.

1) Ist $\nu_1 \gtrless 0$, so hat a_n selbst bei $\lim n = +\infty$ keinen Grenzwerth.

2) Ist $\nu_1 = 0$, so hat a_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerth.

Die Reihe Σa_n divergirt auch in diesen Fällen und zwar liegen die absoluten Beträge der Summen (17) nicht unter einer positiven Zahl.

III) Ist $\mu_1 < 0$, so ist $\lim A_n = 0$ und zwar nimmt A_n von einem bestimmten Werthe von n an mit wachsendem n beständig ab.

1) Falls $0 > \mu_1 > -1$ ist, so divergirt die Reihe Σa_n. Die absoluten Beträge der Summen (17) liegen unter einer positiven Zahl dann und nur dann, wenn $\mu_1 = -1$ und $\nu_1 \gtrless 0$ ist.

2) Falls $\mu_1 < -1$, so convergirt die Reihe Σc absolut."

Beweis. Zunächst hat man nach (16)

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = \left(1 + \sum_1^\infty{}_r \frac{\mu_r}{n^r}\right) + i \sum_1^\infty{}_r \frac{\nu_r}{n^r}. \qquad (1$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{A_{n+k+1}}{A_{n+k}}\right)^2 = \left(1 + \sum_1^\infty{}_r \frac{\mu_r}{n^r}\right)^2 + \left(\sum_1^\infty{}_r \frac{\nu_r}{n^r}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{2\mu_1}{n} + \frac{\mu_1{}^2 + \nu_1{}^2 + 2\mu_2}{n^2} + \cdots,$$

somit nach X. 25 und XI. 2 d. I. T. bei hinlänglich grofs Werthen von n

$$\frac{A_{n+k+1}}{A_{n+k}} = 1 + \frac{\mu_1}{n} + \frac{\nu_1{}^2 + 2\mu_2}{2n^2} + \cdots \qquad (1$$

Mittelst des Satzes in X. 19 d. I. T. über die reell Zahlen A_n, deren Quotient $A_{n+k+1} : A_{n+k}$ in eine Reihe na fallenden ganzen Potenzen von n entwickelbar ist, schliefs wir hieraus: „A_n ist von einem bestimmten Werthe von an eine einsinnige Function von n und es ist, je nachde μ_1 positiv, Null oder negativ ist, $\lim A_n + \infty$, endlich u positiv oder Null. Die Reihe ΣA_n divergirt oder convergi je nachdem $\mu_1 \geq -1$ oder $\mu_1 < -1$ ist." Somit co vergirt die Reihe Σa_n absolut dann und nur dann, we $\mu_1 < -1$ ist.

Setzt man ferner

$$a_n = \alpha_n + \beta_n i = A_n \{\cos \theta_n + i \sin \theta_n\},$$

so dafs

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = \frac{A_{n+k+1}}{A_{n+k}} \{\cos(\theta_{n+k+1} - \theta_{n+k}) + i \sin(\theta_{n+k+1} - \theta_n$$

ist, so ergiebt sich nach (18)

$$\frac{A_{n+k+1}}{A_{n+k}} \cos(\theta_{n+k+1} - \theta_{n+k}) = 1 + \sum_1^\infty{}_r \frac{\mu_r}{n^r}$$

$$\frac{A_{n+k+1}}{A_{n+k}} \sin(\theta_{n+k+1} - \theta_{n+k}) = \sum_1^\infty{}_r \frac{\nu_r}{n^r}.$$

Daraus folgt, wenn man für $A_{n+k+1} : A_{n+k}$ die Reihe (19) etzt, nach X. 26 d. I. T.

$$\cos(\theta_{n+k+1} - \theta_{n+k}) = 1 - \frac{\nu_1^2}{2n^2} + \cdots$$

$$\sin(\theta_{n+k+1} - \theta_{n+k}) = \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2 - \mu_1\nu_1}{n^2} + \cdots$$

Wenn nun n grofs genug ist, so ist

$$\cos(\theta_{n+k+1} - \theta_{n+k})$$

itiv, somit liegt $\theta_{n+k+1} - \theta_{n+k}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$.

n findet demnach aus der letzten Gleichung nach VI. 9 telst der Entwickelung

$$\arcsin \xi = \xi + \tfrac{1}{6}\xi^3 + \cdots$$

$$\theta_{n+k+1} - \theta_{n+k} = \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2 - \mu_1\nu_1}{n^2} + \cdots, \qquad (20)$$

ächst für hinlänglich grofse Werthe von n. Zerlegt man a die Differenz $\theta_{n+k+1} - \theta_{m+k}$, wo m eine constante Zahl leutet, wie folgt:

$$\theta_{n+k+1} - \theta_{m+k} = (\theta_{m+k+1} - \theta_{m+k})$$
$$+ (\theta_{m+k+2} - \theta_{m+k+1}) + \cdots + (\theta_{n+k+1} - \theta_{n+k}),$$

erkennt man, dafs das Verhalten von θ_n bei

$$\lim n = +\infty$$

s dem der unendlichen Reihe

$$(\theta_{m+k+1} - \theta_{m+k}) + (\theta_{m+k+2} - \theta_{m+k+1}) + \cdots \qquad (21)$$

chlossen werden kann. Da ihre Glieder als gleichbezeich- betrachtet werden dürfen, und

$$\lim n\,(\theta_{n+k+1} - \theta_{n+k}) = \nu_1$$

so divergirt die Reihe (21) falls ν_1 nicht Null ist; sie vergirt aber, falls $\nu_1 = 0$ ist, weil nunmehr entweder $_{k+1} - \theta_{n+k}$ identisch verschwindet oder es eine natür- le Zahl $h > 1$ giebt, wofür

$$\lim n^h\,(\theta_{n+k+1} - \theta_{n+k}) \gtrless 0$$

(vgl. X. 16 d. I. T.). Demnach ist $\lim \theta_n$ endlich oder endlich, je nachdem ν_1 Null oder nicht Null ist.

Wenn $\mu_1 = 0$ und $\nu_1 \gtrless 0$ ist, so hat A_n bei

$$\lim n = +\infty$$

einen endlichen positiven, θ_n einen unendlichen Grenzwerth, folglich a_n keinen Grenzwerth. Wenn $\mu_1 = \nu_1 = 0$ ist, so haben A_n und θ_n bei $\lim n = +\infty$ endliche und von Null verschiedene Grenzwerthe, also auch a_n selbst.

Um die übrigen Theile unseres Satzes beweisen zu können, bedürfen wir des folgenden Hilfssatzes: „Sollten im Falle dafs in (15) $c_1 = 0$ ist, α_n β_n nicht von einem gewissen Werthe von n an monotone Functionen von n sein, so giebt es sicher unendlich viele complexe Zahlen $\varkappa + \lambda i$ von der Eigenschaft, dafs die beiden Coordinaten von

$$(\varkappa + \lambda i)\, a_n \quad \text{d. i.} \quad \varkappa\alpha_n - \lambda\beta_n \quad \lambda\alpha_n + \varkappa\beta_n$$

von einem bestimmten Werthe von n an monoton sind.“ — In unserem Falle liefert die Gleichung (15)

$$\alpha_{n+k+1} + i\beta_{n+k+1} = (\alpha_{n+k} + i\beta_{n+k}) \left\{1 + \frac{\varphi_h(n) + i\psi_h(n)}{n^h}\right\} \quad (h \geqq 2).$$

Lim $\varphi_h(n)$ und lim $\psi_h(n)$ sind beide endlich, einer von ihnen ist nicht Null. Zerlegt man hier in reellen und imaginären Theil, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{\alpha_{n+k+1}}{\alpha_{n+k}} = 1 + \frac{1}{n^h}\left\{\varphi_h(n) - \frac{\beta_{n+k}}{\alpha_{n+k}}\psi_h(n)\right\}$$

$$\frac{\beta_{n+k+1}}{\beta_{n+k}} = 1 + \frac{1}{n^h}\left\{\varphi_h(n) + \frac{\alpha_{n+k}}{\beta_{n+k}}\psi_h(n)\right\}.$$

Um hieraus nach dem Satze auf p. 266 d. I. T. schliefsen zu können, dafs α_n β_n von einem bestimmten Werthe von n an monotone Functionen von n sind, müfste man wissen, dafs jeder der Factoren von n^{-h} bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth hat und schliefslich sein Zeichen nicht mehr ändert. Das wird man im Allgemeinen schwerlich behaupten dürfen. Sollten aber auch die in Rede stehenden Ausdrücke die verlangte Eigenschaft nicht besitzen, so kann sie doch beigelegt werden denjenigen, welche aus ihnen dadurch hervorgehen, dafs man α_{n+k} β_{n+k} bez. durch

$$\alpha'_{n+k} = \varkappa\alpha_{n+k} - \lambda\beta_{n+k} \qquad \beta'_{n+k} = \lambda\alpha_{n+k} + \varkappa\beta_{n+k} \quad (22)$$

ersetzt, wenn nur die nicht zugleich verschwindenden Zahlen $\varkappa$ λ gehörig gewählt sind. Ersetzt man nämlich a_n durch

$+\lambda i)\, a_n$, wodurch der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ sich nicht dert, so treten die Ausdrücke (22) an Stelle von α_n β_n. — sei

$$\lim \alpha_n = \alpha \qquad \lim \beta_n = \beta$$
$$\lim \varphi_h(n) = \varphi_h \qquad \lim \psi_h(n) = \psi_h .$$

ir schliefsen zunächst diejenigen Werthsysteme $\varkappa$ λ aus, ofür einer der Ausdrücke (22) den Grenzwerth Null hat, so die Systeme $\omega\beta$ $\omega\alpha$, $\omega\alpha$ $-\omega\beta$, wo ω jede reelle Zahl fser Null sein darf. Auch jetzt noch lassen sich $\varkappa$ λ so stimmen, dafs jede der Functionen

$$\varphi_h'(n) = \varphi_h(n) - \frac{\beta'_{n+k}}{\alpha'_{n+k}} \psi_h(n)$$
$$\psi_h'(n) = \varphi_h(n) + \frac{\alpha'_{n+k}}{\beta'_{n+k}} \psi_h(n)$$

nen endlichen von Null verschiedenen Grenzwerth besitzt d somit gewifs der obigen Bedingung genügt. Wenn $= 0$ ist, so ist φ_h nicht Null und es reicht die bisherige eschränkung der $\varkappa$ λ aus. Wenn ψ_h nicht Null ist, so kann an, wie leicht ersichtlich ist, $\varkappa$ λ so annehmen, dafs der renzwerth von $\psi_h'(n)$ bei $\lim n = +\infty$ eine beliebige, von ull und φ_h verschiedene Zahl ψ_h' wird. Zwischen ψ_h' und em Grenzwerthe φ_h' von $\varphi_h'(n)$ besteht die Beziehung

$$(\varphi_h - \varphi_h')(\psi_h' - \varphi_h) = \psi_h^2$$

l. i.

$$\varphi_h' = \frac{\varphi_h^2 + \psi_h^2 - \varphi_h \psi_h'}{\varphi_h - \psi_h'} .$$

st $\varphi_h = 0$, so ist φ_h' nicht Null und ist φ_h von Null ver- chieden, so genügt es, um für φ_h' eine endliche von Null erschiedene Zahl zu erhalten, ψ_h' auch nicht gleich

$$(\varphi_h^2 + \psi_h^2) : \varphi_h$$

zu setzen.

Der Satz 1) in III) und die Behauptungen über das Verhalten von $|s_n|$ im Falle dafs die Reihe Σa_n divergirt, werden nun auf folgende Art erwiesen. Zunächst bemerken wir, dafs wenn die feste natürliche Zahl m so gewählt ist, dafs keiner der Factoren des Productes

$$p_n = \left(1 + \frac{c_1}{m}\right)\left(1 + \frac{c_1}{m+1}\right)\cdots\left(1 + \frac{c_1}{n-1}\right) \quad (n > m) \quad (23$$

verschwindet, der Ausdruck

$$f_n = a_{n+k} : p_n$$

bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen, von Null verschie denen Grenzwerth hat. In der That hat man nach (15

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} : \frac{p_{n+1}}{p_n}$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{c_1}{n}\right)^{-1}\left(\frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \cdots\right) = 1 + \frac{c_2}{n^2} + \cdots$$

woraus die Behauptung nach Satz 2) in II) unmittelbar folg Ebendaraus schliefsen wir noch, dafs es solche, von Nu verschiedene Zahlen b geben mufs, dafs die beiden Coor naten der complexen Zahl

$$g_n = b f_n = \varrho_n + \sigma_n i$$

von einem bestimmten Werthe von n an monotone Fu tionen von n sind.

Nun divergirt, wie leicht zu zeigen ist, die unendli Reihe Σp_n, falls $\mu_1 \geqq -1$ ist. Daraus folgt, dafs die endliche Reihe $\Sigma g_n p_n$, also auch die vorgelegte Σa_n di giren mufs. Würde nämlich $\Sigma g_n p_n$ convergiren, so mü Σp_n convergiren. Denn da nach II. 2) $|g_n|$ einem endlic von Null verschiedenen Grenzwerthe monoton sich nä so müfste nach dem 1. Satze in Nr. 4 neben $\Sigma g_n p_n$ die Reihe

$$\Sigma \frac{g_n p_n}{\varrho_n^2 + \sigma_n^2}$$

und neben dieser die Reihe

$$\Sigma \frac{g_n p_n (\varrho_n - i\sigma_n)}{\varrho_n^2 + \sigma_n^2}$$

d. i. Σp_n convergiren.

Die soeben benutzte Vergleichsreihe Σp_n stimmt, falls c_1 ni reell ist, stets im Wesentlichen mit der binomischen Reihe

$$1 - \binom{-1-c_1}{1} + \binom{-1-c_1}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{-1-c_1}{n} + \cdots (2$$

überein (vgl. VI. 5). Das Verhalten derselben läfst sich leicht b urtheilen vermittelst der Formel

$$-\binom{-1-c_1}{1}+\binom{-1-c_1}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{-1-c_1}{n}$$
$$=(-1)^n\binom{-2-c_1}{n}, \qquad (25)$$

ılche, da sie nach p. 307 d. I. T. für alle reellen Werthe von c_1 be-ıht, zufolge des 2. Satzes in IV. 5 auch für die complexen Werthe n c_1 gilt. Indem

$$(-1)^n\binom{-2-c_1}{n}:(-1)^{n-1}\binom{-2-c_1}{n-1}$$
$$=1+\frac{1+c_1}{n}=1+\frac{(1+\mu_1)+\nu_1 i}{n}$$

ı, so erkennt man nach den zuerst erwiesenen Theilen I) II) unseres ıtzes, dafs die Reihe (24) divergirt, wenn

$$\mu_1+1>0 \quad \text{d. i.} \quad \mu_1 \geq -1$$

. Ihre Partialsummen (25) liegen dem absoluten Betrage nach unter ıer positiven Zahl, nur wenn

$$\mu_1+1\leq 0 \quad \text{d. i.} \quad \mu_1 \leq -1$$

— Falls c_1 reell ist, so beurtheilen wir die Reihe Σp_n mittelst Formel

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=1+\frac{\mu_1}{n},$$

aus hervorgeht, dafs Σp_n divergirt und ihre Partialsummen ins ndliche wachsen, wenn $\mu_1 \geq -1$ ist.

Aus dem Verhalten der Partialsummen der Reihe Σp_n ließt man nach dem 4. und 5. Satze in Nr. 4 auf das Partialsummen von $\Sigma g_n p_n$ und Σa_n.

6. Reihen, deren Glieder Functionen einer Veränderlichen sind.

Sind die Reihenglieder complexe Functionen einer reellen ränderlichen, so gelten noch die Sätze in X. 21 d. I. T. bst ihren Beweisen. Sie lassen sich auch auf den Fall sdehnen, dafs der unabhängigen Veränderlichen x ein be-biger Bereich $\mathfrak{B}$ zugetheilt ist. Für jeden Werth von x demselben seien die Functionen in unbegrenzter Anzahl

$$f_0(x) \quad f_1(x) \ldots f_n(x) \ldots$$

klärt und die unendliche Reihe

$$f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots \qquad (a)$$

convergent, somit auch die Reihe

$$r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots$$

Man sagt nun: „Die unendliche Reihe (a) convergirt gleichmäfsig für alle Werthe von x im Bereiche $\mathfrak{B}$, wenn jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ so zugeordnet werden kann, dafs für alle Werthe

$$n > \mu \qquad |r_n(x)| < \varepsilon \tag{b}$$

ist, welchen der genannten Werthe x auch annehmen mag." Mit Hilfe dieses neuen Begriffes läfst sich der folgende Satz aufstellen.

Satz. „Angenommen, es sei bei einem und demselben Grenzübergange $\lim x = a$, wo a einen Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ bezeichnet, für die $f_n(x)$ je ein endlicher Grenzwerth b_n vorhanden:

$$\lim_{x=a} f_n(x) = b_n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{c}$$

und es convergire die Reihe (a) gleichmäfsig für alle Werthe x des Bereiches $\mathfrak{B}$, so convergirt auch die Reihe Σb_n und man hat bei diesem Grenzübergange

$$\lim_{x=a} \sum_0^\infty f_n(x) = \sum_0^\infty b_n ." \tag{d}$$

Beweis. Gehört der Werth $x = a$ zu $\mathfrak{B}$, so versteht sich die Convergenz von Σb_n von selbst. Sonst bemerke man Folgendes. Für jeden Punkt x in $\mathfrak{B}$ hat man nach (b)

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < 2\varepsilon \quad \text{für } n > \mu,$$

was auch p sein mag. Ferner ist nach (c)

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} f_{n+r}(x) - \sum_{n+1}^{n+p} b_r \right| < \varepsilon$$

für alle Werthe von x in $\mathfrak{B}$, wofür $|x - a|$ kleiner ist als eine gewisse Zahl $\delta_{n,p}$. Somit folgt, wenn x in den beiden Ungleichungen den nämlichen Werth erhält, dafs für $n > \mu$

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| < 3\varepsilon \qquad (p = 1, 2 \ldots) \tag{e}$$

ist. Also convergirt Σb_n. — Läfst man m eine natürliche Zahl gröfser als μ sein und bestimmt eine positive Zahl δ_m so, dafs für diejenigen Werthe von x in $\mathfrak{B}$, wofür

$$|x - a| < \delta_m$$

ist,

$$\left| \sum_{0}^{m} \left\{ f_r(x) - b_r \right\} \right| < \varepsilon$$

, so ergiebt sich aus der Gleichung

$$\sum_{0}^{\infty} f_r(x) - \sum_{0}^{\infty} b_r = \sum_{0}^{m} \left\{ f_r(x) - b_r \right\} + \sum_{m+1}^{\infty} f_r(x) - \sum_{m+1}^{\infty} b_r$$

t Hilfe von (b) und (e), dafs für die ebengenannten Werthe von x

$$\left| \sum_{0}^{\infty} f_r(x) - \sum_{0}^{\infty} b_r \right| < 5\varepsilon$$

, d. h. es besteht die Formel (d).

Ein besonderer Fall des vorstehenden Satzes ist: „Wenn jeden Punkt x eines stetigen Bereiches $\mathfrak{B}$ (mit Einluſs seiner Begrenzung) jede der Functionen $f_n(x)$ stetig und wenn für eben diese Werthe von x die Reihe (a) vergirt und zwar gleichmäfsig, so ist ihr Grenzwerth) eine stetige Function von x in allen Punkten von $\mathfrak{B}$."

7. Reihen nach ganzen positiven Potenzen einer Veränderlichen.

Die Natur bezw. Gestalt des Convergenzbereiches einer ihe von der Form

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (1)$$

rd vermittelst der folgenden Sätze erkannt.

Wenn für einen bestimmten Werth $x = x_0$ alle ieder der Potenzreihe (1) ihrem absoluten Betrage ch eine endliche Zahl g nicht überschreiten, so nvergirt sie und zwar absolut für alle Werthe von welche dem absoluten Betrage nach kleiner sind s x_0.

Convergirt die Reihe (1) für $x = x_0$ nur bei einer stimmten oder bei keiner Anordnung der Glieder, divergirt sie für jeden Werth von x, welcher dem bsoluten Betrage nach gröfser ist als x_0, bei jeder nordnung ihrer Glieder.

Die Sätze werden genau so bewiesen wie in X. 22 d. I. T. und führen zu einer ganz ähnlichen Eintheilung der Potenzreihen wie dort:

1) Die Potenzreihe (1) convergirt überhaupt für keinen Werth aufser $x = 0$.

2) Die Reihe (1) ist beständig d. h. für jeden endlichen Werth von x convergent und zwar absolut.

3) Die Reihe (1) convergirt absolut für einen von Null verschiedenen Werth $x = x_0$, jedoch nicht für jeden Werth von x. Dann giebt es eine und nur eine Zahl R, so dafs die Reihe absolut convergirt für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als R, dagegen divergirt bei jeder Anordnung der Glieder für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag gröfser als R ist. In der Constructionsebene der complexen Zahlen wird der Convergenzbereich der Reihe (1) dargestellt durch die Fläche des vom Nullpunkte mit dem Radius R beschriebenen Kreises, welcher der Convergenzkreis der Reihe heifst. In den Punkten innerhalb desselben convergirt die Reihe absolut, in den Punkten aufserhalb desselben divergirt sie bei jeder Anordnung der Glieder. Ueber ihr Verhalten in den Punkten des Kreises selbst läfst sich nichts Allgemeines aussagen.

Im zweiten und dritten Falle soll die Potenzreihe (1) als convergent bezeichnet werden. Sie heifst in einem Punkte $x = r$ ihres Convergenzkreises convergent (divergent), wenn die Reihe

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots$$

mindestens bei dieser, dem Wachsen des Index n entsprechenden Anordnung ihrer Glieder convergirt (divergirt).

Es gilt auch hier der Satz: „Es sei

$$|a_n| = \mathsf{A}_n \quad \text{und} \quad \lim (\mathsf{A}_{n+k+1} : \mathsf{A}_{n+k})$$

bei

$$\lim n = +\infty$$

vorhanden. Je nachdem dieser Grenzwerth $+\infty$, Null oder eine positive Zahl λ ist, gehört die Reihe (1) zur 1., 2. oder 3. Classe. Im letzten Falle ist

$$R = 1 : \lambda.“$$

8. Verhalten gewisser Potenzreihen auf dem Convergenzkreise.

Satz.[6]) „Wenn die Coefficienten a_n in der Potenzreihe
1) so beschaffen sind, dafs der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ von
inem bestimmten Werthe von n an sich in eine Reihe nach
llenden ganzen Potenzen von n entwickeln läfst:

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{\mu_1 + \nu_1 i}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots, \qquad (2)$$

o gehört die Reihe (1) zur dritten Classe und zwar hat ihr
onvergenzkreis den Radius 1. Auf dem Kreise selbst
eigt sie nachstehendes Verhalten.

I. II. Ist $\mu_1 \geq 0$, so divergirt die Reihe (1) für
lle Werthe von x, deren absoluter Betrag 1 ist.

III. 1) Ist $0 > \mu_1 \geq -1$, so convergirt die Reihe
1) für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag 1
st, ausgenommen $x = 1$. Diese Convergenz ist mit-
in bedingt.

2) Ist $\mu_1 < -1$, so convergirt die Reihe (1) für
lle Werthe von x, deren absoluter Betrag 1 ist, und
war absolut."

Nach dem, was in Nr. 5 bemerkt ist, bedarf nur der
bsatz III. 1) noch des Beweises. Er kann so geführt wer-
n. Convergirt für die Werthe von x, deren absoluter Be-
ag 1 ist, die Reihe

$$a_0 + \sum_1^\infty (a_r - a_{r-1}) x^r \qquad (3)$$

nd zwar zum Grenzwerthe $\varphi(x)$, so hat man wegen

$$\lim a_n x^n = 0$$

$$\varphi(x) = (1 - x) \sum_0^\infty a_r x_r$$

. h. es convergirt die Reihe (1) gewifs für jeden der ge-
annten Werthe von x aufser $x = 1$, wofür sie aber nach
em Satze in Nr. 5 divergirt. Um das Verhalten der Reihe
3) zu untersuchen, betrachten wir den Quotienten

$$\frac{a_{n+k+2}-a_{n+k+1}}{a_{n+k+1}-a_{n+k}}=\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\left(\frac{a_{n+k+2}}{a_{n+k+1}}-1\right):\left(\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}-1\right). \quad (4)$$

Es ist nach (2), wenn wir statt $\mu_1+\nu_1 i$ c_1 schreiben, zufolge Nr. 11

$$\frac{a_{n+k+2}}{a_{n+k+1}}=1+\frac{c_1}{n+1}+\frac{c_2}{(n+1)^2}+\cdots=1+c_1\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\cdots\right)$$
$$+c_2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}+\cdots\right)+\cdots=1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2-c_1}{n^2}+\cdots$$

Da c_1 jetzt nicht Null ist, so ergiebt sich aus (4) auch nach Nr. 11

$$\frac{a_{n+k+2}-a_{n+k+1}}{a_{n+k+1}-a_{n+k}}=1+\frac{c_1-1}{n}+\cdots=1+\frac{(\mu_1-1)+\nu_1 i}{n}+\cdots$$

Da $\mu_1-1<-1$ ist, so convergirt die Reihe (3) für alle Werthe x vom absoluten Betrage 1 und zwar unbedingt.

Hat der Convergenzkreis der Potenzreihe (1) einen von 1 verschiedenen Radius R, so kann die Substitution $x=rx'$, wo r eine Zahl vom absoluten Betrage R bezeichnet, auf eine Reihe mit Coefficienten führen, welche der Bedingung (2) genügen.

Der vorstehende Satz legt die Vermuthung nahe, dafs wenn die Potenzreihe (1) in allen Punkten ihres Convergenzkreises R convergirt, sie absolut convergire d. i. dafs

$$A_0+A_1R+A_2R^2+\cdots$$

convergire. A. Pringsheim hat jedoch nachgewiesen [7]), dafs sie nicht stichhaltig sei, indem es Potenzreihen giebt, welche für alle Punkte des Convergenzkreises bedingt convergiren.

9. Stetigkeit der Grenzwerthe von Potenzreihen.

1. Satz. „Je nachdem die Potenzreihe

$$f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n \quad (1)$$

beständig convergirt oder einen Convergenzkreis vom Radius R besitzt, sei R' eine beliebige positive Zahl oder eine solche, kleiner als R. Dann convergirt die Potenzreihe gleichmäfsig für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag R' nicht übersteigt. Es ist also ihre Summe nach

eine stetige Function von x für jeden dieser Werthe."
weis. Es sei $|x| = X$ und R'' eine Zahl gröfser als
zw. eine Zahl zwischen R' und R. Da die Reihe (1)
$= R''$ absolut convergirt, so müssen die Glieder

$$A_r R''^r \qquad (r = 0, 1, \ldots)$$

einer positiven Zahl g liegen. Demnach hat man

$$|a_r x^r| < g\,(X : R'')^r$$

$$\sum_{n+1}^{n+p} a_r x^r \Big| < g \sum_{n+1}^{n+p} \left(\frac{X}{R''}\right)^r < g \left(\frac{X}{R''}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{X}{R''}\right), \quad (5)$$

nur $X < R''$ ist. Wenn aber $X \leqq R'$ ist, so ergiebt
eraus

$$\sum_{n+1}^{n+p} a_r x^r \Big| < g \left(\frac{R'}{R''}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{R'}{R''}\right), \quad (p = 1, 2 \ldots)$$

ther Ungleichung die im Satze behauptete gleichmäfsige
genz ausgesprochen ist.
us der Relation (5) entnehmen wir auch den wichtigen
„Ist die Potenzreihe

$$a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \cdots \quad (n > 0)$$

rgent, so hat man

$$\lim_{x=0} \sum_{n+1}^{\infty} a_{n+r} x^{n+r} = 0."$$

Satz.[8]) „Ist die Potenzreihe (1) in einem Punkte
ihres Convergenzkreises vom Radius R min-
us bei der dem Wachsen des Index n entspre-
en Anordnung der Glieder convergent, so con-
t sie gleichmäfsig für alle Punkte der geraden
te $x_0 r$, wo x_0 einen festen, sonst willkürlichen
innerhalb des genannten Kreises bedeutet.
hat nach Nr. 6 ihre Summe beim Grenzübergange
$= r$ auf der Strecke $x_0 r$ den Grenzwerth $f(r)$." —
s. Setzt man

$$r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \cdots + a_{n+p} r^{n+p} = \varrho_{n,p}, \quad (p \geqq 1)$$

ört nach Voraussetzung zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl

$\mu > 0$ so, dafs bei beliebigem p $|\varrho_{n,p}| < \varepsilon$ ist, wenn nur $n > \mu$ ist. Man hat nun

$$\sum_1^p{}_s a_{n+s} x^{n+s} = \varrho_{n,1}\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} + \sum_2^p{}_s (\varrho_{n,s} - \varrho_{n,s-1})\left(\frac{x}{r}\right)^{n+s}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum_1^{p-1}{}_s \varrho_{n,s}\left(\frac{x}{r}\right)^{n+s} + \varrho_{n,p}\left(\frac{x}{r}\right)^{n+p}.$$

Bedeutet x einen Punkt von $x_0 r$ und setzt man

$$\left|\frac{x}{r}\right| = \varrho \quad 1 - \frac{x}{r} = \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so ergiebt sich mithin, falls $n > \mu$ ist,

$$\left|\sum_1^p{}_s a_{n+s} x^{n+s}\right| < \sigma\varepsilon \sum_1^{p-1}{}_s \varrho^{n+s} + \varepsilon\varrho^{n+p} = \frac{\varepsilon\varrho^n[\sigma - (\sigma+\varrho-1)\varrho^p]}{1-\varrho}$$

und ferner, da

$$\varrho < 1 \quad \text{und} \quad \varrho + \sigma \geq 1$$

ist,

$$\left|\sum_1^p{}_s a_{n+s} x^{n+s}\right| < \frac{\varepsilon\sigma}{1-\varrho}. \tag{6}$$

Liegt x_0 auf dem Radius Or, so hat man $\varrho + \sigma = 1$ und erhält die Verallgemeinerung einer auf p. 278 d. I. T. gefundenen Relation. Sonst bedeutet nach Formel (21) in II. 16 φ den Winkel $\widehat{Orx_0}$, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt, da x_0 innerhalb des Convergenzkreises der Reihe (1) sich befindet. Somit ist $\cos\varphi > 0$. Aus

$$\frac{x}{r} = 1 - \left(1 - \frac{x}{r}\right)$$

folgt für ϱ^2

$$\varrho^2 = (1 - \sigma\cos\varphi)^2 + \sigma^2\sin\varphi^2 = 1 - 2\sigma\cos\varphi + \sigma^2,$$

also findet man

$$\frac{\sigma}{1-\varrho} = \frac{\sigma(1+\varrho)}{1-\varrho^2} = \frac{1+\varrho}{2\cos\varphi - \sigma} < \frac{2}{2\cos\varphi - \sigma}.$$

Hat die Strecke $x_0 r$ die Länge

$$(2\cos\varphi - \omega)R,$$

wo ω positiv sein mufs, so ergeben sich nunmehr aus (6), indem

$$\sigma \leqq 2 \cos \varphi - \omega$$

, die einander entsprechenden Ungleichungen

$$n > \mu \quad \left| \sum_{1}^{p}{}_{s} a_{n+s} x^{n+s} \right| < 2\varepsilon : \omega ,$$

lche auch für $x = r$ gelten. Ist eine positive Zahl ε' vor-egt, so nehme man $\varepsilon < \frac{1}{2} \omega \varepsilon'$ an und bestimme darnach worauf man auf der ganzen Strecke $x_0 r$ zugleich mit

$$n > \mu \quad \left| \sum_{1}^{p}{}_{s} a_{n+s} x^{n+s} \right| < \varepsilon' \quad (p = 1, 2 \ldots)$$

let — w. z. b. w.

Wenn die Reihe (1) im Punkte $x = r$ ihres Convergenzkreises n Radius R bei der angegebenen Anordnung der Glieder ergirt, so läfst sich das Verhalten von $f(x)$, während x auf m Radius Or dem Punkte r unbeschränkt sich nähert, Hilfe der Sätze 1)—3) in X. 23 d. I. T. beurtheilen. Setzt man (1)

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n \qquad x = \varrho R (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$a_n x^n = (\gamma_n + i\delta_n) \varrho^n ,$$

erhält man

$$f(x) = \varphi(\varrho) + i\psi(\varrho) ,$$

rin $\varphi(\varrho)$ und $\psi(\varrho)$ Reihen nach ganzen positiven Potenzen von ϱ t reellen Coefficienten bedeuten. Läfst man θ unverändert, die lle positive Zahl ϱ aber den Grenzübergang

$$\lim \varrho = 1 - 0$$

sführen, so kann man Folgendes bemerken. 1) „Wenn die Summen

$$s_n = a_0 + a_1 r + \cdots + a_n r^n$$

i $\lim n = + \infty$ den Grenzwerth ∞ haben, so hat

$$f[\varrho R (\cos \theta + i \sin \theta)]$$

i $\lim \varrho = 1 - 0$ den Grenzwerth ∞." Denn von den Ausdrücken

$$\sigma_n = \sum_{0}^{n}{}_{r} \gamma_r \varrho^r \qquad \tau_n = \sum_{0}^{n}{}_{r} \delta_r \varrho^r$$

ufs mindestens einer bei $\lim n = + \infty$ den Grenzwerth $+ \infty$ oder ∞ haben, folglich die entsprechende der Functionen $\varphi(\varrho)$ $\psi(\varrho)$ bei $\lim \varrho = 1 - 0$ den nämlichen Grenzwerth haben. — 2) „Hat $| s_n |$ bei $\lim n = + \infty$ eine endliche obere Unbestimmtheitsgrenze A, so con-rgirt die Potenzreihe (1) für alle Werthe, deren absoluter Betrag einer als R ist, und zwar unbedingt. Und es hat

$$| f[\varrho R (\cos\theta + i \sin\theta)] |$$

bei $\lim \varrho = 1 - 0$ eine endliche obere Unbestimmtheitsgrenze $A' \leqq A\sqrt{2}$." Wegen der Formel

$$s_n = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2}$$

mufs, wie klein auch die positive Zahl ε sein mag, sowohl $|\sigma_n|$, als auch $|\tau_n|$ unter $A + \varepsilon$ liegen, beide haben somit bei

$$\lim n = +\infty$$

endliche obere Unbestimmtheitsgrenzen nicht gröfser als A. Nach dem 3. Satze a. a. O. convergiren somit $\varphi(\varrho)$ und $\psi(\varrho)$ unbedingt für die Werthe $\varrho < 1$ und daher $f(x)$ für alle Werthe von x, wofür $|x| < R$ ist. Dabei sind die oberen Unbestimmtheitsgrenzen von $|\varphi(\varrho)|$ und $|\psi(\varrho)|$ bei $\lim \varrho = 1 - 0$, endlich und nicht gröfser als A, somit die von

$$| f[\varrho R (\cos\theta + i \sin\theta)] |$$

nicht gröfser als $A\sqrt{2}$.

10. Identitätssatz.

Genau auf die nämliche Art wie für die reellen Potenzreihen (vgl. X. 24 d. I. T.) wird für die complexen bewiesen der Satz: „Haben die endlichen oder unendlichen Potenzreihen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots,$$

welche im zweiten Falle innerhalb eines und desselben Kreises convergiren, die Eigenschaft, dafs zu jeder positiven Zahl δ ein von Null verschiedener Werth von x, dem absoluten Betrage nach kleiner als δ, gehört, wofür die Gleichung $f(x) = g(x)$ besteht; so müssen die Coefficienten der nämlichen Potenzen von x in beiden Reihen einander gleich sein:

$$a_0 = b_0 \qquad a_1 = b_1 \ldots, \quad a_n = b_n \ldots"$$

Der Satz gilt auch, wenn wir unter $f(x)$ $g(x)$ Reihen nach ganzen Potenzen von x verstehen, in welchen negative Potenzen von x in endlicher Anzahl vorkommen. Ist $-m$ der algebraisch kleinste der in beiden auftretenden Exponenten, so braucht man nur den vorstehenden Satz auf die Potenzreihen $x^m f(x)$ und $x^m g(x)$ anzuwenden.

11. Der Cauchy'sche Satz über die Entwickelung der zusammengesetzten Function $\varphi[f(x)]$ in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x auf p. 285 d.

T. gilt auch bei complexen Werthen von x und y und r Coefficienten der Potenzreihen $\varphi(y)$, $f(x)$.[9]) Man hat ır an Stelle der Convergenzintervalle:

$$-S<y<S, \qquad -R<y<R$$

z. die Convergenzkreise

$$|y|<S, \qquad |x|<R$$

setzen. Der Beweis bleibt ebenfalls noch in Kraft. Eine nreichende Bedingung für die Entwickelbarkeit von $\varphi[f(x)]$ eine Potenzreihe von x ist also, dafs

$$|f(0)| = A_0$$

einer als S ist. Der Satz gilt auch für die Werthe von deren absoluter Betrag R ist, wenn $f(x)$ dafür absolut nvergirt und $\Phi(R)<S$ ist.

Beispiele. Aufser der Anwendung des Satzes in Nr. 8 erweisen wir auf die im I. T. gegebenen Beispiele, welche er wieder vorzunehmen sind. Wir heben davon Folgen- es hervor.

1) „Die beständig oder im Kreise vom Radius R con- ergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n, \tag{1}$$

achdem $x = x_0 + h$ gesetzt ist, nach Potenzen von h zu rdnen.“ Convergirt diese Reihe beständig, so gilt die leichung

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_1^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n, \tag{7}$$

orin

$$f^{(n)}(x_0) = \sum_n^\infty m(m-1)\dots(m-n+1)\, a_m x_0^{m-n}$$

denken ist, für jeden endlichen Werth von x_0 und h. t aber die Convergenz der Reihe (1) auf den Kreis vom adius R beschränkt, so besteht die Gleichung (7) sicher, enn x_0 ein Punkt innerhalb dieses Kreises und

$$|h|<R-|x_0|$$

. Mit anderen Worten: Die Formel

$$f(x) = f(x_0) + \sum_1^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (8)$$

ist richtig mindestens für jene Punkte x, welche innerhalb des Kreises liegen, der von x_0 aus so beschrieben wird, dass er den Convergenzkreis der Reihe (1) von Innen berührt (Fig. 22). Jede Ableitung der Function $f(x)$ d. i. jede Potenzreihe $f^*(x)$ hat genau denselben Convergenzbereich wie die Potenzreihe (1).

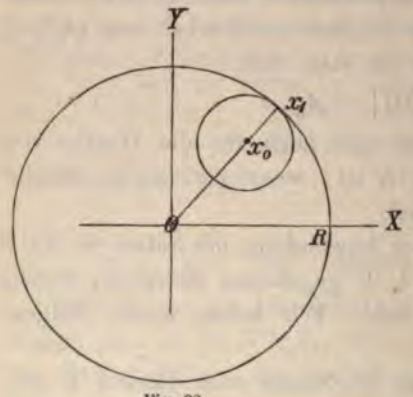


Fig. 22.

Wie schon p. 288 d. I. T. bemerkt ist, so kann im Falle, dafs die Reihe (1) im Kreise vom Radius R convergirt, der Convergenzkreis der Reihe (8) einen gröfseren Radius als $R - |x_0|$ haben. Es ist aber noch allgemein zu zeigen, dafs in diesem Falle auch in denjenigen Punkten, welche innerhalb der Convergenzkreise der beiden Reihen (1) und (8) liegen und dabei vom Punkte x_0 um mehr als $R - |x_0|$ abstehen, die Summe der Reihe (8) gleich $f(x)$ ist. Der Beweis dieses Satzes ist in Nr. 14 nachgetragen. — Eine obere Grenze für den Convergenzradius von (8) findet man in Nr. 18.

Setzt man in (1) statt x $x - a$, so erhält man eine Potenzreihe von $x - a$, deren Convergenzgebiet im Allgemeinen ein Kreis mit dem Mittelpunkte a und dem Radius R (wofür wir von nun an die kürzere Bezeichnung: „Kreis (a, R)" gebrauchen mögen) sein wird. Bedeutet x_0 einen Punkt innerhalb desselben, so erhalten wir der Reihe (8) entsprechend eine Entwickelung von $f(x)$ nach Potenzen von $(x - a) - (x_0 - a)$ d. i. $x - x_0$, deren Coefficienten Potenzreihen von $x_0 - a$ sind und ebenfalls mit $f^{(n)}(x_0)$ bezeichnet werden, sodass die Formel (8) ungeändert bleibt. Die obige Regel über den Convergenzbereich der auf der rechten Seite von (8) stehenden Potenzreihe bleibt in ihrem geometrischen

drucke ungeändert. Diese Potenzreihe heisst nach Weier-
ıfs aus der Reihe

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n (x-a)^n = \mathfrak{P}(x-a)$$

den Punkt $x=x_0$ abgeleitet. Dabei zeigt das Zeichen $\mathfrak{P}$
sch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen des Argu-
tes an.

Ist die Reihe (1) beständig convergent, so definirt sie in der
en Ebene mit Ausnahme von $x = \infty$ eine eindeutige analytische
tion $f(x)$. Hat diese Reihe ein endliches Convergenzgebiet, so ist
öglich, dafs vermittelst der aus ihr abgeleiteten Reihen auch für
te aufserhalb desselben Functionswerthe definirt werden. Die
e (1) heifst daher nach Weierstrafs ein Element der ana-
chen, ein- oder mehrdeutigen Funktion $f(x)$. — Die Ableitungen
hier nur erklärt für solche Functionen, die als Summen von
nzreihen oder deren Fortsetzungen definirt sind, wobei wir be-
ten wollen, dafs die n^{ten} Ableitungen der Fortsetzungen einer
tion zugleich die Fortsetzungen der n^{ten} abgeleiteten Function
. Die Verallgemeinerung dieser Begriffe mittelst der Formeln

$$) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f^{(n)}(x) = \lim_{h=0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h},$$

n man sich unter $f(x)$ zunächst irgend eine eindeutige und stetige
tion von x denken kann, gehört in die Differentialrechnung.
chy hat jedoch gezeigt, dafs beide Erklärungen von $f'(x)$ im
entlichen zusammenfallen, indem die Existenz des ersteren der
en Grenzwerthe und seine Stetigkeit für alle Werthe von x in
m Kreise (a, R) vorausgesetzt, $f(x)$ eben eine innerhalb desselben
ergente Potenzreihe von $x - a$ sein mufs.[9**]) — Ueber das Ver-
n der Reihe (8) im Punkte $x = x_1$ u. s. w. vgl. Anm. 9**).

2) Hinsichtlich der Entwickelung des Quotienten zweier
ichen oder unendlichen Potenzreihen von x (die letzteren
convergent vorausgesetzt)

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \qquad g(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$$

eine Reihe nach ganzen Potenzen von x gilt, falls b_0
ht Null ist, das a. a. O. Gesagte. Auch nach Ein-
ung der complexen Zahlen vermögen wir, den Fall, dass
$g(x)$ ganze Functionen von x sind, abgerechnet (s. Nr. 12),
das Convergenzgebiet der für $f(x) : g(x)$ erlangten

Potenzreihe zunächst nicht mehr zu sagen, als daſs es nicht über den oder die absolut kleinsten Punkte $x = c$, wofür $g(c) = 0$ und

$$\lim_{x=c} \{f(x) : g(x)\} = \infty$$

ist, sich erstrecken könne. — Ist $g(0) = 0$, so sei

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-1} = 0,$$

b_m von 0 verschieden und $g(x) = x^m h(x)$, wobei also $h(0) = b_m$ nicht Null ist. Dann läſst sich $f(x) : h(x)$ in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x entwickeln; nämlich

$$f(x) : h(x) = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \cdots,$$

so daſs

$$f(x) : g(x) = e_0 x^{-m} + e_1 x^{-m+1} + \cdots + e_{m-1} x^{-1} + e_m + e_{m-1} x + \cdots$$

ist. Unser Quotient liefert demnach jetzt eine Reihe nach ganzen Potenzen von x, worin eine endliche Anzahl von negativen Exponenten auftritt.

12. Zerlegung einer rationalen Function von x in Partialbrüche.

Es seien $F(x)$, $G(x)$ ganze Funktionen m^{ten} und n^{ten} Grades von x ohne gemeinsamen Theiler. Die Wurzeln der Gleichung $G(x) = 0$ seien $x_1\, x_2 \cdots x_l$ und zwar bez. $\mu_1\, \mu_2 \cdots \mu_l$-fach, so daſs

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_l = n$$

ist. Demnach hat man für $x = x_r + h$

$$G(x_r + h) = c_0^{(r)} h^{\mu_r} + c_1^{(r)} h^{\mu_r + 1} + \cdots (r = 1, 2 \ldots l),$$

worin schon der erste Coefficient nicht Null ist. Nach dem soeben Bemerkten erhält man nun für

$$F(x_r + h) : G(x_r + h)$$

eine Reihe nach steigenden ganzen Potenzen von h, in welcher die Exponenten mit $-\mu_r$ beginnen. Es ist also, wenn man statt h wieder $x - x_r$ setzt,

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{a_1^{(r)}}{(x - x_r)^{\mu_r}} + \frac{a_2^{(r)}}{(x - x_r)^{\mu_r - 1}} + \cdots + \frac{a_{\mu_r}^{(r)}}{x - x_r} + b_0^{(r)} + b_1^{(r)} (x - x_r) + \cdots \quad (r = 1, 2 \cdots l). \tag{9}$$

zeichnen wir den Inbegriff der Glieder mit negativen ponenten von $x - x_r$ mit $R_r(x)$, so leuchtet unmittelbar , dafs die rationale Function

$$\frac{F(x)}{G(x)} - R_1(x) - R_2(x) - \cdots - R_l(x)$$

gar keinen endlichen Werth von x unendlich wird, somit ganze Function $H(x)$ von x sein muss. Wir haben it den Satz gefunden, dass jede rationale Function x sich auf die Form

$$\frac{F(x)}{G(x)} = R_1(x) + R_2(x) + \cdots + R_l(x) + H(x), \quad (10)$$

rin

$$R_r(x) = \frac{a_1^{(r)}}{(x - x_r)^{\mu_r}} + \cdots + \frac{a_{\mu_r}^{(r)}}{x - x_r}$$

und $H(x)$ eine ganze Function von x bedeutet, ngen läfst und zwar nur in einer einzigen Weise. nn wir nämlich eine Gleichung von der Form (10) als glich voraussetzen und beide Seiten derselben nach Potenzen $x - x_r$ entwickeln, so zeigt sich, dass nur vom Aggre- e $R_r(x)$ negative Potenzen von $x - x_r$ herrühren können; $x)$ muss also mit dem Inbegriff der μ_r ersten Glieder in identisch sein. Da mithin $R_1 R_2 \cdots R_l$ völlig bestimmt l, so natürlich auch die ganze Function $H(x)$.

Mittelst der Formel (10), welche die Zerlegung der ratio- en Function $F(x) : G(x)$ in die Partialbrüche lehrt, lässt erweisen, dafs diese Function in eine recurrente he nach ganzen Potenzen von x entwickelt werden n, deren Convergenzkreis durch den oder die dem llpunkte nächsten der Punkte $x_1\, x_2 \cdots x_l$, wofür der nner $G(x)$ verschwindet, geht. Setzt man nämlich, x_r nicht Null ist,

$$\frac{1}{(x - x_r)^k} = \frac{1}{x_r^k}\left(1 - \frac{x}{x_r}\right)^{-k},$$

läfst sich der zweite Factor in eine Reihe nach ganzen tiven Potenzen von x entwickeln, wenn nur $|x : x_r| < 1$ $|x| < |x_r|$ ist. Diese Reihe ergiebt sich aus der geo-

metrischen durch mehrmalige Multiplication mit sich selbst oder als ein besonderer Fall der binomischen (vgl. VI. 5). Dafs $F(x) : G(x)$ für alle x, deren absoluter Betrag kleiner ist als der oder die kleinsten der Zahlen $|x_1|, |x_2| \cdots |x_l|$, eine Reihe nach ganzen Potenzen von x, die falls unter den x_r der Werth Null vorkommt, auch negative Potenzen von x enthält, liefert, ist somit offenbar. Dass der Radius ihres Convergenzkreises nicht gröfser sein kann, als die genannte Zahl, ist bereits in Nr. 11 bemerkt.

Bestimmung derjenigen ganzen Function höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x: $F(x)$, welche der Bedingung genügt, dafs für l von einander verschiedene Werthe von x: $x_1 x_2 \ldots x_l$ sie selbst und je eine gewisse Anzahl von aufeinander folgenden Ableitungen gegebenen Zahlen gleich ist, nämlich

$$F(x_r) = y_0^{(r)} \quad F'(x_r) = y_1^{(r)} \cdots F^{(\mu_r - 1)}(x_r) = y_{\mu_r - 1}^{(r)}$$
$$(r = 1, 2 \cdots l),$$

wobei

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_l = n$$

sein soll. — Setzt man

$$(x - x_1)^{\mu_1} (x - x_2)^{\mu_2} \cdots (x - x_l)^{\mu_l} = P(x)$$

und entwickelt $F(x) : P(x)$ nach Potenzen von $x - x_r$, so stimmen die Glieder mit negativen Exponenten überein mit denen in der Entwickelung der Function

$$\left[y_0^{(r)} + y_1^{(r)} (x - x_r) + \cdots + \frac{1}{(\mu_r - 1)!} y_{\mu_r - 1}^{(r)} (x - x_r)^{\mu_r - 1} \right] : P(x).$$

Bezeichnet man das Aggregat der Glieder mit negativen Exponenten von $x - x_r$ in der Entwickelung dieses Bruches nach Potenzen $x - x_r$ mit $R_r(x)$, so hat man zufolge des Satzes (10) offenbar

$$F(x) : P(x) = R_1(x) + R_2(x) + \cdots + R_l(x).$$

Es ist demnach

$$F(x) = [R_1(x) + R_2(x) + \cdots + R_l(x)] P(x),$$

welche Formel die Verallgemeinerung der Lagrange'schen in IV. darstellt. — Dafs es nur eine solche Funktion $F(x)$ giebt, folgt dem 2. Satze in IV. 5.

Reihen nach ganzen Potenzen einer Veränderlichen.

Denkt man sich in der Potenzreihe (1) in Nr. 7 anstatt z gesetzt, so erhält man unmittelbar den Satz: Wenn eine Reihe nach negativen ganzen Potenzen von x

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \qquad (11)$$

mindestens für einen endlichen, von Null verschiedenen Werth convergirt, so convergirt sie entweder für jeden solchen Werth absolut oder es giebt eine positive Zahl R', so beschaffen dass die Reihe (11) für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag gröfser als R' ist, absolut convergirt, für alle, deren absoluter Betrag kleiner als R' ist, bei jeder Anordnung der Glieder divergirt."

Wenn die Potenzreihe (11) convergirt, in welchem Falle ihr Grenzwerth sei, so kann man daraus für jeden innerhalb ihres Convergenzbereiches gelegenen Punkt x_0 eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ ableiten. Setzt man nämlich in (11) $x = x_0 + h$ und bemerkt, dafs, wenn $|h| < |x_0|$ ist,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0 + h} = \frac{1}{x_0} - \frac{h}{x_0^2} + \frac{h^2}{x_0^3} - \cdots$$

darf $f(x_0 + h)$ nach Nr. 11 im ersten Falle für jeden von Null verschiedenen Werth von x_0 und h nach Potenzen von h geordnet werden, im zweiten sicher dann, wenn $|x_0| > R'$ und

$$\frac{1}{X_0} + \frac{H}{X_0^2} + \frac{H}{X_0^3} + \cdots = \frac{1}{X_0 - H},$$

wenn $X_0 H$ für $|x_0|\,|h|$ stehen, kleiner als $1 : R'$, also $H < X_0 - R$ bezeichnet man die Coefficienten in dieser Potenzreihe von h so, wie in (7) in Nr. 11, so erhält man, da nach VI. 5

$$\frac{1}{(x_0 + h)^m} = \frac{1}{x_0^m} - \frac{mh}{x_0^{m+1}} + \binom{m+1}{2}\frac{h^2}{x_0^{m+2}} - \cdots$$

$$= (-1)^n \sum_1^\infty{}_m \, m(m+1)\cdots(m+n-1)\frac{a_m}{x_0^{m+n}} \quad (n = 1, 2\cdots).$$

Die Reihen nach negativen Potenzen von x_0 haben genau dasselbe Convergenzgebiet, wie die Reihe $f(x_0)$ d. i. (11). Schreibt man für h wieder $x - x_0$, so erhält auch die aus (11) für den Punkt $x = x_0$

abgeleitete Reihe die Gestalt (8). Sie convergirt also absolut mindestens für Punkte x im Innern des Kreises, welcher von x_0 aus so beschrieben ist, dafs er den Kreis (O, R') von aufsen berührt.

Es kommen auch Reihen vor, in denen sowohl positive, als negative ganze Potenzen von x in unbegrenzter Anzahl erscheinen, die also von der Form sind

$$\left.\begin{aligned} &a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &+ a_{-1} x^{-1} + a_{-2} x^{-2} + \cdots + a_{-n} x^{-n} + \cdots \end{aligned}\right\}. \quad (12)$$

Zunächst bemerke man den folgenden Satz: „Wenn die Reihe (12) für einen von Null verschiedenen Werth von x: $x = x_0$ mindestens bei bestimmter Anordnung ihrer Glieder convergirt, so convergirt von den beiden Reihen

$$\sum_0^\infty{}_n a_n x^n \qquad \sum_1^\infty{}_n a_{-n} x^{-n} \qquad (12^*)$$

die erstere absolut für alle Werthe, deren absoluter Betrag kleiner als $|x_0|$ ist, die letztere absolut für alle Werthe, deren absoluter Betrag gröfser als $|x_0|$ ist." Bezeichnet man nämlich die Glieder von

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n a_n x^n$$

bei der erwähnten bestimmten Aneinanderreihung mit

$$b_0 + b_1 + \cdots + b_p + \cdots,$$

so läfst sich zufolge der Voraussetzung jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl m so zuordnen, dafs $|b_p| < \varepsilon$ ist, wenn nur $p > m$ ist. Wenn nun m_1 den gröfsten, $-m_2$ den kleinsten Exponenten von x_0 in den Gliedern $b_0 b_1 \cdots b_m$ bezeichnet, so hat man

$$|a_n x_0^n| < \varepsilon \text{ für } n > m_1 + 1,$$
$$|a_{-n} x_0^{-n}| < \varepsilon \text{ für } n > m_2 + 1,$$

woraus man erkennt, dass sowohl alle Glieder $a_n x_0^n$ als auch alle $a_{-n} x_0^{-n}$ dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Zahl liegen. Man braucht also nur den erste Satz in Nr. 7 anzuwenden, um den obigen zu finden.

Das Gebiet, innerhalb dessen die Potenzreihe (12) ab-
t convergirt, ergiebt sich sehr leicht mittelst der Be-
rung, dafs wenn diese Reihe absolut convergirt, auch
der beiden Reihen (12*) absolut convergirt. Die Reihe
convergirt demnach absolut 1) entweder für gar keinen
th von x, oder 2) für jeden endlichen Werth von x aufser
0, oder 3) ausschliefslich für die Werthe von x, deren
luter Betrag eine positive Zahl R ist, oder endlich 4)
lle Werthe von x, deren absoluter Betrag innerhalb des
rvalles (R', R) liegt, wobei $R > R' \geqq 0$ ist, und für
en, dessen absoluter Betrag aufserhalb desselben liegt.
ersten Falle kann die Reihe (12) für einige, ja selbst
alle Punkte eines Kreises (O, R) bedingt convergiren,
t aber für Punkte zweier solcher Kreise; dem zu Folge
vorstehenden und des ersten Satzes in Nr. 7 führt diese
ahme schon auf den vierten Fall. Auf dieselbe Art er-
t man, dafs es im dritten Falle keinen Punkt aufser-
des Kreises (O, R) giebt, wofür die Reihe (12) auch
bei einer bestimmten Anordnung der Glieder convergirt
im vierten Falle keine solche Punkte aufserhalb des von
Kreise (O, R') (welcher auch auf den Punkt $x = 0$ zu-
menschrumpfen kann) und dem Kreise (O, R) eingeschlos-
n Ringes. Der erste und dritte Fall werden bezw.
h die Reihen

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{x^n}{n} + \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n\,x^n},$$

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{x^n}{n^\alpha} + \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n^\alpha\,x^n} \qquad (\alpha > 1)$$

estellt. Die zweite convergirt absolut lediglich auf dem
se $(O, 1)$ die erste bedingt in allen Punkten desselben
er $x = +1$. In der Functionentheorie sind nur der
te und vierte Fall von Bedeutung, nur einer von ihnen
uch im Folgenden stets gemeint. Der letztere ist der
ntlich allgemeine: die Potenzreihe (12) convergirt ab-
t für alle Punkte innerhalb des von den Kreisen (O, R')
(O, R) gebildeten Ringes und divergirt für jeden Punkt
erhalb desselben bei jeder Anordnung der Glieder.

Da die Summe der Reihe (12) innerhalb des Bereiches der absoluten Convergenz als Summe der Grenzwerthe der beiden Reihen (12*) aufgefafst werden darf, so erhellt unmittelbar, dafs im zweiten und vierten Falle aus (12) für jeden Punkt $x = x_0$ innerhalb dieses Bereiches eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ abgeleitet werden kann. Für die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $x - x_0$ in derselben gebraucht man dieselben Bezeichnungen wie in (8).

Aehnliche Sätze bestehen für die Reihen nach ganzen Potenzen von $x - a$.

14. Satz über die Uebereinstimmung zweier Reihen nach ganzen Potenzen im gemeinsamen Convergenzgebiete.[10])

„Es seien zwei Reihen gegeben, die eine $P(x-a)$ nach ganzen Potenzen von $x - a$, die andere $Q(x-b)$ nach ganzen Potenzen von $x - b$ fortschreitend. a und b können gleich oder ungleich sein. $\mathfrak{F}$ sei ein zusammenhängendes Flächenstück, das den Convergenzbereichen beider Reihen gemeinsam ist. Giebt es innerhalb $\mathfrak{F}$ einen solchen Punkt $x = c$, dafs zu jeder positiven Zahl δ ein von c verschiedener Werth x' gehört, wofür $|x' - c| < \delta$ und

$$P(x' - a) = Q(x' - b)$$

ist, so stimmen die Werthe der beiden Potenzreihen in allen Punkten innerhalb $\mathfrak{F}$ überein."

Beweis. Da c innerhalb der Convergenzbereiche der beiden Reihen liegt, so mufs es einen ganz bestimmten Kreis vom Mittelpunkte c geben, innerhalb dessen sowohl die Werthe von $P(x-a)$, als auch die von $Q(x-b)$ durch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - c$ dar gestellt werden. Nach Nr. 10 müssen diese beiden Potenzreihen von $x - c$ in unserem Falle identisch sein. Ist ein Punkt innerhalb $\mathfrak{F}$, der aufserhalb des genannten Kreises liegt, so verbinde man ihn mit c durch eine stetige, vollständig innerhalb $\mathfrak{F}$ verlaufende einfache Linie $\mathfrak{l}$, deren jeder Punkt mithin von der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ einen Abstand gröfser als eine gewisse Zahl $\Delta > 0$ haben wird. Nun kann man der Linie $\mathfrak{l}$ ein Polygon $c\,c'\,c''\ldots c^{(n-1)}$ einschreiben,

lessen Seiten sämmtlich gleich Δ sind. Da der Convergenz-adius der oben erwähnten Potenzreihe von $x - c$ gröfser ls Δ ist, so besteht die Gleichung

$$P(x - a) = Q(x - b) \qquad (13)$$

ings der Strecke $c\,c'$, also insbesondere in jeder noch so leinen Umgebung von c'. Da somit die beiden Reihen hin-ichtlich des Punktes $x = c'$ dieselbe Eigenschaft haben, wie ı Bezug auf den Punkt $x = c$, so erkennt man, dafs die leichung (13) auch längs der Strecke $c'\,c''$ gilt. In der rt findet man nach Zurücklegung der Strecken

$$c''\,c'''\,\ldots\,c^{(n-2)}\,c^{(n-1)}$$

ie Gleichung

$$P(k - a) = Q(k - b).$$

Aus dem vorstehenden Satze ergiebt sich eine Verallgemeinerung es Identitätssatzes in Nr. 10 für zwei Reihen nach ganzen Potenzen on $x - a$, in welcher nur Potenzen einer Art, z. B. positive in un-egrenzter Anzahl vorkommen. Offenbar genügt es, dafs sie min-estens für je einen Punkt in jeder Umgebung eines beliebigen unktes ihres gemeinsamen Convergenzgebietes übereinstimmen.

Die bisherigen allgemeinen Sätze über die Reihen nach anzen Potenzen einer Veränderlichen bilden lediglich die ehr oder weniger naheliegende Verallgemeinerung der ent-rechenden Sätze über solche Reihen bei reellen Werthen r Coefficienten und der Veränderlichen. Nun aber werden ir drei neue fundamentale Sätze über die in Rede stehen-n Reihen kennen lernen, welche nur bei Zulassung von mplexen Werthen der Veränderlichen möglich sind. Der irze wegen lassen wir hier die Reihen nach Potenzen von anstatt von $x - a$ fortschreiten.

. Cauchy's Satz über die Coefficienten einer Reihe nach ganzen Potenzen einer Veränderlichen.[11])

„Beschreibt man vom Nullpunkte einen Kreis, welcher nerhalb des Convergenzgebietes der Reihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

rläuft — sein Radius sei K —, so erreicht der abso-te Betrag ihrer Summe $f(x)$ mindestens in einem

Punkte derselben seine endliche obere Grenze G und man hat

$$|a_m| \cdot K^m \leqq G \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots).“$$

Beweis. Dafs $|f(x)|$, während x den Kreis $(0, K)$ durchläuft, seine endliche obere Grenze G erreicht, ist ein besonderer Fall des letzten Satzes in III. 8.

Der zweite Theil des Satzes ergiebt sich so. Es sei p eine beliebige natürliche Zahl und

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$$

$$x_r = K\left(\cos\frac{2r\pi}{p} + i\sin\frac{2r\pi}{p}\right) = K\varepsilon^r \quad (r = 0, 1 \ldots p-1).$$

Nach II. 17 hat man

$$x_0^n + x_1^n + \cdots + x_{p-1}^n = pK^n \text{ oder } 0,$$

je nachdem n durch p theilbar ist oder nicht. Mittelst der Formel

$$\frac{f(x)}{x^m} = a_m + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' a_n x^{n-m},$$

worin der Accent bei Σ ausdrücken soll, dafs n den Werth Null nicht annehmen darf, findet man demnach

$$\sum_0^{p-1} \frac{f(K\varepsilon^r)}{K^m \varepsilon^{mr}} = pa_m + p\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' a_{m+kp} K^{kp}$$

$$a_m = \frac{1}{p}\sum_0^{p-1} \frac{f(K\varepsilon^r)}{K^m \varepsilon^{mr}} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' a_{m+kp} K^{kp}. \quad (2)$$

Nun kann man sich p so grofs denken, dafs das zweite Glied rechts dem absoluten Betrage nach unter einer vorgegebenen Zahl ε liegt. Vermöge der absoluten Convergenz der Reihe (1) für $x = K$ darf man zunächst

$$\left|\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' a_{m+kp} K^{kp}\right| \leqq K^{-m}\sum_1^{\infty} (\mathsf{A}_{m+kp} K^{m+kp} + \mathsf{A}_{m-kp} K^{m-kp})$$

setzen, wo A_n für $|a_n|$ steht. Von daher weifs man auch, dafs sich eine positive Zahl μ so bestimmen läfst, dafs für $n > \mu$

$$\sum_n^{\infty} (\mathsf{A}_{m+s} K^{m+s} + \mathsf{A}_{m-s} K^{m-s}) < \varepsilon K^m$$

Nimmt man p gröfser als μ an, so hat man mithin

$$\left| \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' a_{m+kp} K^{kp} \right| < \varepsilon .$$

Da $|f(Ke^{\nu})| \leq G$ ist, so folgt aus (2), dafs

$$A_m < \frac{1}{p K^m} \sum_{0}^{p-1} |f(Ke^{\nu})| + \varepsilon \leq \frac{G}{K^m} + \varepsilon$$

Hieraus erschliefst man, da ε jede positive Zahl sein nn, die Relation

$$A_m \leq G K^{-m} .$$

Corollar. Identitätssatz für Reihen nach ganzen Potenen von x, in welchen sowohl positive als negative Exponenten von n unbegrenzter Anzahl vorkommen dürfen. „Convergiren die Reihe und eine ähnliche

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n b_n x^n \tag{3}$$

einem und demselben Gebiete und giebt es innerhalb desselben en solchen Punkt $x = c$, dafs zu jeder positiven Zahl δ ein von c rschiedener Werth x' gehört, wofür

$$|x' - c| < \delta$$

und die Summen beider Reihen $f(x)$, $g(x)$ einander gleich sind, so d die Coefficienten der nämlichen Potenzen von x in (1) und (3) ander gleich:

$$a_n = b_n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots).“$$

Beweis. Nach Nr. 14 ist innerhalb des ganzen gemeinsamen nvergenzbereiches $f(x) = g(x)$, d. h. es ist daselbst

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (a_n - b_n) x^n = 0 .$$

kt man sich innerhalb dieses Gebietes einen Kreis (O, K) und ndet auf die letzte Reihe den Coefficientensatz an, so findet man gen $G = 0$ für jeden Werth von n

$$|a_n - b_n| < 0, \quad \text{also} \quad a_n = b_n .$$

16. Weierstrafs' Doppelreihensatz. [12])

„Es sei eine endlose Folge von Reihen nach ganzen tenzen einer Veränderlichen

$$\sum_{-\infty}^{\infty n} a_{m,n}\, x^n \quad (m = 0, 1, 2 \ldots) \tag{4}$$

vorgelegt, deren jede positive und negative Potenzen von x in endlicher Anzahl enthalten kann. Angenommen, es gebe zwei Zahlen R' R, die erste positiv oder Null, die zweite gröfser als die erste und so beschaffen, dafs unter der Bedingung

$$0 \leqq R' < |x| < R \tag{5}$$

nicht allein jede einzelne Reihe (4), sondern auch die aus ihren Summen $f_m(x)$ gebildete Reihe

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_m(x) + \cdots \tag{6}$$

convergirt und zwar die Reihen (4) absolut, die letzte mindestens in der angegebenen Ordnung der Glieder und zwar gleichmäfsig für die genannten Werthe von x. Dann convergirt die Reihe

$$a_{0,n} + a_{1,n} + \cdots + a_{m,n} + \cdots \tag{7}$$

für jeden Werth von n, und wird ihr Grenzwerth mit a_n bezeichnet, so convergirt absolut für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner als R und gröfser als R' ist, die Reihe nach ganzen Potenzen von x

$$\sum_{-\infty}^{+\infty n} a_n\, x^n \tag{8}$$

und es ist ihr Grenzwerth gleich dem von (6):

$$\sum_{-\infty}^{+\infty n} a_n\, x^n = \sum_{0}^{\infty m} f_m(x)\,.\text{“} \tag{9}$$

Beweis. Zufolge Voraussetzung kann jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ so zugeordnet werden, dafs was p auch sein mag, für $n > \mu$

$$|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_{m+p}(x)| < \varepsilon \tag{10}$$

ist und zwar bei jedem den Relationen (5) genügenden Werthe von x. Somit hat man auch

$$\left| \sum_{-\infty}^{+\infty n} (a_{m+1,n} + a_{m+2,n} + \cdots + a_{m+p,n})\, x^n \right| < \varepsilon\,,$$

also nach Nr. 15, wenn K eine Zahl kleiner als R, gröfser als R' bezeichnet, bei $n > \mu$

$$| a_{m+1,n} + a_{m+2,n} + \cdots + a_{m+p,n} | < \varepsilon K^{-n}.$$

Es convergirt mithin die Reihe (7) für

$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots.$$

Setzt man

$$\sum_0^m a_{r,n} = a_n' \qquad \sum_{m+1}^{\infty} a_{r,n} = a_n'',$$

so ergiebt sich also, dafs zugleich mit

$$m > \mu \quad | a_n'' | \leq \varepsilon K^{-n} \tag{11}$$

ist. — Es sei x ein Werth, dessen absoluter Betrag X zwischen R' und R liegt und S S' zwei solche positive Zahlen, dafs

$$R' < S' < X < S < R$$

ist. Ersetzt man nun, je nachdem n negativ ist oder nicht, in (11) K durch S' oder S, so folgt

$$| a_n'' S'^n | \leq \varepsilon \qquad | a_n'' S^n | \leq \varepsilon. \tag{12}$$

Demnach convergiren absolut nach Nr. 13 und 7 die Reihen

$$\sum_{-1}^{-\infty} a_n'' x^n \qquad \sum_0^{\infty} a_n'' x^n,$$

also auch die Reihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n'' x^n.$$

Da ferner die Reihe

$$\sum_0^m f_r(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n' x^n$$

absolut convergirt, so auch die Reihe (8); denn es ist

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_n' + a_n'') x^n. \tag{13}$$

Bedeutet $f(x)$ den Grenzwerth von (6), $\varphi(x)$ den von (8) und ist

$$\sum_{m+1}^{\infty} f_r(x) = R_m(x) \qquad \sum_{\infty}^{+\infty} a_n'' x^n = P_m(x),$$

so hat man

$$f(x) = \sum_{0}^{m} f_r(x) + R_m(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_n x^n + R_m(x)$$

$$f(x) - \varphi(x) = R_m(x) - P_m(x),$$

die letztere Formel nach (13). Nach (10) und (12) ergiebt sich für $m > \mu$

$$|R_m(x)| \leq \varepsilon$$

$$|P_m(x)| < \varepsilon \sum_{-1}^{-\infty} \left(\frac{X}{S'}\right)^n + \varepsilon \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{X}{S}\right)^n = \varepsilon \left\{\frac{S'}{X - S'} + \frac{S}{S - X}\right\}.$$

Man findet demnach, dafs

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \left\{1 + \frac{S'}{X - S'} + \frac{S}{S - X}\right\}$$

ist. Da hier rechts jede positive Zahl stehen kann, so ergiebt sich die Gleichung

$$f(x) = \varphi(x).$$

Unter denselben Voraussetzungen über die Reihe (6), wie im vorstehenden Satze, hat man für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner als R und gröfser als R' ist, neben (9) die Gleichungen

$$f^{(r)}(x) = \sum_{0}^{\infty} f_m^{(r)}(x) \qquad (r = 1, 2 \ldots). \tag{14}$$

Wenn $R' < |x| < R$ und $|h|$ kleiner sowohl als $R - |x|$ als auch als $|x| - R'$ ist, so läfst sich nach Nr. 13 nicht nur $f_m(x + h)$, sondern vermöge der Gleichung

$$f(x + h) = \varphi(x + h)$$

auch $f(x + h)$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von h fortschreitende Reihe verwandeln. Unter diesen Bedingungen hat man also einerseits

$$f(x + h) = \sum_{0}^{\infty} f_m(x + h), \tag{15}$$

wo

$$f_m(x + h) = f_m(x) + \sum_{1}^{\infty} \frac{f_m^{(r)}(x)}{r!} h^r$$

ist, andererseits

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{1}^{\infty} \frac{f^{(r)}(x)}{r!} h^r. \tag{1}$$

e genannten Werthe von (h) ist nun nach (10)

$$f_{m+1}(x+h) + \cdots + f_{m+p}(x+h) | < \varepsilon \quad (p = 1, 2 \ldots).$$

ls läfst sich somit die rechte Seite in (15) nach Potenzen von h , so dafs

$$f(x+h) = \sum_0^\infty f_m(x) + \sum_1^\infty \frac{h^r}{r!} \sum_0^\infty f_m^{(r)}(x)$$

urch Vergleichung der Coefficienten der nämlichen Potenzen auf der rechten Seite dieser und der Gleichung (16) erhält man rmeln (14).

17. Anwendungen des Satzes von Nr. 16.

) Es liegt nahe, diesen Satz zur Entwickelung der in Nr. 11 hteten zusammengesetzten Function $\varphi\{f(x)\}$ zu benutzen. $\varphi(y)$ e im Kreise (O, S) convergente Potenzreihe von y:

$$\varphi(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \cdots, \tag{17}$$

nächst eine im Kreise (O, R) convergente Reihe nach ganzen en Potenzen von x. Ist S' eine positive Zahl kleiner als S, so girt die Reihe (17) gleichmäfsig für alle Werthe von y, deren ter Betrag S' nicht übersteigt.

$$f(x), f(x)^2 \ldots f(x)^n \ldots$$

otenzreihen von x mit demselben Convergenzbereiche. Wenn es olche positive Zahl $A < R$ giebt, dafs für alle Werthe , welche dem absoluten Betrage nach kleiner als A $| f(x) | \leqq S'$ ist, so läfst sich $\varphi\{f(x)\}$ nach obigem Satze für Werthe von x nach Potenzen von x ordnen. Hierzu ist, wie zur dung des Cauchy'schen Satzes in Nr. 11, nothwendig und hin- d, dafs

$$| f(0) | < S$$

ieser Satz liefert dann die gesuchte Entwickelung für alle e von x, deren absoluter Betrag unter der so gewählten Zahl s $\Phi(K) < S$ ist, liegt. Da

$$| f(x) | \leqq \Phi(X)$$

hat man nun auch $| f(x) | < S$, d. h. der Satz von Weier- liefert nie ein beschränkteres Resultat als der Cauchy'sche. leicht zu sehen, dafs wenn

$$f(x) = c(x-a) \quad \text{oder} \quad c : (b-x)$$

ide Sätze zu dem nämlichem Resultate führen; wenn

$$f(x) = c(x-a) : (b-x)$$

r erstere Satz genauer ist.

st $f(x)$ eine nach ganzen positiven und negativen Potenzen fort- ende Reihe, so hat man zwei positive Zahlen A A' so zu be-

stimmen, dafs $A' < A < R$ und für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag zwischen A' und A liegt, $|f(x)| \leqq S'$ ist. $\varphi\{f(x)\}$ läfst sich dann für die ebengenannten Werthe von x in eine Reihe nach ganzen Potenzen von x verwandeln.

2) Jetzt wollen wir nachweisen, dafs es analytische Ausdrücke, nämlich unendliche Reihen, deren Glieder rationale Functionen von x sind, giebt, welche in getrennten Bereichen verschiedene analytische Functionen von x darstellen.[13]) Wir gehen von der unmittelbar ersichtlichen Formel

$$\varphi(x) = \lim_{n=+\infty} \frac{1}{1-x^n} = \begin{cases} 1 \text{ für } |x| < 1 \\ 0 \quad ,, \quad |x| > 1 \end{cases}$$

aus. Für die Werthe x vom absoluten Betrage 1 hat

$$1 : (1 - x^n) \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty$$

keinen Grenzwerth. Bedeuten $m_0\ m_1 \ldots m_n \ldots$ natürliche Zahlen, die mit n beständig, also über alle Grenzen wachsen, so hat man nach Nr. 1

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-x^{m_0}} + \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{1}{1-x^{m_n}} - \frac{1}{1-x^{m_{n-1}}} \right). \quad (18)$$

Hier steht rechts ein analytischer Ausdruck, der innerhalb und aufserhalb des Kreises $(O, 1)$ zwei verschiedene analytische Functionen von x darstellt,

$$f_1(x) = 1 \quad \text{und} \quad f_2(x) = 0.$$

Besonders einfach gestaltet sich derselbe für $m_n = 2^n$, nämlich

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-x} + \sum_1^\infty{}_n \frac{x^{2^n-1}}{x^{2^n}-1}.$$

Mit Hilfe von Nr. 16 erkennt man, dafs wenn A A' positive Zahlen bedeuten, die erste kleiner, die zweite gröfser als 1, die Reihe (18) in der That für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag A nicht übersteigt, in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x, für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag nicht unter A' liegt, in eine Reihe nach ganzen negativen Potenzen von x verwandelt werden kann (was keineswegs selbstverständlich ist). Denn ist

$$|x| \leqq A,$$

läfst sich nicht allein

$$1 : (1 - x^{m_n}) \tag{19}$$

ch Potenzen von x entwickeln, sondern es convergirt auch e Reihe (18) gleichmäfsig. Man hat nämlich

$$r_n(x) = \sum_{s=n+1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1 - x^{m_s}} - \frac{1}{1 - x^{m_{s-1}}} \right\}$$
$$= 1 - \frac{1}{1 - x^{m_n}} = \frac{- x^{m_n}}{1 - x^{m_n}},$$

so für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag A nicht ersteigt,

$$| r_n(x) | < A^{m_n} : (1 - A^{m_n}).$$

t $| x | \geqq A'$, so entwickelt man die Function (19) nach otenzen von $1 : x$. Da nunmehr

$$r_n(x) = - \frac{1}{1 - x^{m_n}},$$

so für alle Werthe von x, wofür $| x | \geqq A'$ ist,

$$| r_n(x) | < 1 : (A'^{m_n} - 1)$$

t, so convergirt die Reihe (18) auch für dieselben gleichäfsig.

Es ist leicht, mit Hilfe der Reihe (18) einen Ausdruck herzuellen, welcher für das Innere von k getrennt liegenden Kreisen, ren Mittelpunkte bez. $a_1\ a_2 \ldots a_k$ und deren Radien bez. $\varrho_1\ \varrho_2 \ldots \varrho_k$ ien, der Reihe nach mit den willkürlich vorgeschriebenen analytien Functionen $f_1(x)\ f_2(x) \ldots f_k(x)$ und für das übrige Gebiet der ene mit einer weiteren solchen Function $f_{k+1}(x)$ übereinstimmt. Das stet offenbar der Ausdruck

$$\sum_{1}^{k} \varphi \left(\frac{x - a_r}{\varrho_r} \right) f_r(x)$$
$$+ \left\{ 1 - \sum_{1}^{k} \varphi \left(\frac{x - a_r}{\varrho_r} \right) \right\} f_{k+1}(x), \tag{20}$$

elcher, falls $f_r(x)$ eine innerhalb des Kreises (a_r, ϱ_r) convergente tenzreihe von $x - a_r$ vorstellt, in der That für diese Werthe von $- a_r$ in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - a_r$ umformt werden kann.

18. Ueber das Verhalten der Summe einer Potenzreihe in der Nähe ihres Convergenzkreises.

Wenn man sich auf reelle Werthe der Veränderlichen x beschränkt, so läfst sich kein allgemeiner Satz über das Verhalten der Summe einer Potenzreihe in der Nähe der Endpunkte ihres Convergenzintervalles aufstellen. Einen solchen giebt es aber, wie Weierstrafs hervorgehoben hat[14]), bei Zulassung von complexen Werthen von x. Es sei ausdrücklich bemerkt, dafs der neue Doppelreihensatz von Nr. 16 in den Nrn. 18—20 nicht benutzt wird.

1. Satz. „Wenn eine Potenzreihe

$$\sum_0^\infty a_n x^n \tag{a}$$

für alle Punkte x' im Innern eines Kreises $(0, R)$ convergirt, so läfst sich ihre Summe sicher für alle der Relation

$$|x - x'| < R - |x'|$$

genügenden Werthe von x als Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x'$ darstellen:

$$f(x) = f(x') + \sum_1^\infty \frac{f^{(n)}(x')}{n!}(x - x')^n . \tag{b}$$

Der Convergenzradius dieser Reihe wird jedoch in der Regel gröfser als $R - |x'|$ sein. Bedeutet $R(x')$ den wahren Convergenzradius der Potenzreihe von $x - x'$ auf der rechten Seite von (b) und es ist die untere Grenze von $R(x')$, x' über das ganze Innere des Kreises $(0, R)$ erstreckt, eine positive Zahl H, so hat der Convergenzkreis der Reihe (a) genau den Radius $R + H$."

Beweis. Es sei H' eine positive Zahl kleiner als H. Man beschreibe vom Punkte O einen Kreis mit dem Radius $R + H'$ und bezeichne mit x_1 irgend einen Punkt des von den Kreisen (O, R) uud $(O, R + H')$ gebildeten Ringes. Ein von x_1 mit dem Radius H beschriebener Kreis mufs mit dem Kreise (O, R) ein Stück $\mathfrak{M}$ gemein haben. Ist x' ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{M}$, so wird die Potenzreihe von $x - x'$ in (b) auch für $x = x_1$ convergiren, da ihr Convergenzradius nicht kleiner als H sein kann. Es hängt aber der Werth

$$f(x') + \sum_{1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x')}{n!} (x_1 - x')^n \qquad (c)$$

ıt von x' ab. Ersetzt man nämlich x' durch einen an-
ın Punkt x'' von $\mathfrak{M}$, so ist, da x_1 aufserhalb des Kreises
R) liegt, $| x'x'' | < 2H$; folglich haben die von x' und
je mit dem Radius H beschriebenen Kreise ein Stück
Strecke $x'x''$ gemein. Auf demselben stimmen die
ınzreihen (b) und

$$f(x'') + \sum_{1}^{\infty} \frac{f^n(x'')}{n!} (x - x'')^n \qquad (d)$$

ein, da eine jede die Summe $f(x)$ liefert; somit nach
14 auch im Punkte $x = x_1$, der den Convergenzgebieten
er angehört. Die Werthe der auf diese Art für die
kte x' und x_1 definirten Function liegen dem absoluten
age nach unter einer endlichen Zahl G, wie aus der
igkeit der Function folgt.

Nun läfst sich zeigen, dafs die Reihe (a) für alle Werthe x, deren absoluter Betrag unter $R + H$ liegt, conver-

Wendet man auf die Reihe in (b) den Satz von Nr. 15 so ergiebt sich neben

$$f(x') | < G \qquad \frac{1}{n!} | f^n(x') | H'^n < G \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$

x') ist eine Potenzreihe nach x' (vgl. Nr. 11). Man findet, ı denselben Satz auf sie anwendend,

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} \mathsf{A}_m X'^{m-n} H'^n < G$$

$$(m = n, n+1, \ldots),$$

n

$$X' = | x' | \qquad \mathsf{A}_m = | a_m |$$

und nach Division durch R^n

$$\mathsf{A}_m X'^m \binom{m}{n} \left(\frac{H'}{R}\right)^n < G \left(\frac{X'}{R}\right)^n.$$

ı man hier $n = 0, 1 \ldots m$ und addirt, so folgt

$$\mathsf{A}_m X'^m \left(1 + \frac{H'}{R}\right)^m$$

$$< G \left[1 - \left(\frac{X'}{R}\right)^{m+1}\right] : \left(1 - \frac{X'}{R}\right) < \frac{GR}{R - X'}.$$

Somit convergirt nach Nr. 7 die Reihe (a) sicher für alle Werthe von x, wofür

$$|x| < X' + \frac{X'H'}{R} < R + H$$

ist, so dafs ihr Convergenzradius kleiner als

$$X'\{R + H'\} : R$$

ist. Der Unterschied

$$R + H - X'\left\{1 + \frac{H'}{R}\right\} = H - H' + (R - X')\left(1 + \frac{H'}{R}\right)$$

kann aber durch entsprechende Annahme von H' und X' kleiner als irgend eine positive Zahl ε gemacht werden. Also ist der Convergenzradius von (a) nicht kleiner als $R + H$. Da er nicht gröfser als $R + H$ sein kann (indem sonst die untere Grenze von $R(x')$ nicht H sein würde), so ist er gleich $R + H$.

2. Satz. „Convergirt die Potenzreihe (a) für alle Punkte x' im Innern des Kreises (O, R), so ist dieser Kreis dann und nur dann Convergenzkreis derselben, wenn die oben definirte positive Zahl $R(x')$ für die genannten x' die untere Grenze Null hat."

Die untere Grenze von $R(x')$ ist entweder eine positive Zahl H oder Null. Im ersten Falle ist der Convergenzradius der Reihe (a) gleich $R + H$, im zweiten mufs er gleich R sein, denn er kann weder kleiner noch gröfser als R sein.

3. Satz. „Hat $R(x')$ für die Punkte x' im Innern des Kreises (O, R) die untere Grenze Null, so mufs unter ihnen oder auf dem Umfange des Kreises mindestens ein Punkt $x = r$ vorhanden sein, in dessen jeder, auch noch so kleinen Umgebung $R(x')$ die untere Grenze Null hat (nach dem Hilfssatze auf p. 205 d. I. T.). Der Punkt $x = r$, sowie jeder andere Punkt von der nämlichen Beschaffenheit, kann aber nur auf dem Umfange des Kreises (O, R) liegen."

Beschreibt man nämlich von einem Punkte x' einen ganz innerhalb des Kreises (O, R) verlaufenden Kreis — sein Radius sei ϱ' —, so ist für die Punkte x'' im Innern desselben

$$R(x'') > R - |x'| - \varrho' > 0;$$

die untere Grenze von $R(x'')$ kann also nicht Null sein.

4. Satz. „Der Kreis (O, R), innerhalb dessen die Potenzreihe (a) überall convergirt, ist dann und nur dann der Convergenzkreis derselben, wenn es auf seinem Umfange mindestens einen Punkt $x = r$ von der Beschaffenheit giebt, dafs wenn man von ihm aus einen Kreis mit noch so kleinem Radius beschreibt, die Werthe der Summe $f(x)$ der Reihe (a) in den Punkten, welche innerhalb dieses und des Kreises (O, R) liegen, nicht durch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - r$ dargestellt werden können."

Beschreiben wir nämlich von einem Punkte $x = r$ auf dem Kreise (O, R) einen Kreis mit dem Radius ϱ und nehmen an, dafs für die Punkte x'', welche innerhalb der beiden Kreise liegen, $f(x'')$ durch eine Potenzreihe

$$f(x'') = \sum_0^\infty c_n (x'' - r)^n \qquad \text{(e)}$$

dargestellt werden könne, so müssen wir schliefsen, dafs

$$R(x'') \geqq \varrho - |rx''|$$

ist. Denn die Potenzreihe von $x - x''$, welche sich für die zu den x'' benachbarten Punkten gehörigen $f(x)$ aus (a) und diejenige, welche sich aus (e) ableiten läfst, sind identisch. Ist nun ϱ' eine positive Zahl kleiner als ϱ, so ergiebt sich für die Punkte x''', die innerhalb der Kreise (O, R) und (r, ϱ') liegen,

$$R(x''') \geqq \varrho - |rx'''| \geqq \varrho - \varrho',$$

so dafs die untere Grenze von $R(x''')$ nicht Null sein kann.

Ueber die positive Function $R(x')$, wo x' irgend einen Punkt innerhalb des Convergenzkreises (O, R) der Potenzreihe (a) bedeutet, bestehen noch die folgenden Sätze:

5) „Beschreibt man von einem der obigen Punkte $x = r$ einen Kreis, so ist für alle Punkte x'', die innerhalb desselben und des Kreises (O, R) liegen,

$$R(x'') \leqq |x''r|.$$

Es ist also

$$\lim_{x'=r} R(x') = 0."$$

Gäbe es nämlich einen Punkt x'', wofür

$$R(x'') > |\, x''r\,|$$

also gleich

$$|\, x''r\,| + \delta$$

ist, so liefse sich aus der Potenzreihe (d) eine für den Punkt $x = r$

$$\mathfrak{Q}(x - r)$$

mit einem Convergenzradius $\geq \delta$ ableiten, welche in den Punkten, die den Kreisen (O, R) und (r, δ) gemeinsam sind, dieselbe Summe wie (d) d. i. $f(x)$ liefert. Das widerspricht aber der Natur der Punkte $x = r$. — Aus diesem Satze folgt:

6) „Es ist

$$R(x') \leq R + |\, Ox'\,|.“$$

Denn $R + |\, Ox'\,|$ ist der gröfste unter den Abständen der Punkte der Kreislinie (O, R) vom Punkte $x = x'$.

7) „Bezeichnet x_0' einen Punkt innerhalb der Strecke Or, so ist $R(x_0')$ gleich $R - |\, Ox_0'\,|$.“ — Denn nach Nr. 11 kann $R(x_0')$ nicht kleiner, nach dem 5. Satze nicht gröfser als diese Zahl sein.

8) „$R(x)$ ist eine stetige Function von x'.“ — Man bemerke zunächst, dafs wenn x'' einen Punkt innerhalb des Kreises (O, R) und des Convergenzkreises der Reihe (b) bezeichnet, die aus ihr für den Punkt x'' abgeleitete Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x''$ mit der Reihe (d) übereinstimmt. Eine jede dieser Reihen hat nämlich in gehöriger Nähe von x'' die Summe $f(x)$. Wir finden demnach nach Nr. 11 und dem 6. Satze die Relationen

$$R(x') - |\, x'x''\,| \leq R(x'') \leq R(x') + |\, x'x''\,|,$$

welche den 8. Satz enthalten.

Die vorstehenden Sätze gelten auch für Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $x - a$, nur ist an Stelle des Punktes O der Punkt $x = a$ zu setzen. Sie bestehen auch für Reihen nach ganzen Potenzen von $x - a$, worin nur die positiven Exponenten von $x - a$ in unbegrenzter Anzahl vorkommen und lassen sich sehr leicht übertragen auf Potenzreihen von $x - a$ in unbegrenzter Anzahl. Da man eine Reihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty n} a_n (x - a)^n,$$

in welcher sowohl positive als negative ganze Potenzen von $x - a$ in unbegrenzter Anzahl erscheinen, als Summe einer Reihe nach ganzen positiven und einer nach ganzen negativen Potenzen von $x - a$ betrachten darf, so folgt, dafs wenn ihr Convergenzbereich von dem Kreise (a, R') (bezw.

dem Punkte $x = a$) und dem Kreise (a, R) (bezw. dem Punkte $x = \infty$) begrenzt wird, auf jedem derselben mindestens ein Punkt von derselben Beschaffenheit sich befinden mufs, wie der Punkt $x = r$ im 4. Satze.

19. Mittelst des 4. Satzes von Nr. 18 läfst sich der wahre Convergenzkreis einer Potenzreihe bestimmen, wenn man weifs, dafs in denjenigen Punkten, wo die Reihe absolut convergirt, ihre Summe mit einer bereits hinlänglich untersuchten Function übereinstimmen mufs. So wissen wir, dafs wenn die im 2. Beispiel von Nr. 11 im Falle dafs b_0 nicht Null ist, ermittelte Potenzreihe von x, welche für Werthe von x von hinlänglich kleinem absoluten Betrage mit $f(x) : g(x)$ übereinstimmt, absolut convergirt, sie die Summe $f(x) : g(x)$ hat. Daraus ergiebt sich nunmehr, dafs wenn innerhalb des gemeinsamen Convergenzbereiches der Potenzreihen $f(x)$ $g(x)$ überhaupt Punkte vorkommen, wofür der Nenner $g(x)$ Null, der Zähler $f(x)$ nicht Null ist, der Convergenzkreis der genannten Reihe durch den oder einen der dem Punkte 0 nächsten unter ihnen $x = r$ geht. Denn für die einem Punkte x', wofür $|x'| < |r|$ ist, hinlänglich nahen Punkte läfst sich $f(x) : g(x)$ in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x'$ entwickeln; der Punkt $x = r$ besitzt aber keine solche Umgebung, dafs die zu ihren Punkten gehörigen Werthe von $f(x) : g(x)$ durch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - r$ darstellbar wären. — Aehnliches gilt von der Potenzreihe $F(x)$, von welcher bekannt ist, dafs sie für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze nicht übersteigt, mit der Function $\varphi(f(x))$ übereinstimmt, wo die Zeichen φ f entweder eine rationale oder eine der im VI. Abschnitte zu betrachtenden Kreisfunctionen bedeuten. Denn in einem solchen Falle besteht zwischen den Veränderlichen y und $z = \varphi(y)$ eine Gleichung

$$G(y\,z) = 0,$$

wo G entweder eine ganze Function der beiden Veränderlichen oder doch einer derselben, deren Coefficienten beständig convergente Potenzreihen der anderen sind, be-

deutet. Setzt man hier $y = f(x)$ und $z = F(x)$, so erhellt, dafs die Gleichung erfüllt ist für alle Werthe von x innerhalb des gemeinsamen Convergenzbereiches der Reihen $f(x)$, $F(x)$. Also stimmt die Summe von $F(x)$, soweit diese Reihe absolut convergirt, mit $\varphi(f(x))$ überein. Zur Ermittelung des Convergenzbereiches der Reihe $F(x)$ bedarf es demnach nur der Untersuchung der Function $\varphi(f(x))$. Damit sind alle Fragen hinsichtlich der sich zunächst darbietenden Reihenentwickelungen gelöst.

Bequemer als die vorstehende Bemerkung ist jedoch der erste der beiden Sätze der nächsten Nr.

20. Sätze aus der Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.

1. Satz nach Cauchy.[15]) Wenn die eindeutige Function $f(x)$ in allen Punkten innerhalb des Kreises (a, R) den Character einer ganzen Function besitzt, so läfst sie sich für alle diese Werthe in eine nach ganzen positiven Potenzen von $x - a$ fortschreitende absolut convergente Reihe entwickeln.

Beweis. Zufolge der Voraussetzung lässt sich eine positive Zahl $S < R$ so bestimmen, dafs $f(x)$ für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner als S ist, einer gewöhnlichen Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - a)$ gleich ist. Wir zeigen zunächst, dafs wenn die Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ für alle Werthe von $x - a$, welche dem absoluten Betrage nach kleiner als eine positive Zahl $R' \leqq R$ sind, convergirt, dafür die Gleichung

$$f(x) = \mathfrak{P}(x - a) \tag{f}$$

besteht. Wir definiren eine positive Veränderliche H dadurch, dafs für alle Werthe x, wofür $|x - a| < H$ ist, diese Gleichung gilt. H hat eine obere Grenze G und erreicht sie. Ist nämlich x' irgend ein Werth, wofür $|x' - a|$ kleiner als G ist, so giebt es einen Werth von H, der gröfser als $G - (G - |x' - a|)$ d. i. $|x' - a|$ ist; also genügt $x = x'$ der Gleichung (f).

Wenn $G = R'$ ist, so trifft die vorstehende Behauptung zu. Es läfst sich aber zeigen, dass G unmöglich kleiner als R' sein kann. Wäre $G < R'$, so müfste es zu jeder Zahl G_1 zwischen G und R' mindestens einen Werth von x geben, wofür $x - a$ dem absoluten Betrage nach kleiner als G_1, aber nicht kleiner als G ist und die Gleichung (f) nicht [illegible]. Das ist aber nicht der Fall, wenn wir G_1 auf folgende Art

wählen. Ist $G < R'$, so hat $f(x)$ sicher in allen Punkten x_0 des Kreises (x, G) den Character einer ganzen Function; es ist also bei genügend kleinem $|a - x_0|$ $f(x)$ gleich einer Potenzreihe $\mathfrak{Q}(x - x_0)$. Der Convergenzradius derselben ändert sich stetig mit x_0 längs des Kreises (a, G), was auf dieselbe Weise gezeigt wird, wie der 8. Satz in Nr. 18. Er hat somit ein Minimum $D(> 0)$. Es sei nun G_1 eine Zahl $< G + D$ und $< R'$ und x'' irgend ein Werth innerhalb des Ringes zwischen den Kreisen (a, G_1) und (a, G), den letzteren mitgerechnet. ax'' schneide diese Kreise in x_1 und x_0, den Kreis (a, R') in r'. Wie bemerkt, besteht innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte x_0 und einem Radius, nicht kleiner als D, welcher also x'' umschliefst, die Gleichung

$$f(x) = \mathfrak{Q}(x - x_0).$$

Ferner ist sicher innerhalb des vom Punkte x_0 mit dem Radius $x_0 r'$ beschriebenen Kreises

$$\mathfrak{P}(x - a) = \mathfrak{P}_0(x - x_0),$$

wo $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ die aus $\mathfrak{P}(x - a)$ für den Punkt $x = x_0$ abgeleitete Potenzreihe bezeichnet. Allein für die Werthe $x = x'''$, welche zugleich innerhalb der Kreise (a, G) und $(x_0, |x_0 x_1|)$ liegen, hat man

$$\mathfrak{P}(x''' - a) = f(x'''),$$

also

$$\mathfrak{P}_0(x''' - x_0) = \mathfrak{Q}(x''' - x_0),$$

sodafs die Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ und $\mathfrak{Q}(x - x_0)$ identisch sein müssen. Demnach ist $f(x'') = \mathfrak{P}(x'' - a)$.

Der Convergenzradius der Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ kann aber nicht kleiner als R sein, weil sonst $f(x)$ mindestens in einem Punkte $x = r'$ innerhalb des Kreises (a, R) den Character einer ganzen Function verlieren müfste, d. h. es müfste nach Nr. 18 der Punkt $x = r'$ so beschaffen sein, dafs einen wie kleinen Kreis man von ihm aus auch beschreiben mag, die Werthe von $f(x)$ zu den innerhalb desselben und des wahren Convergenzkreises (a, R') von $\mathfrak{P}(x - a)$ liegenden Punkten sich nicht durch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - r'$ darstellen lassen.

Ist auf dem Kreise (a, R) ein Punkt $x = r$ vorhanden, wo $f(x)$ den Character einer ganzen Function verliert, so ist R der vollständige Convergenzradius der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - a)$.

Hat die eindeutige Function $f(x)$ in allen eigentlichen Punkten der Ebene den Character einer ganzen Function, so darf man den Radius R so grofs annehmen, als man will. $f(x)$ ist dann gleich einer beständig convergenten Reihe oder einer ganzen rationalen Function. Aus dem Identitätssatze

in Nr. 15 folgt, dafs das letztere nur dann eintritt, wenn $f(x)$ auch im Punkte $x = \infty$ den Character einer rationalen Function besitzt.

2. Satz. „Die eindeutige Function $f(x)$ sei in allen Punkten innerhalb des von den Kreisen (a, R') und (a, R) $-R' < R -$ eingeschlossenen Ringes vom Character einer ganzen Function. Ist dann bekannt, dafs $f(x)$ für alle Werthe von x, wofür $(x - a)$ zwischen den Zahlen $S'S$, die erstere gröfser als R', die zweite kleiner als R, liegt, durch eine nach ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihe $P(x - a)$, worin auch negative Exponenten von $x - a$ in endlicher oder unendlicher Anzahl vorkommen können, dargestellt wird, so reicht das Convergenzgebiet der Reihe $P(x - a)$ bis an die Kreise (a, R') und (a, R) und es besteht für alle Punkte zwischen ihnen die Gleichung

$$f(x) = P(x - a).“ \qquad (g)$$

Hat $f(x)$ in allen eigentlichen Punkten der Ebene aufser $x = 0$ den Character einer ganzen Function, so darf man für R' R irgend zwei positive Zahlen setzen, wovon die erste kleiner als die zweite ist.

Der Satz wird ganz auf die nämliche Art bewiesen, wie der vorhergehende. Um zu zeigen, dafs die Gleichung (g) in allen Punkten innerhalb des Convergenzgebietes der Reihe $P(x - a)$ Geltung hat, führt man eine Veränderliche H von der Beschaffenheit ein, dafs diese Gleichung besteht für Werthe von $x - a$, deren absoluter Betrag kleiner als H ist, jedoch H beliebig nahe kommt, und betrachtet ihre obere und untere Grenze.

3. Satz nach Laurent.[16]) Wenn die eindeutige Function $f(x)$ in allen Punkten innerhalb eines ringförmigen, von den Kreisen (a, R') und $(a, R) - R' < R -$ eingeschlossenen Gebietes vom Character einer ganzen Function ist, so läfst sie sich für alle diese Werthe in eine nach ganzen positiven und negativen Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihe entwickeln.

Beweis. Zufolge des 2. Satzes brauchen wir die in Rede stehende Entwickelung von $f(x)$ nur nachzuweisen für die Punkte eines von zwei beliebigen concentrischen Kreisen

t dem Mittelpunkte a, die innerhalb des im Satze be-
hriebenen Gebietes verlaufen, gebildeten Ringes. Sie
tet sich zunächst dar in dem besonderen Falle, dass eine eindeutige
gerade Function $F(y)$ von y vorliegt, die in allen Punkten inner-
lb der Kreise (O, S'), (O, S), wobei

$$S'S = 1 \quad \text{und} \quad S > \sqrt{2} + 1$$

, vom Character einer ganzen Function ist.

Aus der quadratischen Gleichung

$$z = y + \frac{1}{y} \tag{h}$$

giebt sich

$$y = \tfrac{1}{2}\{z \pm \sqrt{z^2 - 4}\}. \tag{i}$$

hat bei gegebenem z zwei Wurzeln y y', deren Product gleich 1

Nur für $z = \pm 2$ fallen sie in den einen Werth ± 1 zusammen.
zen wir

$$|y| = Y, \ |y'| = Y', \ |z| = Z$$

l nehmen $Y \geqq 1$, $Y' \leqq 1$ an, so bemerken wir, dafs

$$\frac{1}{Y'} - Y' \leqq Z \leqq Y + \frac{1}{Y},$$

D

$$\tfrac{1}{2}\{\sqrt{Z^2 + 4} - Z\} \leqq Y' \qquad Y \leqq \tfrac{1}{2}\{\sqrt{Z^2 + 4} + Z\}$$

Das Product des ersten und vierten Ausdruckes ist 1. Während
von Null an wächst, nimmt

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{Z^2 + 4} + Z)$$

1 an beständig zu,

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{Z^2 + 4} - Z)$$

1 an beständig ab. Lassen wir z alle Werthe innerhalb des
ises (O, T) durchlaufen, so erhält die durch die Gleichung (h)
nirte Veränderliche y nur Werthe, deren absoluter Betrag zwischen
Grenzen

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{T^2 + 4} - T) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(\sqrt{T^2 + 4} + T)$$

t. Machen wir

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{T^2 + 4} + T) = S,$$

ist

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{T^2 + 4} - T) = 1 : S, \quad \text{also} \quad T = S - \frac{1}{S}.$$

Ausdruck $F(y) + F(y')$ ist für jeden Werth von z im Kreise
$S - \frac{1}{S}$) eindeutig definirt und vom Character einer ganzen
action. Das folgt für jeden von ± 2 verschiedenen Werth von
$z = z_0$ daraus, dafs sowohl $y - y_0$ als auch $y' - y_0'$ mit Hilfe
Formel (i) als Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $z - z_0$
ne constantes Glied darstellbar sind und somit der Satz in Nr. 11
Verwendung kommen kann. Dem Werthe $z = 2$ entspricht

$y = y' = 1$; also haben die Entwickelungen von $F(y)$ und $F(y')$ nach Potenzen von $y - 1$ bezw. $y' - 1$ entsprechend gleiche Coefficienten. $(y-1)^n + (y'-1)^n$ ist als eine symmetrische Function von $y\,y'$ eine ganze Function von $z - 2$ und zwar eine solche, die für $z = 2$ verschwindet, was daraus erhellt, dafs nach (i) $y - 1$ und $y' - 1$ als Reihen nach ganzen Potenzen von $\sqrt{z-2}$ ohne constantes Glied erscheinen. Daher kann man $F(y) + F(y')$ wieder mit Hilfe des Satzes in Nr. 11 in eine Potenzreihe von $z - 2$ verwandeln. Aehnliches gilt hinsichtlich des Punktes $z = -2$.

Somit läfst sich $F(y) + F(y')$ nach dem 1. Satze für die Werthe $|z| < S - \frac{1}{S}$ als eine nach ganzen positiven Potenzen von z fortschreitende Reihe darstellen:

$$F(y) + F(y') = \mathfrak{P}\left(y + \frac{1}{y}\right).$$

Aus dem Cauchy'schen Doppelreihensatz in Nr. 3 folgt auf die nämliche Art, wie der Satz in Nr. 11, dafs die Reihe rechts in eine nach ganzen positiven und negativen Potenzen von y fortschreitende absolut convergente Reihe sicher dann verwandelt werden kann, wenn

$$Y + \frac{1}{Y} < S - \frac{1}{S}$$

ist. Während Y von 1 an wächst, nimmt $Y + 1 : Y$ beständig zu. Es wird also $F(y) + F(y')$ eine Reihe nach ganzen Potenzen von y sein für alle Werthe von y, deren absoluter Betrag zwischen den Grenzen $1 : S_1$ und S_1 liegt, falls $S_1 > 1$ ist und der Gleichung

$$S_1 + \frac{1}{S_1} = S - \frac{1}{S}$$

genügt. Diese Gleichung hat dann und nur dann eine solche Wurzel, wenn $S > 1 + \sqrt{2}$ ist.

Ganz ebenso wird gezeigt, dafs die Function $F(y) + F(y')$, welcher y und y' die Wurzeln der Gleichung

$$y - \frac{1}{y} = z'$$

sind, eine eindeutige Function von z' ist, die in eine gewöhnliche, für

$$|z'| < S - 1 : S$$

convergirende Potenzreihe von z' entwickelt werden kann und falls $|y|$ zwischen $1 : S_1$ und S_1 liegt, als eine Reihe nach ganzen Potenzen von y erscheint. — Eine gleichartige Potenzreihe wird sich also ergeben für die Function

$$\tfrac{1}{2}\left\{F(y) + F\left(\frac{1}{y}\right)\right\} + \tfrac{1}{2}\left\{F(y) + F\left(-\frac{1}{y}\right)\right\},$$

welche, da $F(-y) = -F(y)$ ist, mit $F(y)$ identisch ist. Nach dem

Satze läfst sich diese Darstellung von $F(y)$ sofort auf alle Werthe on y ausdehnen, deren absoluter Betrag zwischen $1 : S$ und S liegt.

Wir befreien nun den Satz von den ihm noch anhaftenden Beschränkungen. Ersetzen wir zunächst die ungerade Function $F(y)$ urch eine beliebige $g(y)$, so genügt die Bemerkung, dafs

$$g(y) = \tfrac{1}{2}\{g(y) - g(-y)\} + \frac{y}{2} \cdot \frac{g(y) + g(-y)}{y}$$

st, worin beide Theile ungerade Functionen von y enthalten, um einusehen, dafs der Satz auch jetzt noch gilt. — Die im 3. Satze vorausesetzte Function $f(x)$ verwandeln wir durch die Substitution

$$x - a = \sqrt{RR'} \cdot y$$

eine von y. Den Kreisen (a, R') und (a, R) in der x-Ebene entprechen in der y-Ebene Kreise mit dem Mittelpunkte $y = 0$ und den adien

$$S' = \sqrt{\frac{R'}{R}} \qquad S = \sqrt{\frac{R}{R'}},$$

dafs $S\,S' = 1$ ist. Unser Satz ist also erwiesen, wenn

$$R : R' > (1 + \sqrt{2})^2 \text{ ist.}$$

Wenn $R : R'$ einen Werth zwischen 1 und $(1 + \sqrt{2})^2$ hat, so ebt es immer eine ganze positive Potenz des Quotienten, welche öfser als $(1 + \sqrt{2})^2$ ist. Ist m ihr Exponent, so setzen wir

$$(x - a)^m = y\,. \tag{k}$$

deutet dann e eine primitive m^{te} Wurzel der Einheit und definiren r m Functionen f_r folgendermafsen

$$mf_r = \sum_{0}^{m+1} [e^n (x - a)]^r f(a + e^n (x - a)),\ (r = 0,\ 1 \cdots m - 1),$$

sind sie als symmetrische Functionen der Wurzeln der Gleichung eindeutige Functionen von y in einem ringförmigen Gebiete dieser eränderlichen von der Beschaffenheit, dafs der Quotient der Radien r beiden Grenzkreise $(R : R')^m$, also gröfser als $(1 + \sqrt{2})^2$ ist. Inm jede $\sqrt[m]{y}$ in der Umgebung irgend eines von Null verschiedenen erthes $y = y_0$ als gewöhnliche Potenzreihe von $y - y_0$ dargestellt erden kann, so hat f_r in jedem Punkte $y = y_0$ des soeben erwähnten ebietes den Character einer ganzen Function von y, läfst sich demach für alle diese Werthe in eine Reihe nach ganzen positiven und gativen Potenzen von y entwickeln. Setzen wir statt y wieder $(x - a)^m$, so erhalten wir für die Functionen f_r Potenzreihen von $x - a$. Da nun nach II. 17

$$f(x) = \sum_{0}^{m+1} (x-a)^{-r} f_r$$

ist, so ergiebt sich auch für $f(x)$ die im 3. Satze verlangte Darstellung und zwar für alle Werthe von x, wofür $R' < |x-a| < R$ ist.

Beispiele für den 3. Satz s. VII. 13. — Der Satz zeigt, daſs wenn von dem wesentlichen singulären Punkte $x = a$ der eindeutigen analytischen Function $f(x)$ ein Kreis so beschrieben werden kann, daſs $f(x)$ in allen Punkten innerhalb desselben aufser $x = a$ holomorph ist, die Werthe von $f(x)$ für diese Punkte durch eine Reihe nach ganzen Potenzen von $x - a$ dargestellt werden.

21. Potenzreihen mit zwei Veränderlichen x, y.

Es gelten auch bei complexen Werthen der Veränderlichen x y und der Coefficienten die vier Sätze in X. 27—30 d. I. T. und zwar bleiben auch die dort gegebenen Beweise in Kraft. Nur an Stelle des in den beiden letzteren Sätzen vorkommenden Ausdruckes „Convergenzintervall“ einer Potenzreihe mit einer Veränderlichen ist „Convergenzkreis“ zu setzen.

VI. Abschnitt.

ɔnzen mit complexen Exponenten und complexe Logarithmen.

1.[1]) Die natürliche Potenz.

ir legen uns nun die Aufgabe vor, eine Function ɔr complexen Veränderlichen x zu ermitteln, e bei beliebigen x und y der Functionalung

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y) \tag{1}$$

ıfserdem der Bedingung

$$f(1) = a, \tag{2}$$

ɔine gegebene von Null verschiedene Zahl ist, t. Nimmt man den Begriff „Function" im weitesten III. 5), so ist es leicht, Functionen von den verlangten ɔhaften aufzustellen. Bringen wir a in die trigonohe Form

$$a = \mathsf{A}(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

zeichnen mit b eine beliebige, von Null verschiedene nte, in trigonometrischer Form

$$b = \mathsf{B}(\cos\beta + i \sin\beta);$$

pricht den obigen Forderungen eine jede Function

$$f(x) = \mathsf{A}^{\xi}(\cos\xi\alpha + i \sin\xi\alpha) \times$$
$$\mathsf{B}^{\eta}(\cos\eta\beta + i \sin\eta\beta) = a^{\xi} \cdot b^{\eta}. \tag{3}$$

That hat man, unter $a^{\xi}\ b^{\eta}$ die hier angeschriebenen, ig definirten Exponentialfunctionen verstehend, für

$+ \eta' i$

$= a^{\xi} \cdot b^{\eta'}$ $\quad f(x) \cdot f(y) = a^{\xi+\xi'} \cdot b^{\eta+\eta'} = f(x + y).$

Es ist jedoch, wenn b nicht in einer bestimmten Beziehung zu a steht, diese Function von x keine analytische und daher für uns von keiner Bedeutung. Indem wir nunmehr zu den Bedingungen (1) (2) noch als dritte fügen, dafs $f(x)$ eine analytische Function von x sein soll, versuchen wir, ob in die Gleichung (1) für $f(x)$ eine convergente unendliche Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

gesetzt werden könne. Bei dieser Fragestellung kommen wir auf die Entwickelung in XI. 1 d. I. T. zurück, welche hier Wort für Wort zu wiederholen ist. Somit gelangen wir zu folgendem Ergebnisse: „Der Gleichung (1) genügt identisch die beständig convergente Potenzreihe

$$f(x) = 1 + a_1 x + \cdots + \frac{a_1^n x^n}{n!} + \cdots, \qquad (4)$$

worin a_1 eine im Allgemeinen von Null verschiedene, sonst beliebige Constante bezeichnet.“ Es frägt sich also nur noch, ob es solche Werthe a_1 giebt, dafs

$$a = 1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \cdots + \frac{a_1^n}{n!} + \cdots \qquad (5)$$

ist. Das trifft sicher zu, wenn wir a durch die Basis der natürlichen Logarithmen

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

ersetzen; denn in diesem Falle wird die Gleichung (5) durch die Annahme $a_1 = 1$ befriedigt. So stofsen wir zunächst auf die natürliche Potenz oder die Exponentialfunction

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

welche für reelle Werthe von x mit der im I. T. definirten Potenz e^x übereinstimmt. Die vorgelegte Aufgabe hat aber, auch im Falle dafs $a = e$ ist, wie wir sehen werden, unendlich viele Lösungen, welche zusammen die allgemeine oder künstliche Potenz von e bilden. Wenn wir vorläufig für die letztere Function die Bezeichnung e^x verwenden, so

sen wir die erstere d. i. die Exponentialreihe mit einem nderen Zeichen versehen. Setzt man

$$E(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \tag{6}$$

iat man demnach neben $E(1) = e$

$$E(x) \,.\, E(y) = E(x + y). \tag{7}$$

Aus der letzten Gleichung folgt die Entwickelung von $: + y)$ nach Potenzen von y und damit die Formel

$$D_x E(x) = E(x).$$

Um unsere Aufgabe vollständig zu lösen, haben wir h zu zeigen, dafs die Gleichung (5), wenn nur a nicht ll ist, stets Wurzeln hat und zwar unbegrenzt viele.

2. Die Cosinus- und die Sinusreihe.

Ersetzt man in (6) x durch xi, so findet man die lation

$$E(xi) = C(x) + i\,S(x),$$

an $C(x)$ $S(x)$ die beständig convergenten Potenzien

$$\begin{aligned} C(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\ S(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

enten. $C(x)$ ist eine gerade, $S(x)$ eine ungerade nction von x, d. h. es ist

$$\begin{aligned} C(-x) &= \quad C(x) \\ S(-x) &= -\,S(x). \end{aligned}$$

mithin

$$E(-xi) = C(x) - iS(x)$$

und nach (7)

$$E(x) \,.\, E(-xi) = 1$$

, so folgt die Relation

$$1 = C(x)^2 + S(x)^2. \tag{9}$$

Ersetzen wir hier x durch die reelle Veränderliche ξ, hat man

$$E(\xi i) = C(\xi) + iS(\xi). \tag{10}$$

Wird $E(\xi i)$ als complexe Function der reellen Veränderlichen ξ mit $\varphi(\xi)$ bezeichnet, so besteht nach (7) offenbar die Relation

$$\varphi(\xi) \cdot \varphi(\eta) = \varphi(\xi + \eta),$$

worin $\xi\ \eta$ beliebige reelle Zahlen sein dürfen. Da $\varphi(\xi)$ eine eindeutige und stetige Function für alle endlichen Werthe von ξ ist, so müssen wir nunmehr nach II. 19 schliefsen, dafs

$$E(\xi i) = \varphi(\xi) = R^{\xi}(\cos \xi\theta + i \sin \xi\theta) \qquad (10^*)$$

ist, wo $R\ \theta$ die Polarcoordinaten der Zahl $\varphi(1)$ bedeuten, so dafs man hat

$$\varphi(1) = E(i) = R(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Aus (9) erhält man für $x = 1$

$$R^2 = C(1)^2 + S(1)^2 = 1;$$

demnach ist $R = 1$. Durch Vergleichung von (10) und (10^*) findet man die Gleichungen

$$C(\xi) = \cos \theta\xi \qquad S(\xi) = \sin \theta\xi.$$

Aus der zweiten ergiebt sich die Gleichung

$$1 - \frac{\xi^2}{3!} + \frac{\xi^4}{5!} - \cdots = \theta \cdot \frac{\sin \theta\xi}{\theta\xi},$$

woraus bei $\lim \xi = 0$ gemäfs der Formel

$$\lim_{\tau=0} \frac{\sin \tau}{\tau} = 1$$

(II. 11) die Relation $1 = \theta$ gefunden wird. Also hat man

$$C(\xi) = \cos \xi \qquad S(\xi) = \sin \xi.$$

Wir sind demnach zu dem Satze gelangt: Für reelle Werthe von x stellen die beständig convergenten Reihen (8) die Functionen $\cos x$ und $\sin x$ dar. Es liegt defshalb nahe, die Summen der genannten Reihen auch für nichtreelle Werthe von x mit $\cos x$ und $\sin x$ zu bezeichnen, welche Zeichen fortan an Stelle von $C(x)\ S(x)$ treten werden. Wir definiren mithin die Functionen Cosinus und Sinus für beliebige Werthe von x durch die Gleichungen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Mittelst derselben ergiebt sich der folgende Ausdruck für die Exponentialfunction

$$E(xi) = \cos x + i \sin x. \tag{11}$$

Umgekehrt läfst sich der Richtungsfactor einer complexen Zahl d. i. der Ausdruck

$$\cos\theta + i \sin\theta$$

(vgl. II. 11) durch $E(\theta i)$ darstellen. Fügt man zur letzten Gleichung die folgende

$$E(-xi) = \cos x - i \sin x, \tag{12}$$

so erhält man die Formeln

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{E(xi) + E(-xi)}{2} \\ \sin x &= \frac{E(xi) - E(-xi)}{2i}. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Formel (9) erscheint jetzt in der Gestalt

$$\cos x^2 + \sin x^2 = 1. \tag{14}$$

Jede der Functionen $\cos x$ $\sin x$ hat sowie $E(x)$ ein Additionstheorem d. h. es besteht eine algebraische Gleichung zwischen den Functionswerthen zu den Argumenten x, y, $x + y$. Setzt man in (7) statt x y zuerst $xi \pm yi$, hierauf $-xi \mp yi$, so findet man mit Rücksicht auf (11) und (12) die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\cos(x \pm y) + i \sin(x \pm y) \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y \pm i \sin y) \\ &\cos(x \pm y) - i \sin(x \pm y) \\ &= (\cos x - i \sin x)(\cos y \mp i \sin y). \end{aligned}$$

Addirt und subtrahirt man sie, so gelangt man zu den Formeln

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \end{aligned} \tag{15}$$

welche für reelle Werthe von x y in II. 11 gezeigt wurden. Aus ihnen folgen die Additionstheoreme mit Hilfe der Relation (14). So hat man z. B. für den Cosinus

$$\begin{aligned} &\{\cos(x + y) - \cos x \cos y\}^2 \\ &= (1 - \cos x^2)(1 - \cos y^2) \\ &\quad 1 - \cos x^2 - \cos y^2 - \cos(x + y)^2 \\ &+ 2 \cos x \cos y \cos(x + y) = 0. \end{aligned}$$

Die Formeln (15) lehren, dafs $\cos x$ und $\sin x$ periodische Functionen mit der Periode 2π sind. Setzt man darin $x = 2\pi$, so findet man wegen

$$\cos 2\pi = 1 \qquad \sin 2\pi = 0$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Eben dieselben Formeln zeigen, dafs aber

$$\cos(x + \pi) = -\cos x \qquad \sin(x + \pi) = -\sin x$$

ist.

Es bestehen endlich nach V. 11 die Formeln

$$D_x \cos x = -\sin x \qquad D_x \sin x = \cos x.$$

Die übrigen trigonometrischen Functionen werden auch für nicht-reelle Werthe von x durch die Formeln

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

definirt. Daraus lassen sich ihre Eigenschaften ohne Mühe ableiten z. B. die Additionstheoreme

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tang y}$$

u. s. w.

Hinsichtlich der Potenzreihen für diese Functionen vgl. VII. 9. 11.

Die Functionen $\cos(xi)$, $\sin(xi) : i$, $\tan(xi) : i$ u. s. w. werden gewöhnlich als hyperbolischer Cosinus, Sinus, Tangente u. s. w. bezeichnet. Es ist demnach

$$\cos h \,.\, x = \cos xi = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin h \,.\, x = \frac{\sin xi}{i} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cos h \,.\, x^2 - \sin h \,.\, x^2 = 1$$

$$\cos h \,.\, (x \pm y) = \cos h \,.\, x \cos h \,.\, y \pm \sin h \,.\, x \sin h \,.\, y$$

$$\sin h \,.\, (x \pm y) = \sin h \,.\, x \cos h \,.\, y \pm \cos h \,.\, x \sin h \,.\, y.$$

Rein analytisch werden die Functionen $\cos x$ $\sin x$ offenbar durch die folgenden Forderungen definirt. Sie sollen 1) analytische Functionen von x sein, 2) die obigen Additionstheoreme (15) besitzen und 3) soll $\lim(\sin x : x)$ bei $\lim x = 0$ gleich 1 sein.

Mit Hilfe der Formeln (7) und (11) erkennt man, dafs die Function $E(x)$ bei $\lim x = \infty$ keinen Grenzwerth hat, was nach der

unctionentheorie von jeder beständig convergenten Potenzreihe gilt. lan hat nämlich

$$E[\tau\ (\cos\alpha + i\sin\alpha)] = e^{\tau\cos\alpha}\quad \{\cos(\tau\sin\alpha) + i\sin(\tau\sin\alpha)\}.$$

ückt nun x, indem τ von Null ins Unendliche wächst, auf dem lalbstrahle

$$x = \tau\ (\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

is Unendliche, so hat man

$$\lim_{\tau=+\infty} E[\tau(\cos\alpha + i\sin\alpha)] = \infty \text{ oder } 0,$$

nachdem $\cos\alpha$ positiv oder negativ ist. Auf den beiden Seiten der naginären Axe d. i. für $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$ hat die in Rede stehende Funcon, welche nun in

$$\cos\tau \pm i\sin\tau$$

bergeht, bei $\lim\tau = +\infty$ keinen Grenzwerth. — Auch die Funconen $\cos x$ und $\sin x$ haben bei $\lim x = \infty$ keinen Grenzwerth, denn as gilt schon auf jeder der reellen Halbaxen. Uebrigens ist sowohl ei $\lim\eta = +\infty$ als auch bei $\lim\eta = -\infty$

$$\lim\cos(\xi + \eta i) = \infty \quad \text{und} \quad \lim\sin(\xi + \eta i) = \infty$$

nd zwar in der Art, dafs

$$1 : \cos(\xi + \eta i) \quad \text{und} \quad 1 : \sin(\xi + \eta i)$$

bei gleichmäfsig für alle Werthe von ξ von $-\infty$ bis $+\infty$ zur ull convergirt. Denn es ist, je nachdem η positiv oder negativ ist,

$$|\cos(\xi + \eta i)| \geqq \pm\tfrac{1}{2}(e^{\eta} - e^{-\eta})$$

s. w.

3. Der natürliche Logarithmus.

Betrachten wir zunächst die Gleichung

$$E(x) = 1.$$

hat die unendlich vielen Wurzeln $x = 2k\pi i$, wo k jede anze Zahl sein darf, und nur diese. Reell ist darunter nur Wurzel $x = 0$. Setzt man nämlich darin

$$x = \xi + \eta i,$$

zerfällt sie nach (7) und (11) in die Gleichungen

$$E(\xi)\cos\eta = 1 \qquad E(\xi)\sin\eta = 0,$$

oraus sich ergiebt: $\eta = 2k\pi$ und $E(\xi) = 1$, also $\xi = 0$. a mithin

$$E(2k\pi i) = 1 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots)$$

t, so zeigt die Formel (7), dafs

$$E(x + k\,.\,2\pi i) = E(x) \tag{16}$$

ist. Die Function $E(x)$ ist periodisch und zwar ist die Periode genau $2\pi i$. Daraus folgt unmittelbar, dafs $E(x)$ keine algebraische Function sein kann. Denn würde sie einer algebraischen Gleichung $G(xy) = 0$ genügen, so könnten zum Werthe $y = 1$ nur eine endliche Anzahl von Werthen des Argumentes gehören.

Wir wenden uns nun zur Gleichung (5) d. i.

$$E(x) = a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha), \tag{17}$$

wo a eine beliebige Zahl, nur nicht Null sein darf. Diese Gleichung hat eine und nur eine Wurzel $x = \xi + \eta i$, deren imaginärer Theil die Relationen

$$-\pi < \eta \leqq \pi$$

erfüllt. Aus ihr gehen zunächst vermöge (7) und (11) die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} E(\xi)\,.\cos\eta &= A\cos\alpha \\ E(\xi)\,.\sin\eta &= A\sin\alpha \end{aligned} \tag{18}$$

hervor. Daraus folgt

$$E(2\xi) = A^2 \qquad E(\xi) = A \qquad \xi = lA,$$

somit ferner

$$\cos\eta = \cos\alpha \qquad \sin\eta = \sin\alpha;$$

also hat man $\eta = \alpha$ und nur gleich α, wenn α so gewählt ist, dafs

$$-\pi < \alpha \leqq \pi$$

ist. Die Gleichung (17) hat demnach die Wurzel

$$x = lA + \alpha i. \tag{1}$$

Somit genügen ihr zufolge der Formel (16) auch die Wert

$$x = lA + (\alpha + 2\pi k)i \qquad (k = \pm 1, \pm 2\ldots).$$

Aufser den genannten giebt es keine Wurzeln von (17) mel Denn sind x' x'' zwei Wurzeln von (17), so dafs

$$E(x') = a \qquad E(x'') = a$$

ist, so hat man nach (7)

$$E(x'' - x') = 1,$$

also mufs $x'' - x'$ ein Vielfaches von $2\pi i$ sein.

Jede Wurzel der Gleichung $E(x) = a$ heifst ein natürlicher Logarithmus von a und wird mit La bezeichn

er den unbegrenzt vielen Werthen von La befindet sich r (19), dessen imaginärer Theil einen zwischen $-\pi$ und π ($+\pi$ eingeschlossen) gelegenen Coefficienten hat. Er st der Hauptwerth des natürlichen Logarithmus von a wird mit la bezeichnet. Die übrigen Werthe des Logamus von a unterscheiden sich von ihm durch Vielfache $2\pi i$:

$$La = la + 2k\pi i \qquad (k = \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

a reell und positiv, so ist der Hauptwerth von La der le natürliche Logarithmus von a. Die Logarithmen aller eren Zahlen sind nicht-reell. Für negative Zahlen $-a$ > 0) hat man

$$l(-a) = la + \pi i$$
$$L(-a) = la + (2k+1)\pi i.$$

d x auf eine einfache den Nullpunkt umgebende Linie hränkt, so ist lx zwar in allen ihren Punkten eindeutig nirt, jedoch in den Schnittpunkten der Linie mit der ativen reellen Halbaxe unstetig.

Die Gleichung

$$E(x) = 0$$

keine Wurzel. Nach (18) müfste

$$E(\xi) \cdot \cos\eta = 0 \qquad E(\xi) \cdot \sin\eta = 0,$$

$E(\xi) = 0$ sein, welcher Gleichung keine reelle Zahl ξ igt.

Bei theoretischen Untersuchungen werden ausschliefslich natürlichen Logarithmen gebraucht, so dafs wir uns hier sie beschränken können. Von den in VIII. 10 d. I. T. eführten Relationen liefern die erste und zweite vollkome Gleichungen:

1) „Die Summe von Logarithmen der Zahlen $b_1\, b_2 \ldots b_p$ stets ein Logarithmus ihres Productes und umgekehrt t sich ein jeder Logarithmus des Productes $b_1\, b_2 \ldots b_p$ Summe von Logarithmen der Factoren darstellen.“ Satz gilt jedoch nicht immer von den Hauptwerthen. B. ist

$$a = \alpha + \beta i \quad \text{und} \quad \alpha \geq 0,$$

so hat man

$$l(-a) = la - \pi i \quad \text{oder} \quad la + \pi i,$$

je nachdem β positiv oder negativ ist. — Sind die Neigungen von $b_1\, b_2$ beide gröfser als $\frac{1}{2}\pi$ oder kleiner als $-\frac{1}{2}\pi$, so ist der Hauptwerth von $L(b_1\, b_2)$

$$lb_1 + lb_2 \mp 2\pi i.$$

2) „Die Differenz $lb - lc$ ist ein Logarithmus von $b:c$ und umgekehrt läfst sich ein jeder Logarithmus von $b:c$ als eine solche Differenz darstellen.“

4. Die allgemeine Potenz.

Den in Nr. 1 aufgestellten Forderungen genügt jede Function $E(xLa)$, wo La irgend einen fest gewählten natürlichen Logarithmus von a bedeutet und nur eine von diesen Functionen. Die zu einem bestimmten Werthe von x gehörigen Werthe der Functionen $E(xLa)$ bilden die allgemeine Potenz a^x, sodafs

$$a^x = E(xLa) = E(xla) \,.\, E(2kxi)$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

ist. Insbesondere hat man wegen $le = 1$

$$e^x = E(xLe) = E(x) \,.\, E(2k\pi xi).$$

$E(xla)$ heifst Hauptwerth der Potenz a^x. Statt für ihn eine eigene Bezeichnung einzuführen, wollen wir unter a^x, wenn nicht etwas anderes festgesetzt wird, gerade den Hauptwerth dieser Potenz verstehen. Es bedeutet mithin a^x bei reellem und positivem a und reellem x den absoluten Betrag aller Werthe der allgemeinen Potenz a^x, also dasselbe wie im I. T. e^x ist fortan gleichbedeutend mit $E(x)$, also $e^{\theta i}$ so viel wie

$$\cos\theta + i \sin\theta.$$

0_x ist 0 oder ∞, je nachdem der reelle Theil von x positiv oder negativ ist. $0^{\eta i}$ bleibt unbestimmt.

Setzt man

$$x = \xi + \eta i \qquad a = A(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$
$$La = lA + \alpha' i,$$

α' an Stelle von $\alpha + 2k\pi$ steht, so hat man

$$xLa = \xi lA - \eta\alpha' + (\xi\alpha' + \eta lA)i,$$

o für die allgemeine Potenz

$= A^{\xi}(\cos\xi\alpha' + i\sin\xi\alpha').\, e^{-\eta\alpha'}(\cos\eta lA + i\sin\eta lA).$

raus ist zu entnehmen, dafs von den in der Formel (3) n Nr. 1 vorkommenden unbestimmten Constanten B einen r Werthe $e^{-\eta(\alpha+2k\pi)}$, β den Werth lA erhalten mufs, dat die Function $a^{\xi}.b^{\eta}$ von ξ η eine analytische Function n $x = \xi + \eta i$ werde.

Sätze über die allgemeine Potenz. Für einen Augenick verstehen wir unter a^x, a^y u. s. w. irgend einen der Werthe r bezüglichen Potenz. Im Anschlusse an die vor. Nr. berken wir zunächst, dafs xLa stets ein Logarithmus nes Werthes von a^x ist, aber nicht umgekehrt jer Logarithmus eines solchen Werthes auf die Form La gebracht werden kann. Die Gleichung

$$La^x = xLa$$

also nicht vollkommen (II. 18). Man hat ja

$$La^x = xLa + 2m\pi i \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

1) $a^x.a^y$ ist im Allgemeinen nur dann ein Werth von $+y$, wenn a^x und a^y durch denselben Logarithmus von a finirt sind; a^{x+y} läfst sich dagegen stets als Product eines erthes von a^x mit einem Werthe von a^y auffassen. Die leichungen

$$a^x.a^y = a^{x+y} \qquad a^x : a^y = a^{x-y} \qquad (a)$$

nd nicht vollkommen.

2) Auch die Gleichung

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad (b)$$

t unvollkommen. $(a^x)^y$ braucht kein Werth von a^{xy} sein; dagegen läfst sich jeder Werth von a^{xy} sowohl als erth von $(a^x)^y$ als auch von $(a^y)^x$ auffassen.

3) Die Gleichung

$$a^x.b^x = (ab)^x. \qquad (c)$$

t vollkommen.

Wichtig für die Praxis ist die Regel: Werden Haupterthe von Potenzen derselben Basis a multiplicirt

oder dividirt, so entstehen wieder Hauptwerthe. Jede ganze Potenz eines Hauptwerthes ist auch ein Hauptwerth, d. h. es sind die Gleichungen (a) richtig, wenn die Hauptwerthe der drei Potenzen eingesetzt werden. Bei ganzzahligem y ist (b) richtig, wenn beiderseits die Hauptwerthe der bez. Potenzen stehen. — Dagegen ist, wenn a^x, b^x Hauptwerthe sind, $a^x \cdot b^x$ nicht immer Hauptwerth von $(ab)^x$, $a^x : b^x$ nicht immer von $(a : b)^x$. Z. B. es ist in Hauptwerthen

$$(1 : a)^x = 1 : a^x,$$

ausgenommen wenn a reell und negativ ist.

Die Gleichung

$$a^x = b,$$

worin a von Null und 1, b von Null verschieden sein soll, hat die Wurzeln

$$x = Lb : La.$$

Die Gleichung

$$x^a = b$$

hat die Wurzeln

$$x = E\left(\frac{Lb}{a}\right).$$

5. Die binomische und die logarithmische Reihe.[2])

Wir gehen nun zu der zuerst von Abel vollständig gelösten Aufgabe über: „den Grenzwerth der unendlichen Reihe

$$s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \cdots + s_n x^n + \cdots, \qquad (1)$$

worin

$$s_0 = 1 \quad s_n = \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} \quad (n = 1, 2 \ldots)$$

ist (unter s irgend eine von Null verschiedene Zahl $\mu + \nu i$ verstanden) zu bestimmen für jeden Werth von x, wofür sie convergirt.“ Statt s_n schreibt man auch $\binom{s}{n}$.

Die Entscheidung über das Verhalten der, wenn s nicht eine natürliche Zahl ist, unendlichen Potenzreihe (1) liefert der Satz von Weierstrafs in V. 8, zu dessen Beweise wir übrigens der Kenntnifs ihrer Divergenz im Falle dafs

$$x = -1 \qquad \mu \leqq 0$$

ist, bedurften. Da nämlich

$$\frac{(-1)^{n+1}\, s_{n+1}}{(-1)^n\, s_n} = 1 - \frac{s+1}{n} = 1 - \frac{(\mu+1)+\nu i}{n}$$

st, so ergiebt sich nach diesem Satze Folgendes.

„Der Convergenzkreis der binomischen Reihe hat den Radius 1. Auf dem Kreise selbst zeigt die Reihe nachstehendes Verhalten.

I. Ist $\mu < -1$, so ist

$$\lim |s_n| \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty$$

unendlich. Die Reihe divergirt für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag 1 ist.

II. Ist $\mu = -1$ und $\nu \gtrless 0$, so hat $|s_n|$ einen endlichen von Null verschiedenen Grenzwerth bei

$$\lim n = +\infty,$$

$(-1)^n s_n$ selbst aber keinen.

Ist $\mu = -1 \quad \nu = 0$, so hat man $s_n = (-1)^n$.

Die Reihe divergirt für alle x vom absoluten Betrag 1.

III. Ist $\mu > -1$, so ist $\lim s_n = 0$.

1) Ist $0 \geqq \mu > -1$, so convergirt die Reihe (1) für alle x vom absoluten Betrag 1 aufser $x = -1$. Falls $x = -1$ ist, die Reihe (1) also divergirt, so liegen ihre Partialsummen dem absoluten Betrage nach dann und nur dann unter einer positiven Zahl, wenn $\mu = 0 \quad \nu \lesseqgtr 0$ ist.

2) Ist $\mu > 0$, so convergirt die Reihe (1) für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag 1 ist, und zwar absolut."

Nachdem das Verhalten der binomischen Reihe festgestellt ist, können wir obige Aufgabe lösen mit Hilfe des Satzes am Anfange von Nr. 4.

Satz. Für diejenigen Werthe von x, wofür die binomische Reihe (1) convergirt, ist ihr Grenzwerth der Hauptwerth der Potenz

$$(1+x)^s \quad \text{d. i.} \quad E[sl(1+x)].$$

Hieran schliefst sich unmittelbar der Satz: Für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag 1 nicht über-

steigt, aufser $x = -1$, convergirt die unendliche Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots \qquad (2)$$

und hat zum Grenzwerthe den Hauptwerth von $L(1+x)$

$$l(1+x),$$

welcher bei der angegebenen Beschränkung von x die Eigenschaft hat, dafs der Coefficient von i zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt.

Der Beweis des ersteren Satzes wird ganz ähnlich geführt, wie der des entsprechenden Satzes für reelle x in XI. 2 d. I. T. Falls die Reihe (1) convergirt, werde ihr Grenzwerth mit $\varphi(s, x)$ bezeichnet. Man hat dann

$$\varphi(s, x)\, \varphi(s', x) = \varphi(s + s', x)$$

unter der Voraussetzung, dafs die Reihe (1) sowie die beiden aus ihr dadurch hervorgehenden, dafs s durch s' und $s+s'$ ersetzt wird, convergiren. Diese Gleichung folgt aus dem Additionstheoreme der Binominalcoefficienten d. i. der Formel

$$\sum_0^n s_r\, s'_{n-r} = \binom{s+s'}{n}.$$

Ertheilt man x irgend einen Werth, dessen absoluter Betrag kleiner als 1 ist, so läfst sich $\varphi(s, x)$ in eine beständig convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von s verwandeln, was vermittelst des am Schlusse von V. 3 erwähnten Cauchy'schen Satzes genau so gezeigt wird, wie es für reelle Werthe von x und s in XI. 5 d. I. T. gemacht ist. Mithin hat man

$$\varphi(s, x) = 1 + X_1 s + X_2 s^2 + \cdots, \qquad (|x| < 1) \qquad (3)$$

wo

$$X_1 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

ist. Also mufs nach Nr. 4 $\varphi(s, x)$ ein Werth der Potenz

$$\varphi(1, x)^s = (1+x)^s$$

sein. Setzen wir

$$\varphi(s, x) = E[sL(1+x)]$$
$$= 1 + sL(1+x) + \frac{s^2 L(1+x)^2}{2!} + \cdots, \qquad (4)$$

ergiebt sich durch Vergleichung mit (3) für den noch
ht näher bekannten Logarithmus $L(1+x)$

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad |x| < 1.$$

ssen wir nun x' einen von -1 verschiedenen Punkt des
eises $(O, 1)$ sein, wofür die Reihe (1) convergirt und x
f dem Radius Ox' gegen x' convergiren, so haben nach
9 $\varphi(s, x)\ L(1+x)$ bez. die Grenzwerthe

$$\varphi(s, x') \quad L(1+x').$$

besteht demnach die Gleichung (4) auch für $x = x'$.
nvergirt x' auf der reellen Axe gegen -1, so hat $L(1+x)$
n Grenzwerth $-\infty$, folglich, wenn der reelle Theil von
ositiv ist, $E[sL(1+x)]$ den Grenzwerth Null. Jetzt con-
rgirt die Reihe (1) auch für $x = -1$, $\varphi(s, x)$ hat also
ch einen endlichen Grenzwerth bei $\lim x = 1 - 0$. So-
t gilt (4) auch für $x = -1$, wenn $\mu > 0$ ist.

Dafs $L(1+x)$ der Hauptwerth des Logarithmus von
$+x$ ist, ergiebt sich auf folgende Art. Wenn wir x auf
e reellen Werthe, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist,
schränken, so ist $L(1+x)$ reell, also Hauptwerth. Da
$(1+x)$ auf dem Kreise (O, ϱ), wo $\varrho < 1$ ist, sich stetig
t der Neigung θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ des Argumentes x ändert,
mufs bei gehöriger Kleinheit von θ $L(1+x)$ noch im-
er der Hauptwerth sein. Bezeichnen wir nun mit θ' eine
sitive reelle Veränderliche von der Beschaffenheit, dafs
enn $\theta < \theta'$ ist, $L(1+x)$ auf dem Kreise (O, ϱ) mit $l(1+x)$
ereinstimmt. Wenn die Gleichung

$$L(1+x) = l(1+x) \qquad (4^*)$$

cht in allen Punkten des genannten Kreises gelten würde,
müfste θ' eine obere Grenze $\lambda < 2\pi$ haben. Für jeden
erth

$$x = \varrho(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$

$\theta_1 < \lambda$ ist, mufs $L(1+x)$ noch Hauptwerth sein, indem
Werthe gröfser als $\lambda - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, also auch solche gröfser
θ_1 annimmt. Für

$$x = \varrho\,(\cos\lambda + i\sin\lambda)$$

nnte $L(1+x)$ nicht mehr Hauptwerth sein, da sonst die

obere Grenze von θ' gröfser als λ sein müfste. Demnach würde die zweite Coordinate bei

$$\lim \theta = \lambda - 0$$

einen Sprung, mindestens vom Betrage 2π, machen, was gegen die Stetigkeit von $L(1+x)$ auch bei

$$x = \varrho\,(\cos\lambda + i\sin\lambda)$$

verstofsen würde. Also mufs die Gleichung (4*) für alle Punkte des Kreises (O, ϱ) bestehen. Dafs $L(1+x)$ auch für die Punkte $x = x'$ $(|x'| = 1)$ aufser $x = -1$ Hauptwerth ist, ergiebt sich daraus, dafs $L(1+x')$ der Grenzwerth von $l(1+x)$ ist, wenn x auf dem Radius Ox' gegen x' convergirt. — Setzt man

$$x = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad 1 + x = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi),$$

so dafs

$$\sigma\cos\psi = 1 + \varrho\cos\theta \qquad \sigma\sin\psi = \varrho\sin\theta$$

ist, so erweist sich bei Ausschlufs des Werthes $x = -1$ $\cos\psi$ als positiv, folglich liegt ψ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Es ist demnach

$$\sigma = (1 + 2\varrho\cos\theta + \varrho^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \psi = \arctan\frac{\varrho\sin\theta}{1+\varrho\cos\theta} \qquad (5)$$

$$l(1+x) = l\sigma + \psi i.$$

Setzt man in den Potenzreihen (1) und (2) statt x $x + h$ und ordnet nach Potenzen von h, so findet man leicht die Formeln

$$D_x\,(1+x)^s = s\,(1+x)^{s-1}$$

$$D_x\,l(1+x) = \frac{1}{1+x},$$

worin man sich zunächst $|x| < 1$ zu denken hat (vgl. V. 11).

6. Wird in die binomische und logarithmische Reihe

$$x = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$x^n = \varrho^n\{\cos n\theta + i\sin n\theta\}$$

eingeführt und sowohl ein jedes Glied der Reihe, als auch die Summe in den reellen und imaginären Theil zerlegt, so erhält man Entwickelungen für gewisse reelle Functionen von ϱ θ, welche nach ganzen positiven Potenzen von ϱ und nach den Cosinussen oder Sinussen der Vielfachen von θ fortschreiten. Dabei möge θ im Intervalle

$[(2m-1)\pi,\ (2m+1)\pi]\quad (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots)$

ewählt sein. Beschränken wir uns auf den Fall, dafs s ine reelle Zahl μ sei, so liefert die binomische Reihe die 'ormeln

$$\begin{aligned}(1+2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^{\frac{\mu}{2}}\cos\mu\left\{\operatorname{arc\,tan}\frac{\varrho\sin\theta}{1+\varrho\cos\theta}\right\}&=1+\sum_1^\infty{}_n\,\mu_n\varrho^n\cos n\theta\\ (1+2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^{\frac{\mu}{2}}\sin\mu\left\{\operatorname{arc\,tan}\frac{\varrho\sin\theta}{1+\varrho\cos\theta}\right\}&=\sum_1^\infty{}_n\,\mu_n\varrho^n\sin n\theta,\end{aligned}\qquad(6)$$

welche falls $\varrho>1$ ist, für jeden Werth von θ gelten. Ist $\varrho=1$, so sind die Formeln (6) sicher richtig, wenn die Binomialreihe convergirt. Demnach bestehen bei positivem μ für jeden der genannten Werthe von θ die Formeln

$$\begin{aligned}\left[2(-1)^m\cos\frac{\theta}{2}\right]^\mu\cos\mu\left(\frac{\theta}{2}-m\pi\right)&=1+\sum_1^\infty{}_n\,\mu_n\cos n\theta\\ \left[2(-1)^m\cos\frac{\theta}{2}\right]^\mu\sin\mu\left(\frac{\theta}{2}-m\pi\right)&=\sum_1^\infty{}_n\,\mu_n\sin n\theta.\end{aligned}\qquad(7)$$

[st $0>\mu>-1$, so gelten sie für alle Werthe von θ aufser $=(2m\pm 1)\pi$. Für $\theta=(2m\pm 1)\pi$ divergirt die Reihe echts in der ersten Formel; die in der zweiten convergirt war zum Grenzwerthe Null, aber es ist die linke Seite un-ndlich. Die zweite Reihe convergirt für die Werthe von θ n jedem Intervalle

$$[(2m\pm 1)\pi\mp\delta,\ (2m\pm 1)\pi]\quad(\delta>0)$$

ngleichmäfsig, da ihre Summe bei

$$\lim\theta=(2m\pm 1)\pi\mp 0$$

inen unendlichen Grenzwerth hat. Ist $\mu\leqq -1$, so haben ie Formeln (7) für keinen Werth von θ einen Sinn.

Aus (7) hat Abel[3]) Formeln abgeleitet, wovon die Formeln für os θ^m und sin θ^m in II. 13 besondere Fälle sind. Multiplicirt man ie erste der Gleichung (7) mit cos α, die zweite mit sin α und addirt, o erhält man

$$\left[2\,(-1)^m \cos\frac{\theta}{2}\right]^\mu \cos\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\mu\theta + \mu m\pi\right) = \sum_1^\infty{}_n\, \mu_n \cos(\alpha - n\theta).$$

Daraus ergeben sich die in Rede stehenden Formeln durch die Substitutionen

$$\left.\begin{array}{ll}\theta = 2\varphi & \alpha = \mu\varphi \\ \theta = 2\varphi & \alpha = \mu\varphi + \tfrac{1}{2}\pi\end{array}\right\} \quad \left(m\pi - \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq m\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\theta = 2\varphi - \pi & \alpha = \mu\varphi \\ \theta = 2\varphi - \pi & \alpha = \mu\varphi - \tfrac{1}{2}\pi\end{array}\right\} \quad (m\pi \leqq \theta \leqq m\pi + \pi).$$

Die Formeln (6) gehen für $\theta = \frac{\pi}{2}$ über in

$$(1+\varrho^2)^{\frac{\mu}{2}} \cos(\mu \operatorname{arc\,tan}\varrho) = 1 + \sum_1^\infty{}_k\, (-1)^k \binom{\mu}{2k} \varrho^{2k}$$

$$(1+\varrho^2)^{\frac{\mu}{2}} \sin(\mu \operatorname{arc\,tan}\varrho) = \sum_0^\infty{}_k\, (-1)^k \binom{\mu}{2k+1} \varrho^{2k+1}.$$

Sie stellen die Coordinaten des Hauptwerthes von $(1+\varrho i)^\mu$, der für $\mu = 1:m$ mit dem von $\sqrt[m]{1+\varrho i}$ zusammenfällt, als Potenzreihen von ϱ dar, wenn ϱ kleiner, bez. gleich 1 ist

Aus der logarithmischen Reihe erhält man auf ähnliche Art die Formeln

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} l(1 + 2\varrho\cos\theta + \varrho^2) &= \sum_1^\infty{}_n\, \frac{(-1)^{n-1}}{n} \varrho^n \cos n\theta \\ \operatorname{arc\,tan}\frac{\varrho\sin\theta}{1+\varrho\cos\theta} &= \sum_1^\infty{}_n\, \frac{(-1)^{n-1}}{n} \varrho^n \sin n\theta, \end{aligned} \tag{8}$$

giltig, falls $\varrho < 1$ ist, für jeden Werth von θ. Ist $\varrho = 1$, so bestehen sie für alle Werthe von θ aufser $\theta = (2m+1)\pi$. Man hat also, wenn $(2m-1)\pi < \theta < (2m+1)\pi$ ist,

$$l[2\,(-1)^m \cos\tfrac{1}{2}\theta] = \sum_1^\infty{}_n\, \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cos n\theta$$

$$\frac{\theta}{2} - m\pi = \sum_1^\infty{}_n\, \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n\theta.$$

Für $\theta = (2m \pm 1)\pi$ divergirt die Reihe in der ersten dieser Formeln, die in der zweiten convergirt zwar, aber zum Grenzwerthe Null, nicht $\pm\frac{\pi}{2}$. Daraus schliefst man, dafs die letztere Reihe für die Werthe von θ in jedem der Inter-

lle $[(2m \pm 1)\pi \mp \delta, (2m \pm 1)\pi]$ ungleichmäfsig con-rgire.

7. Der Arcus tangens.

Aus der Gleichung

$$x = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = i\,\frac{e^{-yi} - e^{yi}}{e^{-yi} + e^{yi}} = i\,\frac{1 - e^{2yi}}{1 + e^{2yi}}$$

lgt

$$\begin{gathered}(1 - xi)\,e^{2yi} = 1 + xi \\ y = \operatorname{Arc}\tan x = \tfrac{1}{2}\,iL\,\frac{1 - xi}{1 + xi}.\end{gathered} \tag{9}$$

nter den unbegrenzt vielen Werthen des Arcus tangens ilst **Hauptwerth** derjenige, dessen reelle Coordinate rischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, bezw. $-\frac{\pi}{2}$ ist. Er wird mit c tan bezeichnet, während Arc tan einen beliebigen Werth r Function bedeutet. Es ist mithin

$$\begin{gathered}\operatorname{Arc}\tan x = \arctan x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots) \\ \arctan x = \tfrac{1}{2}\,il\,\frac{1 - xi}{1 + xi}.\end{gathered} \tag{10}$$

lls der absolute Betrag von x 1 nicht übersteigt, so t man

$$\arctan x = \frac{i}{2}\,[l(1 - xi) - l(1 + xi)]$$

d wenn man $l(1 - xi)$ und $l(1 + xi)$ nach (2) in Reihen twickelt,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{11}$$

ie Potenzreihe in (11), welche für alle Werthe von x, ren absoluter Betrag 1 nicht übersteigt, ausge-mmen $x = \pm i$, convergirt, stellt den Hauptwerth c tan x dar, dessen reeller Theil bei der erwähnten schränkung von x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt.

In der Umgebung des Punktes $x = \infty$ hat man

$$\begin{aligned}\operatorname{Arc}\tan x &= \tfrac{1}{2}\,i\left[L(-1) + l\left(1 + \frac{i}{x}\right) - l\left(1 - \frac{i}{x}\right)\right] \\ &= (k - \tfrac{1}{2})\,\pi - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots \\ &\qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)\end{aligned}$$

und zwar für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag nicht kleiner als 1 ist, mit Ausschluſs von $x = \pm i$. Man setzt daher fest Arc tan $\infty = (k - \frac{1}{2})\pi$ und bezeichnet darunter $-\frac{1}{2}\pi$ als Hauptwerth arc tan ∞.

Je nachdem der reelle Theil von x positiv ist oder nicht, so ist

$$\text{arc tan } x + \text{arc tan } \frac{1}{x} = \tfrac{1}{2}\pi \text{ oder } -\tfrac{1}{2}\pi.$$

arc tan x ist eine ungerade (vgl. Nr. 2) Function von x; man hat jedoch bei reellem η auſser $\eta = \pm 1$

$$\text{arc tan } (\eta i) + \text{arc tan } (-\eta i) = -\pi.$$

Ist $x' = \tan y'$, so hat man nach Nr. 2

$$\tan (y + y') = \frac{x + x'}{1 - xx'}$$

d. i. Arc tan x + Arc tan $x' =$ Arc tan $\frac{x + x'}{1 - xx'}$,

welche Formel das Additionstheorem des Arcus tangens heiſst, natürlich nicht in dem Sinne wie dieses Wort in Nr. 2 gebraucht ist.

Die Reihe (11) giebt für $x = +1$ die Leibniz'sche Formel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

welche aber zur Berechnung von π sich nicht eignet. Hierzu benutzte man früher die Formel

$$\pi = 6 \text{ arc tan } \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{12}\left\{1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots\right\}.$$

Später wurde $\frac{\pi}{4}$ in zwei Bögen α β zerlegt, deren Tangenten durch die Relation

$$1 = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

verknüpft sein müssen. So findet man z. B. für tan $\alpha = \frac{1}{2}$, tan $\beta = \frac{1}{3}$, also $\frac{\pi}{4} =$ arc tan $\frac{1}{2}$ + arc tan $\frac{1}{3}$. Da ferner

$$\text{arc tan } \tfrac{1}{3} = \text{arc tan } \tfrac{1}{5} + \text{arc tan } \tfrac{1}{8}$$

ist, so hat man $\frac{\pi}{4}$ in drei Bögen zerlegt, deren Tangenten endliche Decimalbrüche sind. Hiernach berechnete Dahse 205 Stellen von π. Lehmann benutzte die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 2 \text{ arc tan } \tfrac{1}{3} + \text{arc tan } \tfrac{1}{7}$$

zur Berechnung von 261 Stellen von π.[4])

8. Der Arcus sinus.

Aus der Formel

$$x = \sin y = \frac{1}{2i}\{e^{yi} - e^{-yi}\}$$

folgt durch Multiplication mit $2ie^{yi}$ die Gleichung

$$e^{2yi} - 2xie^{yi} - 1 = 0. \qquad (12)$$

Daraus ergiebt sich

$$e^{yi} = xi \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$y = \text{Arc sin } x = \frac{1}{i} L(xi \pm \sqrt{1 - x^2}).$$

Somit gehören zu jedem Werthe von x, aufser $x = \pm 1$, zwei Schaaren von Werthen des Arcus sinus, welche aus den beiden Hauptwerthen, d. h. den den Hauptwerthen der Logarithmen von $xi \pm \sqrt{1 - x^2}$ entsprechenden Werthen durch Zufügung eines beliebigen positiven oder negativen Vielfachen von 2π hervorgehen. Die Werthe der einen Schaar haben den entgegengesetzten Cosinus wie die der andern. Man hat nämlich

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{xi \pm \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{xi \pm \sqrt{1 - x^2}}\right\} = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Die Hauptwerthe des Arcus sinus, die wir mit „arc sin" bezeichnen, haben einen reellen Theil, welcher zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, bezw. gleich π ist.

Satz. „Wenn man x einen Werth, dessen absoluter Betrag die Einheit nicht übersteigt, aufser $x = \pm 1$, ertheilt und unter $\sqrt{1 - x^2}$ den Hauptwerth dieser Quadratwurzel versteht, so liegt der reelle Theil des bez. Hauptwerthes des Arcus sinus

$$\text{arc sin } x = \frac{1}{i} l(xi + \sqrt{1 - x^2}) \qquad (13)$$

zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. arc sin (± 1) ist gleich $\pm\frac{\pi}{2}$."

Setzt man

$$x = \varrho\{\cos\theta + i\sin\theta\} \quad (-\pi < \theta \leq \pi)$$

$1 - x^2 = 1 - \varrho^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta) = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,
so hat man

$$A\cos\alpha = 1 - \varrho^2\cos 2\theta \qquad A\sin\alpha = -\varrho^2\sin 2\theta,$$

sodafs, wenn $\varrho \leqq 1$ ist und neben $\varrho = 1$ die Werthe $\theta = 0$ und π ausgeschlossen sind, $\cos\alpha > 0$, also α zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegen ist. Man findet dann

$$xi + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{A}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} - \varrho\sin\theta + (\sqrt{A}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + \varrho\cos\theta)\,i$$

und für die trigonometrische Form

$$B(\cos\beta + i\sin\beta)$$

dieser Zahl

$$B\cos\beta = \sqrt{A}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} - \varrho\sin\theta$$

$$B\sin\beta = \sqrt{A}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + \varrho\cos\theta.$$

Nun ist, falls $\varrho < 1$ ist,

$$A(1 + \cos\alpha) \geqq (1 - \varrho^2) + (1 - \varrho^2\cos 2\theta)$$

$$A\cos\frac{\alpha^2}{2} \geqq 1 - \varrho^2\cos\theta^2 > \varrho^2\sin\theta^2.$$

Falls $\varrho = 1$ ist, so hat man bei der obigen Beschränkung von θ

$$A(1 + \cos\alpha) > 1 - \cos 2\theta \quad A\cos\frac{\alpha^2}{2} > \sin\theta^2.$$

Daraus erhellt, dafs $\cos\beta > 0$ ist, also β zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt.

Man hat also für Hauptwerth (13) des Arc sin x

$$\arcsin x = \beta - il B.$$

Setzt man den zweiten Hauptwerth von Arc sin x

$$\frac{1}{i}\,l(xi - \sqrt{1 - x^2}) = \overline{\arcsin}\,x = \beta' - il B',$$

so ist, wie sich leicht nachweisen läfst,

$$BB' = 1 \quad \beta + \beta' = \pm\pi \quad \arcsin x + \overline{\arcsin}\,x = \pm\pi,$$

wo das obere oder untere Zeichen steht, je nachdem θ innerhalb oder aufserhalb des Intervalles $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ liegt. Für $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ ist $\beta = 0$ $\beta' = \pi$.

Additionstheorem des Arcus sinus. Ist $\sin y = x$ $y' = x'$, so hat man

$$\sin(y + y') = \sin y \cos y' + \cos y \sin y',$$

, da

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \cos y' = \sqrt{1 - x'^2}$$

wo aber die Quadratwurzeln noch näher zubestimmen sind,

$$\sin x + \text{Arc sin } x' = \text{Arc sin}(x\sqrt{1 - x'^2} + x'\sqrt{1 - x^2}).$$

9. Die Potenzreihe für den Arcus sinus.

Nach einem Satze in V. 21 giebt es eine und nur eine erhalb eines gewissen Kreises (O, R) convergente Potenzie

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots = f(x), \qquad \text{(a)}$$

che für y in die Gleichung

$$x = \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots \qquad \text{(b)}$$

tzt, sie identisch erfüllt. Da auf der rechten Seite dieser chung eine beständig convergente Potenzreihe von y t, so darf man nach V. 11 behaupten, dafs wenn x einen th innerhalb des Convergenzkreises der Reihe $\Sigma c_n x^n$ bezet, die Zahl $y = \Sigma c_n x^n$ eine Wurzel der Gleichung (b) D. h. für jeden der genannten Werthe von x stellt die nzreihe (a) einen Werth des Arcus sinus dar. — Durch setzung der Reihe (a) in (b) und Vergleichung der fficienten der nämlichen Potenzen von x auf beiden Seiten Gleichung findet man $c_1 = 1$ $c_2 = 0$ u. s. w. Ein indelenter Ausdruck für c_n ergiebt sich leichter auf folgende

Bedeutet x einen Werth innerhalb des Convergenziches der Reihe (a) und man setzt in (b) anstatt x y $x + h$ $f(x) + k$, wo

$$k = hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} + \cdots$$

so darf man auch die rechte Seite nach Potenzen von h ickeln. Setzt man die Coefficienten von h auf beiden n der so umgewandelten Gleichung (b) einander gleich, rhält man

$$1 = \cos f(x) \cdot f'(x).$$

Man hat nach (a)

$$\cos f(x) = 1 - \frac{f^2}{2!} + \frac{f^4}{4!} - \cdots = 1 - \frac{x^2}{2} - \cdots;$$

somit mufs $R = 1$ und $\cos f(x)$ für alle Werthe von $x: |x| < 1$ gleich dem Hauptwerthe von $\sqrt{1-x^2}$ d. i. der binomischen Reihe zu $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ sein. Demnach mufs

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + \cdots + nc_n x^{n-1} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_1^\infty \frac{1 \cdot 3 \cdots 2k-1}{2 \cdot 4 \cdots 2k} x^{2k}$$

sein, woraus sich unmittelbar die Werthe

$$c_{2k} = 0 \qquad c_{2k+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdots 2k-1}{2 \cdot 4 \cdots 2k} \cdot \frac{1}{2k+1} \qquad (k = 1, 2 \cdots)$$

ergeben. Da

$$\frac{c_{2k+1}}{c_{2k-1}} = \frac{(2k-1)^2}{2k\,(2k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{-1} = 1 - \frac{3}{2k} + \cdots$$

ist, so convergirt die Potenzreihe $\Sigma c_{2k+1} x^{2k+1}$ nach V. 8 für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag 1 nicht übersteigt, und zwar absolut.

Es ist leicht einzusehen, dafs der durch die Reihe (a) dargestellte Werth des Arcus sinus x der zum Hauptwerthe $\sqrt{1-x^2}$ gehörige Hauptwerth arc sin x ist. Die Reihe (a) giebt nicht allein für $x = 0$ den Werth $0 = \text{arc sin } 0$, sondern auch in einer gewissen Umgebung δ des Nullpunktes den Werth arc sin x. Denn wegen der Stetigkeit von arc sin x und von $f(x) = \Sigma c_n x^n$ für $x = 0$ kann man jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ so zuordnen, dafs

$$|f(x) - \text{arc sin } x| < \varepsilon$$

für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag δ nicht übersteigt. Nimmt man $\varepsilon < 2\pi$ an und bedenkt, dafs $f(x)$ ein Werth des Arcus sinus x ist, dessen Cosinus $\sqrt{1-x^2}$ ist, so folgt nothwendig

$$f(x) = \text{arc sin } x, \qquad (c)$$

Nun zeigt man, dafs $f(x)$ auf jedem Radius Or des Kreises $(O, 1)$ mit arc sin x übereinstimmt. Es sei x' ein solcher Punkt auf Or, dafs innerhalb der Strecke Ox' die Gleichung (c) besteht. $|Ox'|$ mufs eine obere Grenze λ haben. Wäre

1, so müfste in demjenigen Punkte auf Or, der von O Abstand λ hat, $f(x)$ von arc sin x abweichen, also der e Theil von $f(x)$ einen Sprung machen, was die Stetig- von $f(x)$ im genannten Punkte verhindert. Also mufs 1 sein. Wir haben somit den Satz:

Der zum Hauptwerthe $\sqrt{1-x^2}$ gehörige Haupt- th des Arcus sinus x: arc sin x wird für alle rthe x, deren absoluter Betrag 1 nicht übersteigt, ch die Potenzreihe

$$x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots \qquad (13^*)$$

gestellt. Demnach liegt der reelle Theil der nme dieser Reihe zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, ab- echnet $x = \pm 1$, wofür sie $\pm\frac{\pi}{2}$ ist.

Ein anderes Verfahren, zur Reihe (13*) zu gelangen, et man in Nr. 11.

Potenzreihen für einige zusammengesetzte Functionen.

Die in XI. 8 d. I. T. erzielten Ergebnisse können jetzt inzt und zugleich verallgemeinert werden.

a) Bezüglich der Entwickelung von

$$e^{f(x)} = E(f(x))$$

nur zu bemerken, dafs das a. a. O. Gesagte auch dann wenn x eine complexe Veränderliche und $f(x)$ eine end- e oder eine convergente unendliche Reihe mit beliebigen fficienten bedeutet.

Beispiele. 1) Der Hauptwerth von $\left(1+\frac{x}{t}\right)^t$ läfst sich für Werthe von t, deren absoluter Betrag den von x übersteigt, in nach fallenden Potenzen von t fortschreitende Reihe

$$e^x\left[1 - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{t} + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right)\frac{1}{t^2} + \cdots\right]$$

ickeln. Der Convergenzkreis dieser Reihe geht durch den Punkt $-x$, denn die in Rede stehende Function verliert in diesem Punkte Charakter einer ganzen Function, was man indirect beweist. Wäre alle Werte von x, wofür $|t+x|$ kleiner ist als eine gewisse tive Zahl,

$$\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = b_0 + b_1(t+x) + b_2(t+x)^2 + \cdots,$$

so hätte man für den Logarithmus dieser Function

$$t\,l\left(1+\frac{x}{t}\right) = m l(t+x) + c_0 + c_1(t+x) + \cdots,$$

wo m eine ganze positive Zahl oder Null sein kann. Man findet aber

$$\begin{aligned} t\,l\left(1+\frac{x}{t}\right) &= t\,\{L(t+x) - lt\} \\ &= t\left\{L(t+x) - l(-x) - l\left(1-\frac{t+x}{x}\right)\right\} \\ &= t\,L(t+x) + \mathfrak{P}(t+x). \end{aligned}$$

Aus dem Vorstehenden erkennt man, dafs die in II. 19 für den Fall, dafs t auf der positiven oder auf der negativen reellen Axe ins Unendliche geht, erwähnte Formel

$$\lim_{t=\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = e^x$$

stets gilt, auf welchem Wege der Punkt t auch ins Unendliche sich entfernen mag.

2) $e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}$ wird für alle Werthe von x, wofür $|x| < |a|$ ist, durch eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x dargestellt; denn es gilt das ja von der Function

$$-1 : (x-a)^2,$$

wofür man hat

$$-\frac{1}{(x-a)^2} = -\frac{1}{a^2}:\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 = -\frac{1}{a^2} - \frac{2x}{a^3} - \frac{3x^2}{a^4} - \cdots$$

Der Convergenzkreis der Potenzreihe, welche sich für $e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}$ ergiebt, geht durch den Punkt $x=a$, denn es ist für jedes von a verschiedene x

$$e^{-\frac{1}{(x-a)^2}} = 1 - \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{2!\,(x-a)^4} - \cdots$$

d. h. es verliert die Function im Punkte $x=a$ den Charakter einer ganzen.

b) „Ist a_0 eine von Null verschiedene Zahl, deren reeller Theil nicht negativ ist, so geht der Convergenzkreis der wie a. a. O. abzuleitenden Potenzreihe

$$lf(x) = la_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, \qquad (14)$$

wo $lf(x)$ und la_0 die Hauptwerthe der bez. Logarithmen bedeuten, durch den oder die dem Nullpunkte nächsten unter den Punkten innerhalb des Convergenzbereiches von

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

$f(x) = 0$ ist. Falls aber solche Punkte nicht vor-
sind, so reicht das Convergenzgebiet der Reihe (14)
stens soweit, als das der Reihe $f(x)$."

eweis. Aus dem Satze V. 10 folgt unmittelbar die
nz einer solchen positiven Zahl K, dafs für keinen
von x, wofür $|x| < K$ ist, $f(x)$ verschwindet. Da
oefficient von i in la_0 das Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$
verläfst, so wird man sich K auch so klein denken
n, dafs für die soeben genannten Werthe von x die
ung

$$= la_0 + l\left\{1 + \frac{f(x) - a_0}{a_0}\right\} = la_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

it. Schon a. a. O. ist hervorgehoben, dafs die Potenz-
auf der rechten Seite von (14) in jedem Punkte ihres
rgenzgebietes einen Logarithmus von $f(x)$ darstellt.
es stets der Hauptwerth desselben sein mufs, ergiebt
rie in Nr. 9 vermöge der Stetigkeit der Reihensumme
, dafs sie in einer gewissen Umgebung des Null-
es den Hauptwerth $lf(x)$ wiedergiebt. Um den Con-
rzradius der Potenzreihe in (14) zu ermitteln, hat man
ach V. 19 nur den oder die dem Nullpunkte nächsten
e aufzusuchen, wo die Function $lf(x)$ den Character
ganzen verliert. Ist x' ein solcher Punkt innerhalb
nvergenzgebietes von $f(x)$, dafs $f(x)$ nicht Null ist, so
$x)$ für $x = x'$ holomorph. Denn man hat für hinläng-
leine Werthe von $|x - x'|$

$$f(x) = f(x') + \mathfrak{P}(x - x')$$

$$lf(x) = lf(x') + l\left\{1 + \frac{\mathfrak{P}(x - x')}{f(x')}\right\} = \mathfrak{Q}(x - x').$$

in jedem Punkte $x = c$, wofür $f(x) = 0$ ist, verliert
den Character einer ganzen Function, wie schon dar-
rsichtlich ist, dafs

$$\lim_{x=c} f(x) = \infty$$

Aus dieser Bemerkung folgt dann der obige Satz.

Beispiele. 1) Die Function

$$\arcsin x = \frac{1}{i} l\left(x i + \sqrt{1 - x^2}\right),$$

worin man sich $\sqrt{1 - x^2}$ durch die betreffende binomische Reihe ersetzt denken mufs, liefert eine Potenzreihe mit dem Convergenzkreise $(O, 1)$. Denn die Gleichung

$$x i + \sqrt{1 - x^2} = 0$$

hat keine endliche Wurzel, also mufs die genannte Potenzreihe mindestens dasselbe Convergenzgebiet wie die binomische haben. Und zwar genau dasselbe, da die Function $\arcsin x$ in den Punkten $x = \pm 1$ den Character einer ganzen verliert, indem die Functionswerthe in ihrer Umgebung durch Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $\sqrt{x \pm 1}$ dargestellt werden.

2) Die in der ersten der Formeln (8) in Nr. 6 vorkommende Function

$$l(1 + 2x \cos\theta + x^2)$$

liefert die Potenzreihe

$$\sum_1^\infty {}_n (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} (2\cos\theta + x)^n \qquad (15)$$
$$= 2\cos\theta \,.\, x - (2\cos\theta^2 - 1)\, x^2 \cdots,$$

welche mit der rechten Seite dieser Formel identisch sein mufs, beide Reihen für reelle Werthe von x übereinstimmen. Der Convergenzradius der Reihe (15) ist 1, denn die Wurzeln der Gleichung

$$1 + 2x \cos\theta + x^2 = 0$$

sind

$$x = -\cos\theta \pm i \sin\theta.$$

Aber nicht nur die erste der Formeln (8), sondern auch die zweite gilt für alle complexen Werthe von ϱ, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist. Der zweite Theil dieser Behauptung folgt ähnlich wie der erste, wenn man nach (10) die Umformung

$$\arctan \frac{x \sin\theta}{1 + x \sin\theta} = \frac{1}{i} l \frac{1 + x e^{-\theta i}}{1 + x e^{\theta i}}$$

vornimmt. — Die Formeln gelten übrigens auch für alle Werthe x vom absoluten Betrage 1 aufser $x = -e^{\theta i}$ und $x = -e^{-\theta i}$; denn es convergiren die Reihen

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{(-1)^{n-1} x^n \cos n\theta}{n} \pm i \sum_1^\infty {}_n \frac{(-1)^{n-1} x^n \sin n\theta}{n}$$
$$= \sum_1^\infty {}_n \frac{(-1)^{n-1} \left\{x e^{\pm \theta i}\right\}^n}{n}$$

nach dem 2. Satze in Nr. 5 für alle die genannten Werthe von x, folg-

ich auch ihre Summe und Differenz d. i. die Reihen auf der rechten eite der Gleichungen (8).

c) Der allgemeine polynomische Satz. Der Hauptverth

$$f(x)^s = E(slf(x)),$$

vo s eine beliebige von Null verschiedene Zahl ist, läfst ich unter der obigen Voraussetzung über a_0, zum mindesten für alle diejenigen Werthe von x, wofür $lf(x)$ in eine Potenzreihe verwandelt werden kann, nach ganzen positiven Potenzen von x entwickeln.

Die Function

$$(1 + 2x\cos\theta + x^2)^s$$

iefert somit eine Potenzreihe für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag unter 1 liegt. — Da das Nämliche auch von den Functionen

$$\cos\left(s \arctan \frac{x\sin\theta}{1 + x\cos\theta}\right) \qquad \sin\left(s \arctan \frac{x\sin\theta}{1 + x\cos\theta}\right)$$

ilt, so gelangt man jetzt zur Einsicht, dafs die Formeln (6) in r. 6 auch für nicht-reelle Werthe von μ und für solche icht-reelle Werthe von ϱ, deren absoluter Betrag kleiner ls 1 ist, bestehen. Was die Werthe von x, wofür $|x| = 1$ ist, etrifft, so erkennt man auf ähnliche Art wie oben in b. 2), dafs sie, enn der reelle Theil von s nicht gröfser als -1 ist, für keinen derelben; wenn er negativ und gröfser als -1 oder Null ist, für jeden on ihnen aufser $x = -e^{\theta i}$ und $x = -e^{-\theta i}$; wenn er positiv ist, für den von ihnen ohne Ausnahme giltig sind.

11. Die Potenzreihen für cos (s arc sin x) und sin (s arc sin x).[5])

Wenn man die Coefficienten der Potenzreihe in der rsten Formel (8) d. i.

$$(1 + 2x\cos\theta + x^2) = 2\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\cos n\theta \quad (|x|<1)$$

nit den gleichstelligen in der Potenzreihe (15) vergleicht, so gelangt man zur Formel

$$\frac{2\cos n\theta}{n} = \frac{(2\cos\theta)^n}{n} - \binom{n-1}{1}\frac{(2\cos\theta)^{n-2}}{n-1} + \cdots$$
$$+ (-1)^r\binom{n-r}{r}\frac{(2\cos\theta)^{n-2r}}{n-r} + \cdots,$$

vorin r von Null bis zu der gröfsten, $\frac{1}{2}n$ nicht übersteigenden

ganzen Zahl geht. Sie stellt die eine der in II. 13 angekündigten Entwickelungen von $\cos n\theta$ dar. Ist n gerade ($n = 2k$), so nimmt r zuletzt den Werth k an und es kann die Formel auch so geschrieben werden

$$(-1)^k \cos n\theta = 1 + \sum_1^k (-1)^r \frac{n^2(n^2-2^2)\dots[n^2-(2r-2)^2]}{2r!} \cos\theta^{2r}.$$

Setzt man hier statt θ $\frac{\pi}{2} - \theta$, so ergiebt sich die Entwickelung von $\cos n\theta$ nach Potenzen von $\sin\theta$:

$$\cos n\theta = 1 + \sum_1^k (-1)^r \frac{n^2(n^2-2^2)\dots[n^2-(2r-2)^2]}{2r!} \sin\theta^{2r}. \quad (16)$$

Im Falle dafs n ungerade ist ($n = 2k+1$), erhält man auf demselben Wege die Formel

$$\sin n\theta = n \sin\theta + \sum_1^k (-1)^r \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots[n^2-(2r-1)^2]}{(2r+1)!} \sin\theta^{2r+1}. \quad (17)$$

Aehnliche Formeln findet man vermittelst der zweiten Formel (8), indem man die Potenzreihe für die Function

$$\arctan\{x\sin\theta : (1 + x\cos\theta)\}$$

aus den Entwickelungen

$$\arctan\frac{x\sin\theta}{1+x\cos\theta} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{x\sin\theta}{1+x\cos\theta}\right)^n$$

$$\frac{x\sin\theta}{1+x\cos\theta} = x\sin\theta\{1 - x\cos\theta + x^2\cos\theta^2 - \dots\}$$

ableitet.

$\cos(s \arcsin x)$ läfst sich mittelst der Cosinus- und Arcus sinus-Reihe nach dem Satze in V. 11 bei beliebigem s für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag 1 nicht übersteigt, in eine Potenzreihe von x verwandeln:

$$\cos(s \arcsin x) = 1 + \sum_1^\infty \varphi_{2r}(s)\, x^{2r},$$

wo $\varphi_{2r}(s)$ eine ganze Function $2r^{\text{ten}}$ Grades von s ist.

Falls s eine gerade Zahl ist, mufs die Reihe mit der-

nigen endlichen Reihe übereinstimmen, die sich aus (16) urch die Substitution $\sin\theta = x$ ergiebt. Man hat also

$$\varphi_{2r}(s) = (-1)^r \frac{s^2(s^2-2^2)\dots[s^2-(2r-2)^2]}{2r!},$$

enn s eine gerade Zahl bezeichnet und daher nach dem Satze in IV. 5 allgemein. Es besteht mithin, wenn ar $|x| \leqq 1$ ist, bei beliebigem s die Entwickelung

$$\cos(s \arcsin x) = 1 + \sum_1^\infty (-1)^r \frac{s^2(s^2-2^2)\dots[s^2-(2r-2)^2]}{2r!} x^{2r}. \quad (18)$$

nter denselben Bedingungen gilt die mittelst (17) ableitende Formel

$$\sin(s \arcsin x) = sx + \sum_1^\infty (-1)^r \frac{s(s^2-1^2)(s^2-3^2)\dots[s^2-(2r-1)^2]}{(2r+1)!} x^{2r+1}. \quad (19)$$

In diesen, sowie in den folgenden Formeln ist $\arcsin x$ r zum Hauptwerthe $\sqrt{1-x^2}$ gehörige Hauptwerth. Setzt an in (18) und (19)

$$x = 1 \quad \arcsin x = \frac{\pi}{2},$$

erhält man neue, für jeden Werth von s convergente ihen für $\cos\frac{1}{2}s\pi$ und $\sin\frac{1}{2}s\pi$.

Auf ähnliche Art gelangt man auch zu den Reihenentwickelungen

$$\frac{\cos(s \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_1^\infty (-1)^r \frac{(s^2-1^2)(s^2-3^2)\dots[s^2-(2r-1)^2]}{2r!} x^{2r}$$

$$\frac{\sin(s \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = sx + \sum_1^\infty (-1)^r \frac{s(s^2-2^2)\dots[s^2-(2r)^2]}{(2r+1)!} x^{2r+1}. \quad (20)$$

e gelten für alle Werthe von x: $|x| \leqq 1$ ausgenommen, $x = \pm 1$. r Verhalten auf dem Convergenzkreise $(O, 1)$ wird leicht mit Hilfe s Satzes in V. 8 beurtheilt.

Die Reihen auf den rechten Seiten der Formeln (18)—(20) dürfen ch Potenzen von s geordnet werden, wenn $|x| < 1$, die beiden

ersteren sogar, wenn $|x| = 1$ ist. Sie erfüllen nämlich die am Schlusse von V. 3 erwähnte Cauchy'sche Bedingung. Denkt man sich das allgemeine Glied z. B. in (18) entwickelt und die Summe der absoluten Beträge der Glieder gebildet, so erhält man den Ausdruck

$$A_r X^{2r} = \frac{S^2(S^2+2^2)\dots(S^2+[2r-2]^2)}{2r!} X^{2r},$$

worin $X = |x|$ und $S = |s|$ ist. Da

$$\frac{A_{r+1}}{A_r} = \frac{S^2+(2r-2)^2}{(2r-1)\,2r} = 1 - \frac{3}{2n} + \dots$$

ist, so convergirt die Reihe

$$1 + A_1 X^2 + A_2 X^4 + \dots,$$

wenn $X \leqq 1$ ist (V. 8).

Entwickelt man nun beide Seiten der in Rede stehenden Gleichungen nach Potenzen von s und setzt die Coefficienten der nämlichen Potenzen von s einander gleich, so gewinnt man zahlreiche neue Reihenentwickelungen. Die Formel (19) würde uns die Coefficienten der Arcus sinus-Reihe liefern, wenn wir sie nicht schon kennen würden. Aus (18) folgt zunächst die Formel

$$(\arcsin x)^2 = x^2 + \sum_2^\infty{}_n \frac{2\,.\,4\dots(2n-2)}{3\,.\,5\dots(2n-1)} \frac{x^{2n}}{n} \quad (|x| \leqq 1).$$

12. Um noch eine Anwendung einiger Sätze im V. und VI. Abschnitte vorzuführen, möge eine Classe von harmonischen Reihen, nämlich die unendlichen Reihen

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots, \tag{1}$$

worin s irgend eine complexe Zahl $\mu + \nu i$ bezeichnet und die Potenzen, wie gewöhnlich, Hauptwerthe sind, betrachtet werden.

1. Satz. Die unendliche Reihe (1) convergirt und zwar absolut, wenn der reelle Theil des Exponenten s gröfser als 1 ist; in jedem anderen Falle ist sie divergent. Das ergiebt sich unmittelbar aus V. 5, wenn man bemerkt, dafs

$$\frac{1}{n^s} : \frac{1}{(n-1)^s} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s = 1 - \frac{s}{n} + \binom{s}{2}\frac{1}{n^2} - \dots$$

ist. Wir bezeichnen im Falle der Convergenz die Summe von (1) mit $S(s)$ oder S_s und setzen

$$\frac{1}{l^s} + \frac{1}{(l+1)^s} + \frac{1}{(l+2)^s} + \dots = S_l(s) \quad (l \geqq 2).$$

Im Falle, dafs die harmonischen Reihen (1) divergiren, stehen die folgenden Sätze.

2. Satz. „Wenn in (1) $s = +1$ ist, so hat man die ormel

$$\lim_{n=+\infty} \left\{ \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{r} - ln \right\} = c, \qquad (2)$$

) c die Mascheroni'sche Zahl 0,5772156649 . . . be- eutet."

Beweis. Setzt man

$$\sum_{1}^{n-1} \frac{1}{r} - ln = X_n \quad a_k = X_{k+1} - X_k = \frac{1}{k} - l\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad (k \geq 2),$$

) ist

$$X_n = X_l + a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{n+1} \qquad (l \geq 2).$$

la nach Nr. 5, wenn nur $k \geq 2$ ist,

$$l\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \cdots + \frac{(-1)^g}{g\,k^g} + \cdots$$

it, so ergiebt sich

$$a_k = \sum_{2}^{\infty g} \frac{(-1)^g}{g\,k^g}.$$

Daraus folgt, dafs die Reihe Σa_k absolut convergirt, folglich m X_n bei $n = +\infty$ existirt und nicht unendlich ist. Man ndet in der That

$$\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} < a_k < \frac{1}{2k^2}, \qquad \text{also } \lim_{k=+\infty} k^2 a_k = \tfrac{1}{2}.$$

)emnach ist

$$\lim_{n=+\infty} X_n = X_l + \sum_{l}^{\infty k} a_k \quad (l \leq 2). \qquad (3)$$

Eine zur Berechnung der Mascheroni'schen Zahl bequemere Formel erhält man, wenn man das durch Σa_k dargestellte Schema von unbegrenzt vielen unendlichen Reihen nach Verticalreihen ordnet. Das ist zulässig, indem es der Cauchy'schen Bedingung (V. 3) Genüge leistet. Ersetzt man nämlich in Σa_k alle Glieder durch ihre absoluten Werthe, so findet man

$$\sum_{2}^{\infty g} \frac{1}{g\,k^g} = \frac{1}{k^2} \sum_{2}^{\infty g} \frac{1}{g\,k^{g-2}} = \frac{1}{k^2} A_k \quad (k = l,\ l+1 \quad .)$$

Die aus diesen Summen gebildete unendliche Reihe convergirt, da $\lim A_k$ bei $\lim k = +\infty$ endlich ist. — Mithin ergiebt sich aus (3)

$$c = \lim_{n=+\infty} X_n = X_l + \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^g}{g} S_l(g) \quad (l \geqq 2). \tag{4}$$

In der hier vorkommenden unendlichen Reihe ist der Rest kleiner als sein erstes Glied (vgl. X. 8. d. I. T.). Man hat aber

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)n^2} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = l, l+1 \ldots)$$

$$S_l(2) + \sum_{l}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n^2} = \frac{1}{l-1}, \text{ also } S_l(2) < \frac{1}{l-1}.$$

Für $g > 2$ ergiebt sich daraus

$$S_l(g) < \frac{1}{l^{g-2}}\left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{(l+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{l^{g-2}} S_l(2) < \frac{1}{(l-1)\,l^{g-2}}.$$

Setzen wir in (1) $s = -t$ und $t = \varrho + \sigma i$, so haben wir den

3. Satz. „Genügt der reelle Theil ϱ von t der Bedingung $-1 \leqq \varrho < 0$, ohne dafs jedoch $t = -1$ ist, so hat der Ausdruck

$$X_n(t) = \sum_{1}^{n-1} r^t - \frac{n^{t+1}}{t+1}$$

bei $\lim n = \infty$ einen endlichen Grenzwerth $K(t)$. $0 \leqq \varrho < 1$, so gilt dasselbe vom Ausdrucke

$$X_n(t) = \sum_{1}^{n-1} r^t - \frac{n^{t+1}}{t+1} + \tfrac{1}{2} n^t.$$

$K(0)$ ist $-\frac{1}{2}$. Ist $\varrho \geqq 1$, so hat der Ausdruck

$$X_n(t) = \sum_{1}^{n-1} r^t - \left[\frac{n^{t+1}}{t+1} - \tfrac{1}{2} n^t + \sum_{1}^{h} (-1)^{r-1} \binom{t}{2r-1} \frac{B_r}{2r} n^{t-2r+1}\right]$$

wo $B_1\ B_2 \ldots$ die Bernoulli'schen Zahlen und h eine mindestens so grofse natürliche Zahl bedeutet, dafs $t - 2h - 1$ einen negativen reellen Theil hat, bei

$$\lim n = +\infty$$

einen endlichen Grenzwerth $K(t)$."

Es genügt, den Beweis dieses Satzes im dritten Falle führen. Dabei dürfen wir h so bestimmen, dafs

$$\varrho - 2h + 1 \geq 0 \qquad \varrho - 2h - 1 < 0$$

r

$$\varrho + 1 \geq 2h > \varrho - 1$$

Setzt man

$$\varrho = m + \mu' \qquad (0 \leq \mu' < 1),$$

:er m eine natürliche Zahl verstanden, so hat man dem-:h

$$m + 1 \geq 2h \geq m;$$

ist $2h$ gleich m oder $m + 1$, je nachdem m gerade oder gerade ist. — Setzt man

$$X_{k+1}(t) - X_k(t) = a_k \quad (k \geq 2)$$

$$X_n(t) = X_l(t) + a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{n+1} \quad (l \geq 2),$$

hat man

$$= k^t - \frac{(k+1)^{t+1} - k^{t+1}}{t+1} + \frac{(k+1)^t - k^t}{2} \tag{8}$$

$$- \sum_1^h (-1)^{r-1} \binom{t}{2r-1} \frac{B_r}{2r} [(k+1)^{t-2r+1} - k^{t-2r+1}].$$

ser Ausdruck wird nach fallenden Potenzen von k entkelt. Es ist für alle Werthe $k \geq 2$

$$+ 1)^{t-p} - k^{t-p} = k^{t-p} \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{t-p} - 1 \right\}$$

$$= \sum_{p+1}^{\infty} \binom{t-p}{g-p} k^{t-g}.$$

nmt man hier nacheinander $p = -1, 0, 1, 3 \cdots 2h-1$, zt die bezüglichen Ausdrücke in (8) ein und ordnet nach lenden Potenzen von k, so heben sich die Coefficienten jenigen Potenzen von k, deren Exponenten nicht-negativen llen Theil besitzen, d. i. von

$$k^{t+1}\, k^t \ldots k^{t-2h+1}$$

f. Der Coefficient von k^{t-g} ist nämlich

$$- \frac{1}{t+1} \binom{t+1}{g+1} + \frac{1}{2} \binom{t}{g}$$

$$- \sum_1^f (-1)^{r-1} \binom{t}{2r-1} \frac{B_r}{2r} \binom{t-2r+1}{g-2r+1},$$

wo, solange $2 \leqq g \leqq 2h-1$ ist, $f = \frac{1}{2}g$ oder $\frac{1}{2}(g-1)$, je nachdem g gerade oder ungerade, wenn aber $g \geqq 2h$, $f = h$ ist. Zufolge der Formel

$$\frac{1}{2r}\binom{t}{2r-1}\binom{t-2r+1}{g-2r+1} = \frac{1}{t+1}\binom{t+1}{g+1}\binom{g+1}{2r}$$

geht der vorstehende Ausdruck über in

$$-\frac{1}{t+1}\binom{t+1}{g+1}\left\{1 - \frac{g+1}{2} + \sum_1^f (-1)^{r-1}\binom{g+1}{2r}B_r\right\}$$
$$= -\frac{1}{t+1}\binom{t+1}{g+1}D_g.$$

Solange $g \leqq 2h+1$ ist, ist die in den Klammern stehende Summe D_g nach IV. 12 Gleichung (7) Null. Somit ergiebt sich

$$a_k = -\sum_{2h+2}^{\infty} \frac{1}{g+1}\binom{t}{g}\frac{D_g}{k^{g-t}}. \qquad (9)$$

Ist t eine natürliche Zahl m, also $2h+1 < m$, so ist $a_k = 0$ und demnach $K(m) = X_n(m) = X_2(m)$, d. i. je nachdem m gerade oder ungerade ($= 2l-1$) ist, gleich Null oder

$$(-1)^l B_l : 2l.$$

Dieses Resultat ist eigentlich nicht neu, denn es folgt auch aus der in IV. 12 für jedes ganze positive n bewiesenen Formel

$$\sum_1^{n-1} r^m = \frac{1}{m+1}\varphi_{m+1}(n),$$

wo $\varphi_m(n)$ die m^{te} Bernoulli'sche Funktion bedeutet.

Wenn t keine natürliche Zahl ist, so convergirt die unendliche Reihe in (9) absolut. Da mithin

$$|a_k| \leqq \sum_{2h+2}^{\infty} \frac{1}{g+1}\left|\binom{t}{g}D_g\right|\frac{1}{k^{g-\varrho}} \qquad (10)$$

ist, somit einer jeden Zahl $\varepsilon > 0$ eine $\varkappa > 0$ so entspricht, dafs für $k > \varkappa$

$$a_k : \frac{1}{k^{2h+2-\varrho}} < \frac{1}{2h+3}\left|\binom{t}{2h+2}D_{2h+2}\right| + \varepsilon$$

ist, so liegt $|a_k| k^{2h+2-\varrho}$ für alle ganzzahligen Werthe $k > \varkappa$ unter einer endlichen Grenze. Weil nun $2h+2-\varrho > 1$, somit die unendliche Reihe $\sum \frac{1}{k^{2h+2-\varrho}}$ convergirt, so con-

vergirt auch die Reihe $\Sigma\,|\,a_k\,|$. Also hat $X_n(t)$ bei

$$\lim n = +\infty$$

in der That einen endlichen Grenzwerth $K(t)$ und zwar ist

$$K(t) = \lim_{n=+\infty} X_n(t) = X_l(t) + \sum_{l}^{\infty} a_k \quad (l \leq 2). \qquad (11)$$

Diese Formel gilt auch für die Ausdrücke (5) und (6), man hat nur in (9) für D_g bez. 1 und $1 - \frac{1}{2}(g+1)$ zu setzen.

4) „Die Formel (11) läfst sich in die für die Berechnung von $K(t)$ bequemere Gestalt bringen:

$$K(t) = X_l(t) - \sum_{2h+2}^{\infty} \frac{1}{g+1}\binom{t}{g} D_g S_l(g-t)." \quad (l \geq 2). \qquad (12)$$

In der That bildet Σa_k in (11) ein Schema von unendlich vielen unendlichen Reihen, welches der Cauchy'schen Bedingung (V. 3) genügt und somit auch nach Verticalreihen geordnet werden darf. Wir haben die Reihe in (10) für $k = l,\ l+1, \ldots$ zu betrachten. Multipliciren wir ihre Glieder mit $k^{2h+2-\varrho}$, so erhält man die convergente Reihe

$$A_k = \sum_{2h+2}^{g} \frac{1}{g+1}\left|\binom{t}{g} D_g\right| \frac{1}{k^{g-2h-2}}.$$

Die aus den Summen der in Rede stehenden Reihen gebildete Reihe d. i.

$$\frac{A_l}{l^{2h+2-\varrho}} + \frac{A_{l+1}}{(l+1)^{2h+2-\varrho}} + \cdots + \frac{A_k}{k^{2h+2-\varrho}} + \cdots$$

convergirt, weil $\sum \frac{1}{k^{2h+2-\varrho}}$, wie bemerkt, convergirt und A_k bei $\lim k = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth hat.

Anmerkung. Unter einer harmonischen Reihe im Allgemeinen versteht man eine Reihe, deren Glieder die gleichen Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung sind d. i.

$$a^t\ (a+d)^t\ (a+2d)^t \cdots (a+(n-1)\,d)^t \cdots$$

Nimmt man a und d so an, dafs der von a aus über $a+d$ ins Unendliche gezogene Halbstrahl die reelle Axe nicht schneidet, so erhält man hieraus, indem man durch den Hauptwerth d^t dividirt und $a:d = x$ setzt, die Hauptwerthe

$$x^t\ \ (x+1)^t\ \ (x+2)^t \cdots [x+n-1]^t \cdots$$

Für die Reihe $\Sigma(x+n-1)^t$ gelten ähnliche Sätze, wie für die soeben betrachtete Σn^t. Sie convergirt dann und nur dann, wenn der

reelle Theil von t kleiner als -1 ist. Der dem Ausdrucke (7) analoge

$$\sum_0^{n-1} (x+r)^t - \left[\frac{(x+n)^{t+1}}{t+1} - \tfrac{1}{2}(x+n)^t + \sum_1^h (-1)^{r-1} \binom{t}{2r-1} \frac{B_r}{2r} (x+n)^{t-2r+1}\right],$$

wo x von 0 und jeder negativen ganzen Zahl, t von -1 verschieden sein soll, hat bei

$$\lim n = +\infty$$

einen endlichen Grenzwerth $F(x, t)$ u. s. w. Es ist $K(t) = F(1, t)$. Die Differenz

$$K(t) - F(x, t)$$

heifst nach Kinkelin[6]) die allgemeine Bernoulli'sche Function und wird mit $B(x, t)$ bezeichnet. Ist t eine natürliche Zahl, so stimmt sie mit $\varphi_{t+1}(x) : (t+1)$ überein, wo $\varphi_{t+1}(x)$ die Bernoulli'sche Function von IV. 12 bedeutet. $B(x, 0)$ ist $x - 1$.

VII. Abschnitt.

Unendliche Producte.

1. Convergenz und Divergenz unendlicher Producte.

Es sei $f_0 f_1 \dots f_n \dots$ eine endlose Folge von beliebigen, llen oder complexen Zahlen. Bilden wir in der vorchriebenen Ordnung die Partialproducte

$$p_0 = f_0 \quad p_1 = f_0 f_1 \dots p_n = f_0 f_1 \dots f_n \dots,$$

haben sie beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ entweder en endlichen Grenzwerth oder nicht. Im ersten Falle heifst unendliche Product

$$f_0 f_1 \dots f_n \dots \quad \text{oder} \quad \prod_0^\infty{}_n f_n$$

ivergent, im zweiten divergent. Ist eine der Zahlen gleich Null, so sind von einem bestimmten alle p_n gleich ll und daher $\lim p_n = 0$. Es sind zunächst die folgen- Sätze hervorzuheben:

1) „Giebt es eine positive Zahl ϱ, kleiner als 1, wel- r eine positive Zahl μ so entspricht, dafs wenn $n > \mu$ $|f_n| < \varrho$ ist, so ist

$$\lim_{n=+\infty} p_n = 0.“$$

2) „Giebt es eine positive Zahl σ, gröfser als 1, welcher e positive Zahl μ so entspricht, dafs wenn $n > \mu$ ist, $| > \sigma$ ist, so ist

$$\lim_{n=+\infty} p_n = \infty.“$$

Bedeutet m eine natürliche Zahl, gröfser als μ, so hat man nämlich im ersten Falle

$$|p_n| < |p_m| \varrho^{n-m},$$

im zweiten

$$|p_n| > |p_m| \sigma^{n-m}.$$

3) „Die nothwendige und, falls kein f_n Null ist, hinreichende Bedingung zur Existenz eines von Null verschiedenen, endlichen Grenzwerthes a von p_n bei $\lim n + \infty$ besteht darin, dafs jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl μ so zugeordnet werden kann, dafs neben

$$n > \mu \quad |f_{n+1} f_{n+2} \dots f_{n+r} - 1| < \varepsilon \quad (r = 1, 2 \dots) \qquad (a)$$

ist, welche natürliche Zahl r auch sein mag."

Beweis. Angenommen, es sei bei

$$\lim n = +\infty \qquad \lim p_n = a$$

und $A = |a| > 0$. Dann gehört zu $\varepsilon' > 0$ eine Zahl μ' so, dafs neben $n > \mu'$

$$|a - p_n| < \varepsilon', \quad \text{also} \quad |p_{n+r} - p_n| < 2\varepsilon' \quad (r = 1, 2 \dots)$$

ist. Aus der ersteren Ungleichung folgt, dafs wenn $n > \mu'$ ist,

$$A - |p_n| \leq |a - p_n| < \varepsilon' \quad \text{d. i.} \quad |p_n| > A - \varepsilon'$$

ist. Somit ergiebt sich mittelst der letzteren, falls $\varepsilon' <$ ist, für

$$n > \mu' \qquad \left| \frac{p_{n+r}}{p_n} - 1 \right| < \frac{2\varepsilon'}{A - \varepsilon'}.$$

Man braucht also, um die Relationen (a) zu erhalten, nur so anzunehmen, dafs

$$\frac{2\varepsilon'}{A - \varepsilon'} < \varepsilon \quad \text{d. i.} \quad \varepsilon' < \frac{A\varepsilon}{2 + \varepsilon}$$

ist. — Weifs man umgekehrt, dafs die Relationen (a) nebeneinander bestehen und kein p_n Null ist, so darf man schliefsen, dafs für $n > \mu$

$$\left| \frac{p_{n+r}}{p_n} \right| - 1 < \varepsilon \quad \text{und} \quad 1 - \left| \frac{p_{n+r}}{p_n} \right| < \varepsilon,$$

also

$$(1-\varepsilon)\,|p_n| < |p_{n+r}| < (1+\varepsilon)\,|p_n|$$

Setzt man hier anstatt n eine bestimmte ganze Zahl $> \mu$, so erkennt man, dafs die Zahlen $p_0, p_1 \ldots p_n \ldots$ ı absoluten Betrage nach sämmtlich sowohl unter einer itiven Zahl γ (nämlich der gröfsten der Zahlen

$$|p_0|, |p_1| \ldots |p_{m-1}| \quad (1+\varepsilon)\,|p_m|),$$

auch über einer positiven Zahl $\varkappa$ (nämlich der kleinsten ebengenannten Zahlen) liegen. Demnach folgt aus (a)

$$n > \mu \quad |p_{n+r} - p_n| < \gamma\varepsilon \quad (r = 1, 2 \ldots)$$

ı. es existirt für p_n bei $\lim n = +\infty$ ein endlicher Grenzrth p. Und vermöge $|p_n| > \varkappa$ ist $A \geqq \varkappa$, also $A > 0$.

4) Corollar. „Zur Existenz eines endlichen, von Null schiedenen Grenzwerthes von p_n ist nothwendig, dafs jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ so gehört, dafs neben

$$n > \mu \quad \left|\frac{p_{n+1}}{p_n} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{d. i.} \quad |f_{m+1} - 1| < \varepsilon,$$

ıit bei $\lim n = +\infty$ $\lim f_n = 1$ ist. Setzt man

$$f_n = 1 + a_n,$$

hat man demnach $\lim a_n = 0$ bei $\lim n = +\infty$.“ — $\lim p_n = 0$, so gilt dieser Satz nicht immer, wie schon Annahme $a_n = -\frac{1}{2}$ beweist.

5) Es ist bekannt (vgl. Nr. 3), dafs selbst im Falle dafs $\lim n = +\infty$ $\lim f_n = 1$ ist, ein unendliches Product h dann den Grenzwerth Null haben kann, wenn keiner ıer Factoren verschwindet. Ist aber die in den einan- zugeordneten Ungleichungen (a) ausgesprochene dingung erfüllt, so kann ein unendliches Proct nur in der Art verschwinden, dafs ein Factor ll ist.[1])

6) „Setzt man

$$f_n = 1 + a_n \qquad w_n = p_{n-1}\, a_n \qquad (n = 1, 2 \ldots),$$

sind das unendliche Product $\prod_0^\infty f_n$ und die unendhe Reihe

$$f_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

äquivalent d. h. die Partialproducte des ersteren stimmen der Reihe nach mit den Partialsummen der letzteren überein."

In der That erhält man durch Addition der Gleichungen

$$p_1 = f_0(1 + a_1) = f_0 + w_1$$
$$p_2 = p_1(1 + a_2) = p_1 + w_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_n = p_{n-1}(1 + a_n) = p_{n-1} + w_n$$

die Formel

$$p_n = f_0 + w_1 + w_2 + \cdots w_n .$$

2. Allgemeine Sätze über die unendlichen Producte.

Der Kürze wegen mögen als gleichartig bezeichnet werden unendliche Producte, die convergent sind, solche die einen unendlichen und solche, die gar keinen Grenzwerth haben.

1) „Ist

$$f_n = g_n , \quad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

so sind gleichartig die unendlichen Producte

$$f_0 f_1 f_2 \ldots \quad \text{und} \quad g_0 g_1 g_2 \ldots$$

Convergirt insbesondere das erste Product, so auch das zweite und beide haben denselben Grenzwerth." Denn es ist

$$q_n = g_0 g_1 \ldots g_n = f_0 f_1 \ldots f_n = p_n \quad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

2) Wenn keiner der Factoren f_n verschwindet, so sind „das unendliche Product $f_0 f_1 f_2 \ldots$ und jedes, das aus ihm durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Product c sei, hervorgeht, gleichartig."

„Convergirt das erstere Product, so auch das letztere, und umgekehrt. Bedeuten a a' ihre Grenzwerthe, so ist $a = ca'$. Läfst man insbesondere die $(n + 1)$ Anfangsglieder $f_0 f_1 \ldots f_n$ weg, so erhält man das convergente Product $f_{n+1} f_{n+2} \ldots$, dessen Grenzwerth $Q_n = a : p_n$ ist. Wenn a von Null verschieden ist, so hat man demnach

$$\lim_{n=+\infty} Q_n = 1."$$

Setzt man

$$f_{n+1} f_{n+2} \ldots f_{n+r} = Q_{n,r},$$

› hat man

$$Q_{n,r} = p_{n+r} : p_n ,$$

›mit bei $\lim r = +\infty$

$$Q_n = a : p_n .$$

3) Ein convergentes unendliches Product $f_0 f_1 f_2 \ldots$ t unbeschränkt associativ d. h. leitet man aus ihm ein ›ues dadurch ab, dafs man seine Factoren gruppenweise ›reinigt, jedoch in der Weise, dafs jede Gruppe nur unmit-lbar aufeinander folgende Factoren des ursprünglichen Pro-ıctes enthält, so ist auch das neue Product convergent und ›t denselben Grenzwerth, wie das gegebene. — Sind F_1 $\ldots F_n \ldots$ die Factoren des neuen Productes und ist

$$F_1 F_2 \ldots F_n = P_n ,$$

hat man

$$P_1 = p_{m_1} \quad P_2 = p_{m_2} \ldots P_n = p_{m_n} ,$$

o

$$\lim_{n=+\infty} P_n = \lim_{n=+\infty} p_n = a .$$

Sind die Factoren des convergenten Productes $F_1 F_2 \ldots$ ›ducte wie oben und man läfst die Klammern weg, so ›ucht das so erhaltene Product $f_0 f_1 f_2 \ldots$ nicht zu conver-›en. Convergirt es aber, so hat es denselben Grenzwerth ›e $F_1 F_2 \ldots$

4) Ist k eine von Null verschiedene Constante, so sind › Producte

$$\prod_0^{\infty n} f_n \quad \text{und} \quad \prod_0^{\infty n} k f_n$$

›eichartig. Convergirt das erstere und zwar zum Grenz-›erthe a, so convergirt das letztere zum Grenzwerthe ka.“

5) „Convergiren zwei unendliche Producte wie (b) und ›ar zu den Grenzwerthen a, b, so convergirt das unend-›che Product

$$\prod_0^{\infty n} f_n g_n \qquad (c)$$

›d zwar zum Grenzwerthe ab. Ist aufserdem b von Null ›rschieden, so convergirt auch das unendliche Product

$$\prod_0^{\infty n} (f_n : g_n) \qquad (d)$$

und zwar zum Grenzwerthe $a : b$.“ — Denn die Partialproducte von (c) (d) sind bez. $p_n\ q_n$, $p_n : q_n$, welche Ausdrücke bei $\lim n = +\infty$ bez. die Grenzwerthe ab, $a : b$ haben. — Die Sätze lassen sich auf jede endliche Anzahl von unendlichen Producten ausdehnen.

Die vorstehenden Sätze und die von Nr. 1 hätte man, im Falle dafs keine der Zahlen $f_n\ g_n$ Null ist, auch mit Hilfe der folgenden Bemerkung beweisen können. Das Verhalten der Partialproducte p_n bei $\lim n = +\infty$ läfst sich stets nach dem der Partialsummen der aus den Hauptwerthen der Logarithmen der Factoren f_n gebildeten unendlichen Reihe

$$lf_0 + lf_1 + \cdots + lf_n + \cdots$$

beurtheilen. Setzt man nämlich

$$s_n = lf_0 + lf_1 + \cdots + lf_n,$$

so ist

$$lp_n = s_n + 2m\pi i$$

$$p_n = e^{s_n}.$$

Hat s_n bei $\lim n = +\infty$ einen von Null verschiedenen endlichen Grenzwerth s, so hat auch p_n einen und zwar e^s. Das Umgekehrte ist auch richtig. Ist

$$\lim |s_n| = +\infty,$$

während die Neigung von s_n stets zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{bezw. } \frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{3\pi}{2}\right)$ liegt, so hat p_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth ∞ (bezw. Null).

3. Wir wollen nun untersuchen, inwieweit die übrigen für die Producte aus einer endlichen Anzahl von Factoren geltenden Regeln sich auf die Grenzwerthe von convergenten unendlichen Producten ausdehnen lassen. Dabei setzen wir stets

$$f_n = 1 + a_n$$

voraus und beschränken uns auf die Annahme, dafs a_n nicht gleich -1 ist und bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth Null hat. Das genügt, da sie im Falle dafs das Product einen endlichen Grenzwerth hat, der nicht Null ist, immer zutrifft. Wir dürfen zufolge des zweiten Satzes in Nr. 2 auch noch voraussetzen, dafs der absolute Betrag von a_n die Ein-

heit nicht übersteigt. Dann liegt, wie bereits in Vl. 5 bemerkt ist, der Coefficient von i in $l(1+a_n)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$.

Wir gehen von den zwei folgenden in X. 12 d. I. T. bewiesenen Sätzen aus, worin die a_n sämmtlich als positiv und, wenn nöthig, kleiner als 1 zu denken sind.

1) „Das unendliche Product

$$\prod_0^{+\infty}{}_n (1-a_n)$$

hat stets einen endlichen Grenzwerth und zwar ist er positiv, wenn die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (e)$$

convergirt, dagegen Null, wenn sie divergirt."

2) „Das unendliche Product

$$\prod_0^{+\infty}{}_n (1+a_n)$$

convergirt und zwar zu einem positiven Grenzwerthe, wenn die Reihe (e) convergirt. Es divergirt und hat den Grenzwerth $+\infty$, wenn sie divergirt."

Auch diese Sätze lassen sich mit Hilfe der unendlichen Reihe $\Sigma l(1+a_n)$ beweisen, wie aus der folgenden Nr. zu entnehmen ist. Durch Betrachtung der Logarithmenreihe erkennt man ferner unmittelbar die Richtigkeit des Satzes:

„Wenn die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots,$$

welche nur Glieder eines Zeichens in unbegrenzter Anzahl enthält, convergirt, so liefern bei jeder Anordnung der Factoren $1+a_n$ die Partialproducte p_n für $\lim n = +\infty$ einen endlichen, von Null verschiedenen und zwar stets denselben Grenzwerth. Ist die Reihe divergent, so haben sie entweder stets den Grenzwerth $\pm\infty$ oder Null, je nachdem darin die positiven oder negativen Glieder in unbegrenzter Anzahl vorkommen." Wenn in dem in Rede stehenden Falle das unendliche Product $\Pi(1+a_n)$ convergirt, so ist es demnach auch commutativ.

4. Unbedingt convergente unendliche Producte.

Satz.[2]) „Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dafs bei jeder Anordnung der Factoren

$$1 + a_0 \quad 1 + a_1 \ldots \quad 1 + a_n \ldots,$$

worin keine der Zahlen a_n gleich -1 ist, die Partialproducte p_n für $\lim n = +\infty$ denselben endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerth liefern — d. i. zur unbedingten Convergenz des unendlichen Productes

$$\prod_0^\infty{}_n (1 + a_n)$$

besteht in der absoluten Convergenz der unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots"$$

Beweis. Da der Grenzwerth des vorstehenden unendlichen Productes nicht Null sein soll, so mufs $\lim a_n$ bei $\lim n = +\infty$ Null sein; daher ist die Annahme gestattet, dafs $|a_n|$ $(n = 0, 1 \ldots)$ die Einheit nicht übersteigt.

Wir haben nun nur zu zeigen, dafs die angegebene Bedingung zur unbedingten Convergenz der unendlichen Reihe

$$l(1 + a_0) + l(1 + a_1) + \cdots + l(1 + a_n) + \cdots \qquad (f)$$

hinreichend und nothwendig ist. Es seien zunächst die a_n reelle Zahlen und die positiven unter ihnen mit $b_0\ b_1 \ldots b_n \ldots$, die negativen mit $-c_0\ -c_1 \ldots -c_n \ldots$ bezeichnet. Wenn Σa_n absolut convergirt, so convergiren die beiden Reihen

$$b_0 + b_1 + \cdots, \qquad (g)$$

$$-c_0 - c_1 - \cdots. \qquad (h)$$

Es convergiren aber auch die unendlichen Reihen

$$\sum_0^\infty{}_n\, l(1 + b_n), \qquad (i)$$

$$\sum_0^\infty{}_n\, l(1 - c_n), \qquad (k)$$

die erste aus positiven, die zweite aus negativen Gliedern bestehend; wie mit Hilfe der in der 9. Note zum IV. Ab-

t bewiesenen Ungleichungen sich sofort ergiebt. Dar-
ist nämlich

$$b_n\,(1-\tfrac{1}{2}b_n) < l(1+b_n) < b_n\,, \qquad \text{(l)}$$

$$-l(1-c_n) < c_n\left\{1+\frac{c_n}{2(1-c_n)}\right\} \quad (0<c_n<1)\,. \qquad \text{(m)}$$

i $\lim n = +\infty$ $\lim c_n = 0$ ist, so hat man

$$\lim_{n=+\infty}\left(1+\frac{c_n}{2(1-c_n)}\right)=1\,,$$

convergirt neben (h) auch die unendliche Reihe

$$\Sigma c_n\left(1+\frac{c_n}{2(1-c_n)}\right),$$

uch (k). — Mit anderen Worten: es convergirt neben
lie Reihe (f) absolut. Umgekehrt folgt aus der abso-
Convergenz von (f) auch die der Reihe Σa_n. Unter
Voraussetzung convergiren nämlich die Reihen (i) und
Vermöge der Relationen (l) schliefst man aus der Con-
nz von (i) die der Reihe $\Sigma b_n\,(1-\frac{1}{2}b_n)$, welche, falls
1 ist, nur positive Glieder enthält, und hieraus, da
i $\lim b_n = 0$

$$\lim_{n=+\infty}\{1:(1-\tfrac{1}{2}b_n)\}=1$$

ie von (g). Aus (m) ergiebt sich, dafs neben (k) auch
eihe (h) convergirt. Somit convergirt Σa_n absolut.
ind unter den a_n auch complexe Zahlen vorhanden,

$$_n = \alpha_n + i\beta_n \qquad 1+a_n = \varrho_n\,\{\cos\theta_n + i\sin\theta_n\}\,,$$

$$\varrho_n\cos\theta_n = 1+\alpha_n \qquad \varrho_n\sin\theta_n = \beta_n$$

$$\varrho_n = \sqrt{1+2\alpha_n+\alpha_n^2+\beta_n^2}$$

Wir dürfen annehmen, dafs $|\,a_n\,| \leqq 1$, jedoch a_n nicht
-1 ist, also θ_n zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Da

$$l(1+a_n) = l\varrho_n + \theta_n i$$

o ist zur unbedingten Convergenz der Reihe (f) hin-
nd und nothwendig die der Reihen

$$\sum_0^\infty l\varrho_n\,, \qquad \text{(n)} \qquad\qquad \sum_0^\infty \theta_n\,. \qquad \text{(o)}$$

Setzen wir

$$\varrho_n = 1 + \delta_n,$$

wo

$$\delta_n = \frac{\varrho_n^2 - 1}{\varrho_n + 1} = \frac{2\alpha_n + \alpha_n^2 + \beta_n^2}{\varrho_n + 1},$$

so ist nach dem Vorstehenden zur absoluten Convergenz von (n) hinreichend und nothwendig die von $\Sigma\delta_n$. — Wenn Σa_n absolut convergirt, so convergiren die Reihen $\Sigma\alpha_n$ $\Sigma\beta_n$ absolut, somit, da bei $\lim n = +\infty$

$$\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0 \qquad \lim \varrho_n = 1$$

ist, auch die Reihen

$$\Sigma \frac{2 + \alpha_n}{\varrho_n + 1} \alpha_n \qquad \Sigma \frac{\beta_n}{\varrho_n + 1} \beta_n \qquad (p)$$

— es bleibt nämlich sowohl der Coefficient von α_n, als auch der von β_n für alle Werthe von $n = 0, 1, 2 \ldots$ endlich — und daher convergirt auch $\Sigma\delta_n$ absolut. Da ferner

$$|\theta_n| < |\tan\theta_n| = |\beta_n| : (1 + \alpha_n)$$

ist, so convergiren neben $\Sigma|\beta_n|$ auch

$$\Sigma|\tan\theta_n| \quad \text{und} \quad \Sigma|\theta_n|.$$

Setzen wir umgekehrt voraus, dafs die Reihen (n) und (o) absolut convergiren und bemerken, dafs $|\sin\theta_n| < |\theta_n|$ ist, so ergiebt sich sofort die unbedingte Convergenz der Reihe $\Sigma\varrho_n \sin\theta_n$ d. i. $\Sigma\beta_n$. Da nunmehr die zweite der Reihen (p) und überdies $\Sigma\delta_n$ absolut convergirt, so auch die erste der Reihen (p) und endlich die Reihe $\Sigma\alpha_n$; denn der Ausdruck

$$(\varrho_n + 1) : (2 + \alpha_n)$$

hat bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 1, bleibt also für alle Werthe $n = 0, 1, 2 \ldots$ endlich.

Man findet demnach, dafs neben (f) auch Σa_n absolut convergent ist.

Aus dem vorstehenden Satze folgt, dafs das aus den Factoren

$$1 + a_n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

gebildete unendliche Product im Falle dafs die Reihe Σa_n absolut convergirt, nur dann verschwindet, wenn mindestens einer der Factoren Null ist.

5. Für die unbedingt convergenten Producte gelten folgenden Sätze, Verallgemeinerungen von bekannten n über die Producte aus einer endlichen Anzahl von ren.[5]) Nur solche unendliche Producte verhalten sich ach in jeder Hinsicht so, wie es der Name „Product" ngt.

1) „Bildet man aus den Factoren des unbedingt con-enten Productes

$$\prod_{0}^{\infty}{}_{n}(1+a_n), \qquad (q)$$

einen zu übergehen, eine endliche oder unendliche An-von Partialproducten

$$\prod_{0}^{\infty}{}_{n}(1+a_n^{(m)}) \qquad (m=0,1,\ldots), \qquad (r)$$

$a_n^{(m)}$ auch für alle Werthe von n von einem bestimmten Null sein kann), so convergirt ein jedes unendliche r ihnen unbedingt. Das aus den endlichen Pro-:en und den Grenzwerthen der unendlichen Pro-:e in (r)

$$1+a^{(0)},\quad 1+a^{(1)},\ldots\quad 1+a^{(m)}\ldots$$

ildete Product convergirt unbedingt und zwar emselben Grenzwerthe, wie das vorgelegte Pro-; (q)."

Der Satz ergiebt sich unmittelbar durch Anwendung 6. Satzes in V. 3 auf die unendliche Reihe $\Sigma l(1+a_n)$.

2) Das distributive Gesetz. Bildet man eine un-iche Reihe aus 1, den Gliedern

$$a_0\ a_1 \ldots a_n \ldots,$$

n Producten zu je zweien, zu dreien .... (z. B. rch dafs man die Producte $a_n a_p a_q \ldots$ so aneinander , dafs die Summe der Indices $n+p+q+\cdots$ nicht mmt), so ist sie im Falle dafs Σa_n absolut con-;irt, ebenfalls absolut convergent und hat zur ime den Grenzwerth a des unbedingt convergen-Productes (q). — Wir fügen hinzu: „Ist aufserdem <1, so hat man zufolge der Formeln

$$l(1+a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + \frac{a_n^3}{3} - \cdots \quad (n = 0, 1, 2..) \quad (r^*)$$

$$la = \sum_0^\infty{}_n\, l(1+a_n) = \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_0^\infty{}_n\, a_n^m .“$$

Beweis. Setzt man

$$(1+a_0)\cdot(1+a_1)\ldots(1+a_n) = p_n \quad (n = 0, 1\ldots),$$

so ist nach dem 6. Satze in Nr. 1 neben dem unendlichen Producte (q) auch die Reihe

$$1 + a_0 + p_0 a_1 + \cdots + p_{n-1} a_n + \cdots \qquad (s)$$

convergent und zwar hat sie den nämlichen Grenzwerth a wie dasselbe.

Löst man die Glieder der Reihe (s) auf, setzt also

$$\begin{aligned} p_0 a_1 &= a_1 + a_0 a_1 \\ p_1 a_2 &= a_2 + a_0 a_2 + a_1 a_2 + a_0 a_1 a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

so erhält man im Falle der absoluten Convergenz von Σa_n eine absolut convergente Reihe. Ersetzt man nämlich in den Gliedern der Reihe

$$1 + a_0 + a_1 + a_0 a_1 + a_2 + a_0 a_2 + a_1 a_2 + a_0 a_1 a_2 + \cdots \qquad (t)$$

die a_n durch ihre absoluten Beträge A_n, so ist die Summe von beliebig vielen der so entstandenen Glieder nicht gröfser als

$$(1+A_0)(1+A_1)\ldots(1+A_h),$$

wo h den gröfsten Index bedeutet, der in dieser Summe überhaupt vorkommt, folglich kleiner als die positive Zahl

$$B = \prod_0^\infty{}_n\, (1+A_n) . \qquad (t^*)$$

Somit convergirt die Reihe der absoluten Beträge der Glieder in der Reihe (t). Demnach wird, wie die Glieder von (t) auch geordnet werden mögen, die Summe der Reihe stets a sein.

Ersetzt man ferner die Glieder der unendlichen Reihen in den Gleichungen (r*) durch ihre absoluten Beträge, so erhält man

$= 0, 1 \ldots)$ $\quad A_n + \frac{1}{2} A_n^2 + \frac{1}{3} A_n^3 + \cdots = - l(1 + A_n).$

ist aber die Reihe $\Sigma l(1 + A_n)$ convergent, da das un-
lliche Product (t*) convergirt. Das Schema (r*) erfüllt
nnach die Cauchy'sche Bedingung, läfst sich also nach Ver-
alreihen ordnen.

3) „Es seien $f_0(x)$, $f_1(x) \ldots f_n(x) \ldots$ endliche oder un-
lliche Reihen nach ganzen positiven Potenzen von x mit
n constanten Gliede 1, also

$$f_n(x) = 1 + \sum_1^\infty{}^m a_{n,m} x^m,$$

l es seien die unendlichen unter ihnen convergent für alle
erthe von x, deren absoluter Betrag unter der positiven
hl R liegt.

Ferner sei

$$| = X \quad | a_{n,m} | = A_{m,n} \qquad 1 + \sum_1^\infty{}^m A_{m,n} X^m = F_n(X).$$

nvergirt dann für $X < R$ das Product

$$\prod_0^\infty{}^n F_n(X),$$

convergirt das Product

$$\prod_0^\infty{}^n f_n(x) \qquad \text{(A)}$$

bedingt — sein Grenzwerth sei $f(x)$ — und läfst sich
ch Potenzen von x entwickeln, d. h. bildet man die
ndliche Reihe aus den Gliedern

$$a_{n_1, m_1} a_{n_2, m_2} \cdots a_{n_r, m_r},$$

rin die zweiten Indices $m_1 \ldots m_r$ alle ganzzahligen Werthe
1 bis m erhalten, deren Summe m ist, während die
ten Indices $n_1 \ldots n_r$ unabhängig von einander alle ganz-
ligen Werthe von Null an annehmen, ohne dafs jedoch zwei
nder gleich werden dürfen, so convergirt sie absolut. Ist
ihre Summe, so convergirt für alle Werthe von x:

$$| x | < R$$

Potenzreihe

$$1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{m} c_m x^m$$

absolut und ihre Summe ist $f(x)$."

Beweis. Da

$$|f_n(x) - 1| \leq F_n(X) - 1$$

ist, so convergirt das unendliche Product (A), wenn nur $|x| < R$ ist, und zwar unbedingt.

Es sei

$$\prod_{1}^{n}{}_{r} f_r(x) = p_n(x) \qquad \prod_{1}^{n}{}_{r} F_r(X) = P_n(X).$$

Nach dem 6. Satze in Nr. 1 convergirt für diese Werthe von x die Reihe

$$f_0(x) + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} p_{n-1}(x)\,[f_n(x) - 1] \tag{B}$$

und man hat

$$f_0(x) + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} p_{n-1}(x)\,\{f_n(x) - 1\} = \prod_{0}^{\infty}{}_{n} f_n(x) = f(x). \tag{C}$$

Entwickelt man die Glieder der Reihe (B) nach Potenzen von x und ersetzt in den so entstandenen Potenzreihen von x jedes Glied durch seinen absoluten Betrag, so erhält man Glieder, die sicher nicht gröfser sind als die ihnen entsprechenden der für alle Werthe von X, die kleiner als R sind, convergenten Reihe

$$F_0(X) + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} P_{n-1}(X)\,\{F_n(X) - 1\} = \prod_{0}^{\infty}{}_{n} F_n(X).$$

Die auf der linken Seite von (C) auftretende Doppelreihe genügt demnach der Cauchy'schen Bedingung (V. 3); man darf sie daher nach Potenzen von x ordnen, wodurch man zur Gleichung

$$f(x) = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{m} c_m x^m$$

gelangt.

Ein Satz von gröfserer Tragweite als der soeben bewiesene läfst sich mit Hilfe des Begriffes der gleichmäfsigen Convergenz der unendlichen Producte ableiten [3*]. „Das (bedingt oder unbedingt) conver-

nte unendliche Product (A), worin jede Function $f_n(x)$ innerhalb nes und desselben Bereiches $\mathfrak{B}$ endlich sein soll, heifst gleichäfsig convergent für alle Werthe von x in diesem Bereiche wenn jeder positiven Zahl ε eine andere μ sich so zuordnen läfst, fs für jeden der genannten Werthe von x

$$| f_{n+1}(x) f_{n+2}(x) \cdots f_{n+r}(x) - 1 | < \varepsilon \qquad (D)$$

, wenn nur $n > \mu$ ist."

Für jeden Werth von x, wofür das Product (A) convergirt, beht, wie oben, die Gleichung (C).

Wenn nun das unendliche Product (A) gleichmäfsig r die Werthe von x im Bereiche $\mathfrak{B}$ convergirt, so ist das ich der Fall hinsichtlich der unendlichen Reihe (B). Man t nämlich, falls kein Factor $f_n(x)$ Null ist,

$$\sum_{k=1}^{n+r} (f_k(x) - 1)\, p_{k-1}(x) = p_{n+r}(x) - p_n(x) = p_n(x) \left\{ \frac{p_{n+r}(x)}{p_n(x)} - 1 \right\}.$$

Giebt es eine solche positive Zahl γ_n, dafs $| f_n(x) | < \gamma_n$ ist für len Werth von x in $\mathfrak{B}$, so giebt es hier auch eine solche positive hl A, dafs

$$| p_n(x) | < A \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

. Denn bezeichnet m eine natürliche Zahl $> \mu$, so darf man für die gröfste der Zahlen $\gamma_0, \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{m-1}, \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_m(1+\varepsilon)$ tzen. Somit folgt aus (D), dafs für $n > \mu$

$$\left| \sum_{n+1}^{n+r} (f_k(x) - 1)\, p_{k-1}(x) \right| < A\varepsilon$$

w. z. b. w.

Bedeuten $f_0(x)\, f_1(x) \ldots f_n(x) \ldots$ endliche oder unendliche Reihen ch ganzen Potenzen von x, welche für alle Werthe von x, deren soluter Betrag zwischen zwei gegebenen Zahlen R' R liegt, conver- en und convergirt das unendliche Product (A) gleichmäfsig für die nannten Werthe von x, so kann man auf die linke Seite von (C) n Weierstrafs'schen Doppelreihensatz in V. 16 anwenden. Es läfst h also eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe fin- n, welche für alle Werthe von x

$$R' < | x | < R$$

nvergirt und gleich $\prod_0^\infty f_n(x)$ ist.

6. Bedingt convergente Producte.

Wenn Σa_n bedingt convergirt, so mufs die Reihe (f), nn sie überhaupt convergirt, bedingt convergiren. Dann

convergirt auch das Product (q) bedingt und kann im Falle dafs die a_n sämmtlich reell und gröfser als -1 sind, durch geeignete Anordnung der Factoren jeden nicht-negativen Grenzwerth erlangen und auch divergent werden.

Satz.[4]) „Es seien $a_0\ a_1 \ldots a_n \ldots$ reelle oder complexe Zahlen, worunter jedoch -1 nicht vorkommen soll, und es sei

$$a_n - \tfrac{1}{2}a_n^2 + \tfrac{1}{3}a_n^3 - \cdots + \frac{(-1)^m}{m-1}a_n^{m-1} = A_{n,m} \qquad (m>2).$$

Wenn die unendliche Reihe

$$A_{0,m} + A_{1,m} + \cdots + A_{n,m} + \cdots \qquad (u)$$

mindestens bedingt, $\sum_0^\infty a_n^m$ absolut convergirt, so convergirt das unendliche Product

$$\prod_0^\infty (1 + a_n) \qquad (v)$$

sicher bei der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung der Factoren und zwar ist sein Grenzwerth von Null verschieden."

Beweis. Das Product (v) convergirt, da die Reihe

$$\Sigma l(1 + a_n)$$

convergent ist. Setzen wir nämlich

$$l(1 + a_n) = A_{n,m} + \frac{(-1)^{m+1}}{m}a_n^m R_n, \qquad (w)$$

so dafs

$$R_n = 1 - \frac{m}{m+1}a_n + \frac{m}{m+2}a_n^2 - \cdots$$

ist, so besteht, da bei $\lim n = +\infty$ $\lim a_n = 0$ ist, folglich jeder positiven Zahl $\varepsilon < 1$ eine positive Zahl μ sich so zuordnen läfst, dafs für $n > \mu \mid a_n \mid < \varepsilon$ ist, für $n > \mu$ die Relation

$$\mid R_n \mid < 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots = 1 : (1 - \varepsilon).$$

Somit convergirt nach dem 3. Satze in V. 3 die Reihe $\Sigma a_n^m R_n$ absolut, demnach die Reihe $\Sigma l(1 + a_n)$ bedingt, wenn die Reihe (u) bedingt convergirt.

Zusatz. „Wenn die Reihen Σa_n, $\Sigma a_n^2 \ldots \Sigma a_n^{m-1}$ $(m > 2)$ bedingt, Σa_n^m absolut convergirt, so convergirt das unendliche Product

$$\prod_{0}^{\infty}{}_{n}(1 + a_n x)$$

sicher bei der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung der Factoren für jedes endliche x und zwar ist bei Ausschluſs der Werthe $x = -1 : a_n$ sein Grenzwerth von Null verschieden." Denn es convergirt die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$a_n x - \tfrac{1}{2}(a_n x)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m-1}(a_n x)^{m-1}$$

für jeden endlichen Werth von x. — Sind die Zahlen a_n sämmtlich reell, so muſs Σa_n^2, wenn überhaupt, absolut convergiren. Der Satz geht dann für $m = 2$ $x = 1$ in den Cauchy'schen über: „Wenn Σa_n und Σa_n^2 convergiren, so convergirt das unendliche Product (v) und sein Grenzwerth ist von Null verschieden." So convergirt das Product

$$(1 - \tfrac{1}{2})(1 + \tfrac{1}{3})(1 - \tfrac{1}{4})(1 + \tfrac{1}{5})(1 - \tfrac{1}{6}) \ldots$$

bei dieser Anordnung der Factoren; sein Grenzwerth ist $\frac{1}{2}$.

Im Falle daſs die a_n sämmtlich reell und m gleich einer geraden Zahl $2k$ ist, kann man, da für $n > \mu$

$$\frac{1}{1-\varepsilon} > R_n > 1 - \varepsilon - \varepsilon^3 - \cdots = 1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

ist, noch behaupten, daſs wenn Σa_n^m divergirt, auch die Reihe $\Sigma a_n^m R_n$ divergent ist. Hieraus schlieſst man durch einen Blick auf die Gleichung (w) die folgenden Sätze[1*]:

1) „Convergirt die Reihe (u) und divergirt die Reihe

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{n} a_n^{2k} \quad (k \geqq 1), \tag{x}$$

so hat das Product (v) bei der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung der Factoren den Grenzwerth Null. — Das Nämliche gilt, wenn der Ausdruck

$$A_{0,m} + A_{1,m} + \cdots + A_{n,m} \tag{y}$$

bei $\lim n = +\infty$ endliche Unbestimmtheitsgrenzen hat." Für $k = 1$ erhält man wieder einen Cauchy'schen Satz, demzufolge das Product

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right)\cdots \tag{z}$$

bei dieser Anordnung der Factoren zum Grenzwerthe Null convergirt.

2) „Divergirt die Reihe (u) und hat sie bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $-\infty$, so hat das Product (v) den Grenzwerth Null." Z. B. das Product

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)\cdots,$$

welches dieselben Factoren wie (z) aber in anderer Anordnung enthält, hat ebenfalls den Grenzwerth Null" (vgl. X. 8. d. I. T.).

3) „Divergirt die Reihe (u) und hat sie bei lim $n=+\infty$ den Grenzwerth $+\infty$, während die Reihe (x) convergirt, so hat das Product (v) den Grenzwerth $+\infty$."

4) „Wenn die Unbestimmtheitsgrenzen des Ausdruckes (y) bei lim $n=+\infty$ von einander verschieden sind und die Reihe (x) convergirt, so hat auch das Product

$$\prod_{0}^{n}{}_{r}(1+a_r)$$

bei lim $n=+\infty$ von einander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen."

7. Die unendlichen Producte für den Sinus und Cosinus.[5])

Nach der Formel (17) in VI. 11 läfst sich

$$\sin(n \arcsin x),$$

wenn n eine ungerade Zahl ist, als ganze Function n^{ten} Grades von x darstellen:

$$\sin n(\arcsin x) = nx + \psi_3 x^3 + \psi_5 x^5 + \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} 2^{n-1} x^n.$$

Die linke Seite dieser Gleichung verschwindet für n von einander verschiedene Werthe

$$x = x_r = \sin\frac{r\pi}{n} \quad \{r = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \pm \tfrac{1}{2}(n-1)\}.$$

Man kennt somit die n Wurzeln der rechten Seite und kann dieselbe daher nach dem Hilfssatze in IV. 5 in die n linearen Factoren $x - x_r$ zerlegen. Auf diese Art findet man, wenn man $n = 2k+1$ und $\arcsin x = y$ also $x = \sin y$ setzt und y nicht Null und kein Vielfaches von π sein läfst,

$$\frac{\sin ny}{\sin y} = (-1)^k 2^{n-1} \prod_{1}^{k}{}_{r}\left(\sin y^2 - \left(\sin\frac{r\pi}{n}\right)^2\right). \quad (1)$$

Vollzieht man hier den Grenzübergang lim $y = 0$, wobei man

für die Sinusse links die Potenzreihen zu setzen hat, so ergiebt sich die Formel

$$n = (-1)^k 2^{n-1} \prod_1^k \left(-\sin\left(\frac{r\pi}{n}\right)^2\right).$$

Dividirt man (1) durch dieselbe und schreibt statt ny x, so folgt

$$\frac{\sin x}{n \sin \frac{x}{n}} = \prod_1^k \left(1 - \left[\frac{\sin \frac{x}{n}}{\sin \frac{r\pi}{n}}\right]^2\right) = \mathsf{P}_n .$$

Denkt man sich hier x constant und von Null verschieden, und läfst die ungerade Zahl n ins Unendliche wachsen, so erhält man zunächst die Formel

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n=+\infty} \mathsf{P}_n . \tag{2}$$

Der Ausdruck rechts läfst sich in ein unendliches Product verwandeln. Das beruht hauptsächlich auf dem folgenden Satze. „Setzt man

$$\prod_{m+1}^k \left\{1 - \left[\frac{\sin \frac{x}{n}}{\sin \frac{r\pi}{n}}\right]^2\right\} = R_m^{(n)} \quad [m < k = \tfrac{1}{2}(n-1)],$$

so läfst sich jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl μ so zuordnen, dafs für

$$m > \mu \quad |R_m^{(n)} - 1| < \varepsilon \tag{3}$$

ist, welchen der Werthe $2m+3$ $2m+5$ ... in inf. n auch annehmen mag."

Zunächst ist, wie leicht einzusehen,

$$|R_m^{(n)} - 1| < \prod_{m+1}^k \left\{1 + \frac{\left|\sin \frac{x}{n}\right|^2}{\left(\sin \frac{r\pi}{n}\right)^2}\right\} - 1 . \tag{4}$$

Da $n > 2m+1$ ist, so kann man vorerst für m eine untere Grenze M so festsetzen, dafs für

$$m > M \quad \left|\sin \frac{x}{n}\right| < \frac{2X}{n} \quad (|x| = X)$$

ist. Bekanntlich ist

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \left\{\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right\};$$

es mufs also eine positive Zahl δ geben, derart dafs für

$$|z| < \delta \quad |\sin z| : |z| < 2$$

ist. Man darf somit $M = X : 2\delta$ setzen. In II. 11 ist gezeigt, dafs die Function $\sin\tau : \tau$, während τ von Null bis $\frac{\pi}{2}$ geht, beständig abnimmt; es ist somit

$$\sin\frac{r\pi}{n} : \frac{r\pi}{n} > \frac{2}{\pi} \quad \text{d. i.} \quad \sin\frac{r\pi}{n} > \frac{2r}{n}.$$

Man schliefst also aus (4), dafs für $m > M$

$$|R_m^{(n)} - 1| < \prod_{m+1}^{k}\left\{1 + \frac{X^2}{r^2}\right\} - 1 \tag{5}$$

ist. Nun ist zufolge Nr. 4 das Product

$$\prod_{0}^{\infty}\left(1 + \frac{X^2}{r^2}\right)$$

unbedingt convergent und nicht Null; es hat also nach dem 2. Satze in Nr. 2

$$Q_m = \prod_{m+1}^{\infty}\left(1 + \frac{X^2}{r^2}\right)$$

bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 1. Da aber nach (5) für $m > M$

$$|R_m^{(n)} - 1| < Q_m - 1$$

ist, so ist der vorstehende Satz erwiesen.

Setzt man

$$P_n : R_m^{(n)} = \prod_{1}^{m}\left(1 - \left[\frac{\sin\frac{x}{n}}{\sin\frac{r\pi}{n}}\right]^2\right) = P_m^{(n)},$$

so hat man bei jedem festen Werthe von m

$$\lim_{n=+\infty} P_m^{(n)} = \prod_{1}^{m}\left(1 - \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right) = p_m. \tag{6}$$

Wenn man in (3) $R_m^{(n)}$ durch $P_n : P_m^{(n)}$, ε durch eine kleinere Zahl ε' und entsprechend μ durch μ' ersetzt, m constant

sich denkt und n in's Unendliche wachsen läfst, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (2) und (6), dafs für

$$m > \mu' \qquad \left| \frac{\sin x}{x} : p_m - 1 \right| < \varepsilon$$

ist. Man findet also

$$\lim_{m=+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} : p_m \right) = 1 \quad \text{d. i.} \quad \lim_{m=+\infty} p_m = \frac{\sin x}{x},$$

$$\sin x = x \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{r^2 \pi^2} \right). \tag{7}$$

Diese Formel gilt auch für $x = 0$, somit für jeden endlichen Werth von x und zwar befindet sich rechts stets ein unbedingt convergentes Product. Schreibt man aber

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdots, \tag{8}$$

so convergirt zwar das links stehende Product, aber nur bedingt (Nr. 6); es liefert also nicht bei jeder Anordnung der Factoren den Grenzwerth $\sin x$.

Aus (8) ergiebt sich die Formel

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{x}{y} \left(\frac{\pi - x}{\pi - y}\right)\left(\frac{\pi + x}{\pi + y}\right)\left(\frac{2\pi - x}{2\pi - y}\right)\left(\frac{2\pi + x}{2\pi + y}\right) \cdots$$

mit einem ebenfalls bedingt convergenten Producte. Ersetzt man in ihr x durch $\frac{1}{2}\pi - x$ und y durch $\frac{1}{2}\pi$, so folgt

$$\cos x = \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2x}{3\pi}\right) \cdots$$

und, wenn man je zwei aufeinanderfolgende Factoren vereinigt,

$$\cos x = \prod_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2s+1)^2 \pi^2} \right). \tag{9}$$

In dieser auch für jeden endlichen Werth von x geltenden Formel kommt wieder ein unbedingt convergentes Product vor.

Setzt man in (8) $x = \frac{1}{2}\pi$, so ergiebt sich der Wallis'sche Ausdruck für $\frac{1}{2}\pi$:

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

Das wahre Wesen solcher Formeln wie (7) und (9) tritt durch die folgende Bemerkung schon deutlicher hervor. Setzt man z. B. in

(7) statt x $\frac{1}{2}xi$ und multiplicirt hierauf mit $2e^{\frac{1}{2}xi}$, so erhält man die für alle endlichen Werthe von x geltende Formel

$$e^x - 1 = xe^{\frac{1}{2}x} \prod_1^\infty \left\{1 + \frac{x^2}{4r^2\pi^2}\right\}.$$

Auf der rechten Seite steht jeder der Wurzeln der Gleichung $e^x = 1$ entsprechend ein Factor $1 \pm x : 2r\pi i$. Werden sie paarweise in der angedeuteten Weise zusammengefafst, so erhält man das unbedingt convergente Product

$$x \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x^2}{4r^2\pi^2}\right),$$

das nach dem 2. Satze in Nr. 5 unmittelbar in eine beständig convergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ verwandelt werden kann. Der Quotient

$$(e^x - 1) : \mathfrak{P}(x)$$

ist eine eindeutige Function, die in allen eigentlichen Punkten der Ebene holomorph ist. Er mufs somit nach dem 1. Satze in V. 20 eine beständig convergente Reihe $\mathfrak{Q}(x)$ sein, welche für keinen endlichen Werth von x verschwindet. Die Schwierigkeit der Aufgabe, die Functionen $\sin x$, $e^x - 1$ durch ein unendliches Product darzustellen, besteht in der Bestimmung der bezüglichen ganzen rationalen oder transcendenten Function $\mathfrak{Q}(x)$.[6])

8. Die Entwickelung der Functionen $\cot x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ in Partialbrüche.[7])

Setzt man in (7) anstatt x $x + a$, so erhält man

$$\sin(x + a) = (x + a) \prod_1^\infty \frac{r^2\pi^2 - x^2 - 2xa - a^2}{r^2\pi^2}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch (7), so ergiebt sich die für jeden Werth von a und x aufser

$$x = r\pi \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

geltende Formel

$$\cos a + \cot x \sin a = \left(1 + \frac{a}{x}\right) \prod_1^\infty \left(1 - \frac{2xa + a^2}{r^2\pi^2 - x^2}\right). \quad (10)$$

Das Product rechts kann nach dem 3. Satze in Nr. 5 in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von a entwickelt werden. Ist nämlich s eine solche natürliche Zahl, dafs

$$s\pi > |x| = X$$

ist, so hat man für

$$r > s \qquad |r^2\pi^2 - x^2| > r^2\pi^2 - X^2$$

$$\frac{2XA + A^2}{|r^2\pi^2 - x^2|} < \frac{2XA + A^2}{r^2\pi^2 - X^2},$$

worin $A = |a|$ ist. Daraus folgt unmittelbar, dafs die unendliche Reihe

$$\sum_s^\infty{}_r \frac{2XA + A^2}{|r^2\pi^2 - x^2|}$$

convergirt.

Entwickelt man nun in (10) die linke und rechte Seite nach Potenzen von a und setzt die Coefficienten von a auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man die für jeden Werth von x aufser $x = r\pi$ giltige Formel

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_1^\infty{}_r \frac{2x}{r^2\pi^2 - x^2}. \tag{11}$$

$\cot x$ ist eine eindeutige Function von x, welche in allen eigentlichen Punkten aufser $x = n\pi$, wo n jede ganze Zahl sein kann, holomorph ist. In der Umgebung von $x = 0$ hat man nach der Formel (17) u.

$$\cot x = \frac{1}{x} - 2B_1 x - \frac{2}{3} B_2 x^3 - \cdots$$

Daraus folgt vermöge der Relation $\cot x = \cot(x - n\pi)$ für alle Werthe von x, wofür $|x - n\pi|$ klein genug ist,

$$\cot x = \frac{1}{x - n\pi} - 2B_1 (x - n\pi) - \frac{2}{3} B_2 (x - n\pi)^3 - \cdots$$

Da nun

$$-\frac{2x}{r^2\pi^2 - x^2} = \frac{1}{x - r\pi} + \frac{1}{x + r\pi}$$

ist, sodafs in (11) die Glieder mit negativen Exponenten in der Entwickelung der $\cot x$ in der Umgebung eines jeden ihrer Pole erscheinen, so bezeichnet man die Formel (11) als die Zerlegung von $\cot x$ in Partialbrüche. Bringt man (11) in die Form

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_1^\infty{}_r \left\{\frac{1}{x - r\pi} + \frac{1}{x + r\pi}\right\}, \tag{12}$$

läfst die Klammern weg und setzt statt x $\frac{1}{2}\pi - x$, so er-

hält man die Zerlegung von $\tan x$ in Partialbrüche d. i. die Formel

$$\tan x = -\frac{2}{2x-\pi} - \frac{2}{2x+\pi} - \frac{2}{2x-3\pi} - \frac{2}{2x+3\pi} - \cdots$$

$$= \sum_1^\infty \frac{8x}{(2r-1)^2\pi^2 - 4x^2}, \tag{13}$$

welche für alle Werthe von x aufser den von der Form $x = \frac{1}{2}(2r-1)\pi$ gilt.

Die Reihen in (11) (13) (15) (16) haben die Eigenthümlichkeit, dafs wenn eine positive Zahl C beliebig vorgelegt wird, sie für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag C nicht übersteigt, mit Ausnahme der Pole der bez. Function absolut und gleichmäfsig convergiren (s. u.) Wir schliefsen daraus, dafs z. B. die Reihe auf der rechten Seite von (11) von $\cot x$ sich nur um eine beständig convergente Potenzreihe von x unterscheiden kann. Unsere Untersuchung zeigt, dafs die letztere Reihe identisch gleich Null ist.

Mittelst der Formel

$$\cot \tfrac{1}{2}x + \tan \tfrac{1}{2}x = \frac{1}{\sin x} \tag{14}$$

findet man aus (12) und (13) die für alle Werthe von x aufser $x = r\pi$ geltende Gleichung

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-\pi} - \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \frac{1}{x+2\pi} - \cdots$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_1^\infty (-1)^{r-1} \frac{2x}{r^2\pi^2 - x^2}. \tag{15}$$

Setzt man hier statt x $\frac{1}{2}\pi - x$, so folgt

$$\frac{1}{\cos x} = -\frac{2}{2x-\pi} + \frac{2}{2x+\pi} + \frac{2}{2x-3\pi} - \frac{2}{2x+3\pi} - \frac{2}{2x-5\pi} + \cdots$$

$$= \sum_1^\infty (-1)^{r-1} \frac{4(2r-1)\pi}{(2r-1)^2\pi^2 - 4x^2}. \tag{16}$$

9. Die Potenzreihen für die Functionen $x \cot x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$.

Wir sind nunmehr im Stande, die Entwickelung der Function $x \cot x$ in eine Reihe nach Potenzen von x auf

zwei Wegen herzustellen. Zunächst zeigt uns die Definition der Function

$$x \cot x = x \sin x : \cos x$$

nach V. 19, dafs sie eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x liefert, deren Convergenzkreis den Radius π hat. Da $x \cot x = (-x) \cot (-x)$ ist, so kommen in der Reihe nur die Potenzen mit geraden Exponenten vor. Um die Coefficienten derselben zu ermitteln, geht man besser von der Function $\frac{1}{2} x \cot \frac{1}{2} x$ aus. Es sei also

$$\tfrac{1}{2} x \cot \tfrac{1}{2} x = k_0 + k_1 x^2 + k_2 x^4 + \cdots + k_s x^{2s} + \cdots$$

Da

$$\cot \tfrac{1}{2} x = i \frac{e^{\frac{1}{2}xi} + e^{-\frac{1}{2}xi}}{e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi}} = i \frac{e^{xi} + 1}{e^{xi} - 1} = i + \frac{2i}{e^{xi} - 1}$$

$$\tfrac{1}{2} x (\cot \tfrac{1}{2} x - i)(e^{xi} - 1) = xi,$$

also für $|x| < \pi$

$$(k_0 - \tfrac{1}{2} xi + k_1 x^2 + k_2 x^4 + \cdots)\left\{1 + \frac{xi}{2!} + \frac{(xi)^2}{3!} + \cdots\right\} = 1$$

ist, so erhalten wir zunächst $k_0 = 1$ und damit, indem wir die Coefficienten von x^{2n} und x^{2n+1} links gleich Null setzen, für die k_n die Gleichungen

$$1 - \frac{2n+1}{2} + \sum_1^n (-1)^s \binom{2n+1}{2s} 2s!\ k_s = 0$$

$$1 - \frac{2n+2}{2} + \sum_1^n (-1)^s \binom{2n+2}{2s} 2s!\ k_s = 0.$$

$(n = 1, 2 \cdots)$

Sie stimmen überein mit dem Systeme (7) von Recursionsgleichungen in IV. 12. Wir finden demnach für die in den letzteren vorkommenden Unbekannten d_r

$$d_{2s} = 0 \qquad d_{2s-1} = (-1)^s k_s 2s!$$

und umgekehrt

$$k_s = \frac{(-1)^s d_{2s-1}}{2s!} = -\frac{B_s}{2s!}, \quad (s = 1, 2 \cdots)$$

wo $B_1, B_2 \ldots$ wie bisher die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten.

Demnach ergiebt sich für alle Werthe von x, wofür $|x| < \pi$ ist, die Entwickelung

$$x \cot x = 1 - \sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2s} B_s}{2s!} x^{2s}. \tag{17}$$

Die nämliche Potenzreihe erlangen wir aus (11), indem wir in der Reihe rechts

$$\frac{1}{r^2\pi^2 - x^2} = \frac{1}{r^2\pi^2} + \frac{x^2}{r^4\pi^4} + \cdots + \frac{x^{2s-2}}{r^{2s}\pi^{2s}} + \cdots \quad (r = 1, 2 \ldots)$$

setzen, was für $|x| < \pi$ angeht, und die Doppelreihe nach Potenzen von x ordnen.[8]) Das ist zulässig, indem die Reihe in (11) gleichmäfsig convergirt für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag irgend eine positive Zahl C nicht übersteigt, mit Ausnahme der Pole von $\cot x$. Man hat nämlich, wenn nur n so gewählt ist, dafs $n\pi + \pi > C$ ist,

$$\left| \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{r^2\pi^2 - x^2} \right| \leqq \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{r^2\pi^2 - |x|^2} < \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{r^2\pi^2 - C^2}.$$

Ist wie in VI. 12 für $n \geqq 2$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{r^n} = S_n,$$

so folgt demnach für $|x| < \pi$

$$x \cot x = 1 - \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{\pi^{2s}} S_{2s} x^{2s}. \tag{18}$$

Durch Vergleichung der hier erscheinenden Coefficienten mit denen in (17) gelangen wir zur Formel

$$B_s = \frac{2s!}{2^{2s-1}\pi^{2s}} S_{2s}. \qquad (s \geqq 1). \tag{19}$$

Somit ist $S_{2s} : \pi^{2s}$ eine rationale Zahl; wir finden

$$S_{2s} = \frac{2^{2s-1} B_s}{2s!} \pi^{2s} \text{ d. i. } S_2 = \frac{\pi^2}{6} \quad S_4 = \frac{\pi^4}{90} \text{ u. s. w.}$$

Es ist aus (18) ersichtlich, dafs die Glieder der $x \cot x$-Reihe für die Werthe von x, deren absoluter Betrag π ist, dem absoluten Betrage nach zwischen 2 und $2S_2$ liegen. Daraus erkennt man zunächst wieder, dafs die genannte Reihe für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner als π ist, convergirt (V. 7), und ferner, dafs sie schon für alle Werthe des absoluten Betrages π divergirt.

Mittelst der Formel

$$\cot \tfrac{1}{2}x - \tan \tfrac{1}{2}x = 2 \cot x$$

d. i.

$$\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$$

ergiebt sich aus (17) die Potenzreihe für die Tangente

$$\tan x = \sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2s}(2^{2s}-1)}{2s!} B_s x^{2s-1}. \qquad (20)$$

Aus (17) und (20) folgt mit Hilfe von (14) die Cosecantenreihe

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2(2^{2s-1}-1)}{2s!} B_s x^{2s-1}. \qquad (21)$$

Der Convergenzkreis der Potenzreihe (20) hat den Radius $\frac{\pi}{2}$, der von (21) den Radius π, wie man mittelst der Formel (19) auch aus den Coefficienten derselben erkennt. Auf diesem Wege findet man ferner, dafs jede in allen Punkten ihres Convergenzkreises divergirt.

10. Einiges über die Bernoulli'schen Zahlen.

Aus der Formel (19) lassen sich zwei Eigenschaften dieser Zahlen entnehmen. 1) Die Bernoulli'schen Zahlen B_s sind positiv. 2) Sie wachsen vom Werthe $s = 3$ an mit dem Index s beständig und ins Unendliche. Nach (19) ist nämlich

$$\frac{B_{s+1}}{B_s} = \frac{(2s+1)(s+1)}{2\pi^2} \frac{S_{2s+2}}{S_{2s}}. \qquad (22)$$

Nun ist vermöge der in VI. 12 bewiesenen Ungleichung

$$0 < S_n - 1 < 1 : 2^{n-2}$$

$$\lim_{n=+\infty} S_n = 1,$$

also

$$\lim_{s=+\infty} \frac{B_{s+1}}{B_s} = +\infty,$$

woraus der zweite Satz nach X. 4. d. I. T. sofort folgt. Nur ist noch zu bestimmen, von welchem Werthe von s an die B_s wachsen. Da

$$S_{2s+2} > 1 \qquad S_{2s} \leqq S_2 = \frac{1}{6}\pi^2$$

ist, so ergiebt sich aus (22) für $s \geqq 4$

$$B_{s+1} : B_s > 3\,(2s+1)\,(s+1) : \pi^4 > 1.$$

Aus den Werthen

$$B_1 = \frac{1}{6} \quad B_2 = \frac{1}{30} \quad B_3 = \frac{1}{42} \quad B_4 = \frac{1}{30}$$

entnimmt man noch, dafs zwar $B_1 > B_2 > B_3$, jedoch schon $B_3 < B_4$ ist.

Mit Hilfe der Gleichung (20) gelangt man zu einer weiteren Eigenschaft der Zahlen B_s.

3. Die positiven Zahlen

$$\frac{1}{s}\,2^{2s-1}(2^{2s}-1)\,B_s = T_s, \quad (s = 1, 2 \ldots),$$

welche Tangentencoefficienten heifsen, sind ganz und wachsen mit dem Index s beständig. — Mit Benutzung der Coefficienten T_s nimmt die Formel (20) die Gestalt

$$\tan x = \sum_1^\infty \frac{T_s}{(2s-1)!}\,x^{2s-1}$$

an. Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit der Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

so mufs links die Sinusreihe erscheinen. Vergleicht man die Coefficienten von x^{2s-1} auf beiden Seiten der so erhaltenen Gleichung, so findet man die Relation

$$(-1)^{s-1} = T_s - \binom{2s-1}{2} T_{s-1} + \binom{2s-1}{4} T_{s-2} - \cdots + (-1)^{s-1}\binom{2s-1}{2s-2} T_1,$$

woraus erhellt, dafs neben $T_1 = 1$ auch $T_2,\ T_3 \ldots T_s \cdots$ ganze Zahlen sind. Man hat

$$T_2 = 2 \quad T_3 = 16 \quad T_4 = 272 \quad T_5 = 7936 \text{ u. s. w.}$$

Stern hat gezeigt[9]), dafs von T_2 an die Tangentencoefficienten abwechselnd mit den Ziffern 2 oder 6 schliefsen.

4) Setzt man in der Potenzreihe für $\frac{1}{2}x \cot \frac{1}{2}x$ in Nr. 9 anstatt $x = -yi$, so erhält man die Entwickelung

$$\frac{1}{e^y - 1} = \frac{1}{y} - \tfrac{1}{2} + \sum_1^\infty (-1)^{s-1}\,\frac{B_s}{2s!}\,y^{2s-1}. \qquad (|y| < 2\pi).$$

Die Euler'schen Zahlen schliefsen abwechselnd mit den Ziffern 1 und 5.[10])

Die Reihenentwickelung

$$\sec x = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}_s x^{2s}}{2s!} \quad (|x| < \tfrac{1}{2}\pi) \tag{23}$$

läfst sich auch aus der Partialbruchentwickelung der Secante ableiten. Setzt man in (16)

$$\frac{(2r-1)\pi}{(2r-1)^2\pi^2 - 4x^2} = \frac{1}{(2r-1)\pi} + \frac{2^2x^2}{(2r-1)^3\pi^3} + \frac{2^4x^4}{(2r-1)^5\pi^5} + \cdots,$$

so darf man die Doppelreihe nach Potenzen von x ordnen, wenn nur $|x|$ kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ angenommen wird. Durch Vergleichung der Coefficienten der so erhaltenen Potenzreihe für sec x mit denen in (23) ergeben sich die Formeln

$$\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{2r-1} = 1$$

$$\frac{2^{2s+2}}{\pi^{2s+1}}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^{2s+1}} = \frac{\mathsf{E}s}{2s!}, \quad (s \geqq 1), \tag{24}$$

wovon die erste schon in VI. 7 bemerkt ist. Sie dienen einerseits zur Berechnung der Summen der Reihen

$$S'_{2s-1} = 1 - \frac{1}{3^{2s-1}} + \frac{1}{5^{2s-1}} - \cdots, \quad (s \geqq 1),$$

andererseits zum Beweise des Satzes, dafs die Euler'schen Zahlen positiv sind und mit dem Index beständig wachsen. Das letztere folgt unmittelbar durch Betrachtung des Quotienten $\mathsf{E}_{s+1} : \mathsf{E}_s$, indem S'_{2s+1} mit s beständig wächst zufolge der Ungleichungen

$$S'_{2s+1} > 1 - \frac{1}{3^{2s+1}} > 1 - \frac{1}{3^{2s-1}} + \frac{1}{5^{2s-1}} > S'_{2s-1}.$$

Da die Glieder

$$b_s\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2s} = \frac{4}{\pi}S'_{2s+1}$$

zwischen 1 und $\frac{4}{\pi}$ liegen, so erkennt man, dafs der Con-

vergenzkreis der Reihe (23) in der That den Radius $\frac{1}{2}\pi$ hat und dafs sie in allen Punkten desselben divergirt.

12. Die Potenzreihen für $l \sin x$ und $l \cos x$.[11])

Mit Hilfe des zweiten Satzes in Nr. 5 leitet man aus (8) und (9) unmittelbar die Formeln

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\sum_1^\infty \frac{1}{s} S_{2s} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2s}$$

$$l \cos x = -\sum_1^\infty \frac{1}{s} S''_{2s} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2s}$$

ab, worin

$$S_s'' = 1 + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{5^{2s}} + \cdots$$

ist. Die erstere gilt sicher für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner als π, die letztere für solche, deren Betrag kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist. Die Coefficienten in den beiden Reihen sind rationale Zahlen. Zufolge (19) hat man zunächst

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\sum_1^\infty \frac{2^{2s-1} B_s}{2s!\, s} x^{2s}. \tag{25}$$

Zerlegt man S_{2s} in die Summe der Glieder mit ungeradem und die der Glieder mit geradem Nenner, so findet man

$$S_{2s}'' + \frac{1}{2^{2s}} S_{2s} = S_{2s}$$

$$S_{2s}'' = \frac{2^{2s}-1}{2^{2s}} S_{2s} = \frac{(2^{2s}-1)\, B_s}{2s!\, 2} \pi^{2s} = \frac{T_s}{2^{2s+1}(2s-1)!} \pi^{2s}. \tag{26}$$

Damit ergiebt sich die Formel

$$l \cos x = -\sum_1^\infty \frac{(2^{2s}-1)\, 2^{2s-1} B_s}{2s!\, s} x^{2s} = -\sum_1^\infty \frac{T_s}{2s!} x^{2s}. \tag{27}$$

Durch Subtraction von (25) und (27) erhält man die Entwickelung

$$l\left(\frac{\tan x}{x}\right) = \sum_1^\infty \frac{(2^{2s-1}-1)\, 2^{2s} B_s}{2s!\, s} x^{2s}. \tag{28}$$

Die Reihen (25), (27), (28) sind nach Multiplication mit

dem Modulus der gemeinen Logarithmen geeignet zur Berechnung von

$$\log \sin x \quad \text{und} \quad \log \cos x,$$

sowie der Hilfszahlen

$$S = \log \frac{\sin x}{x} + \log \text{arc } 1''$$

$$T = \log \frac{\tan x}{x} + \log \text{arc } 1'',$$

welche in neueren Tafelwerken für kleine Werthe von x aufgeführt werden.

Da $S_{2s} : s$ bei wachsendem s beständig und ins Unendliche abnimmt, so convergirt die Potenzreihe (25) nach dem Corollar zum 3. Satze in V. 4 für alle Werthe von x vom absoluten Betrage π mit Ausschlufs der Werthe $x = \pm\pi$. Für die genannten Werthe besteht also auch die Gleichung (25). Auf ähnliche Weise zeigt man, dafs die Formel (27) auch gilt für alle Werthe x vom absoluten Betrage $\frac{\pi}{2}$ aufser $x = \pm \frac{1}{2}\pi$. Daraus folgt dann von selbst das Nämliche bezüglich der Formel (28).

13. Die Functionen $\cot x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ gestatten zufolge des 3. Satzes in V. 20 auch Entwickelungen nach ganzen positiven und negativen Potenzen von x. Das kann man mit Hilfe ihrer Partialbruchentwickelungen leicht einsehen.

Betrachten wir z. B. $\tan x$ für die Werthe von x, deren absoluter Betrag zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegt. Setzt man in (13)

$$\frac{8x}{\pi^2 - 4x^2} = -\frac{2}{x\left(1 - \frac{\pi^2}{4x^2}\right)} = -\sum_0^{\infty} \frac{\pi^{2s}}{2^{2s-1}\, x^{2s+1}}$$

$$\frac{8x}{(2r-1)^2\pi^2 - 4x^2} = \sum_1^{\infty} \frac{2^{2s+1}\, x^{2s-1}}{(2r-1)^{2s}\, \pi^{2s}} \qquad (r = 2, 3 \ldots),$$

so darf man die Reihe (13) wegen ihrer gleichmäfsigen Convergenz für alle die genannten Werthe von x nach Potenzen von x ordnen (V. 16). Somit ergiebt sich, wenn

$$\tfrac{1}{2}\pi < |x| < \tfrac{3}{2}\pi$$

ist, die Gleichung

$$\tan x = -\sum_{0}^{\infty}{}_s \frac{\pi^{2s}}{2^{2s-1}\, x^{2s+1}} + \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{2^{2s+1}}{\pi^{2s}}\, x^{2s-1} \sum_{2}^{\infty}{}_r \frac{1}{(2r-1)^{2s}}.$$

Mit Hilfe der Formel (26) findet man für den Coefficienten des allgemeinen Gliedes im zweiten Theile

$$\frac{2^{2s+1}}{\pi^{2s}} \sum_{2}^{\infty}{}_r \frac{1}{(2r-1)^{2s}} = \frac{T_s}{(2s-1)!} - \frac{2^{2s+1}}{\pi^{2s}}.$$

Die vieldeutigen Functionen $\log \sin x$, $\log \cos x$ lassen sich mit Hilfe der Formeln (7) und (9) in ähnlicher Weise entwickeln, es tritt aber zu den ganzen Potenzen von x noch ein Glied mit $\log x$.

VIII. Abschnitt.

Die Kettenbrüche.

1. Ein Ausdruck von der Form

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots + \cfrac{a_m}{b_m}}}} \qquad (1)$$

heifst ein Kettenbruch, $a_1\ a_2 \ldots a_m$ seine Theilzähler, $b_1\ b_2 \ldots b_m$ seine Theilnenner. Die Brüche $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_m}{b_m}$ heifsen der Reihe nach das erste, zweite ... m^{te} Glied des Kettenbruches (1). Er wird auch mit

$$b_0 + \frac{a_1}{b_2} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_m}{b_m}$$

bezeichnet, wo die über das Zeichen + (oder —) gesetzten Punkte andeuten, dafs das Folgende zu dem jedesmal vorhergehenden Nenner gehört. Die $a_n\ b_n$ sind beliebige reelle oder complexe Zahlen, nur soll keiner der Theilzähler Null sein und es dürfen den Theilzählern und Theilnennern keine solchen Werthe beigelegt werden, dafs der Ausdruck (1) unmöglich ist. Um zu ermitteln, ob der Ausdruck einen Sinn hat, sucht man ihn in einen gewöhnlichen Quotienten zu verwandeln. Man hat, wenn b_m nicht Null ist,

$$b_{m-1} + \frac{a_m}{b_m} = \frac{b_{m-1}\, b_m + a_m}{b_m},$$

ferner, wenn $b_{m-1}\, b_m + a_m$ nicht Null ist,

$$b_{m-2} + \frac{a_{m-1}}{b_{m-1}} + \frac{a_m}{b_m} = \frac{b_{m-2}\, b_{m-1}\, b_m + b_{m-2}\, a_m + b_m\, a_{m-1}}{b_{m-1}\, b_m + a_m}$$

u. s. f. Man wandelt die Brüche

$$V_{n,m} = b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} + \cdots + \frac{a_m}{b_m} \quad (m-1 \geqq n \geqq 0) \quad (2)$$

nach einander rein formell um d. h. man beschränkt sich auf die Anwendung der Regeln

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c} \qquad a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$$

und unterläfst, einen der dabei auftretenden Brüche dadurch umzugestalten, dafs man Zähler und Nenner mit derselben Zahl dividirt oder multiplicirt. Die auf diese Weise zu Stande gebrachten Zähler und Nenner von $V_{n,m}$ seien mit $Z_{n,m}$ $N_{n,m}$ bezeichnet. Es ist aus dem Vorstehenden ersichtlich, dafs der Kettenbruch (2) oder $V_{n,m}$ dann und nur dann eine Bedeutung hat, wenn keiner der Ausdrücke b_m, $Z_{m-1,m}$, $Z_{m-2,m} \ldots Z_{n+1,m}$ verschwindet — und der Kettenbruch (1) oder $V_{0,m}$ insbesondere dann und nur dann, wenn b_m, $Z_{m-1,m}, \ldots Z_{1,m}$ von Null verschieden sind.

Aus der Gleichung

$$V_{n,m} = b_n + a_{n+1} : \frac{Z_{n+1,m}}{N_{n+1,m}} \qquad (n < m-2)$$

ergeben sich demnach die Formeln

$$Z_{n,m} = b_n\, Z_{n+1,m} + a_{n+1}\, N_{n+1,m} \qquad N_{n,m} = Z_{n+1,m}, \quad (3)$$

woraus man schliefst

$$Z_{n,m} = b_n\, Z_{n+1,m} + a_{n+1}\, Z_{n+2,m}. \quad (4)$$

Führt man noch die Bezeichnungen

$$Z_{m,m} = b_m \quad N_{m,m} = 1 \quad V_{m,m} = b_m,$$
$$Z_{m+1,m} = 1 \quad N_{m+1,m} = 0$$

ein, so gelten die Formeln (3) auch für $n = m-1$ und m, (4) auch für $n = m-2$ und $m-1$.

Man findet in der That

$$N_{m,m} = Z_{m+1,m} = 1 \quad N_{m-1,m} = Z_{m,m} = b_m$$
$$N_{m-2,m} = Z_{m-1,m} = b_{m-1}\, b_m + a_m$$
$$N_{m-3,m} = Z_{m-2,m} = b_{m-2}\, b_{m-1}\, b_m + b_{m-2}\, a_m + a_{m-1}\, b_m. \quad (5)$$

Die Formel (4) dient dann zur recurrirenden Entwickelung von $Z_{n,m}$ für $n \geqq m-3$. Durch den Schluſs von n auf $n+1$ wird man leicht finden, daſs in $Z_{n,m}$ das Glied $b_n\, b_{n+1} \ldots b_m$ vorkommt, während alle übrigen mindestens einen Theilzähler als Factor enthalten. — Durch die successive Berechnung der Zahlen $Z_{m-1,m}$, $Z_{m-2,m} \ldots Z_{n,m}$ erfährt man, ob der Ausdruck (1) möglich ist und gelangt, falls dem in der That so ist, auf die kürzeste Weise zur Kenntniſs seines Werthes. Die folgenden Untersuchungen haben hinsichtlich der endlichen Kettenbrüche zunächst nur den Zweck, Zahlen zu gewinnen, welche ihren Werthen auf leicht zu beurtheilende Weise sich nähern.

Manchmal gebraucht man anstatt $Z_{n,m}$ $N_{n,m}$ die Zähler und Nenner $Z'_{n\,m}$ $N'_{n\,m}$, welche sich bei rein formeller Umwandlung der Brüche

$$E_{n,m} = \frac{a_n}{b_n} \dot{+} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_m}{b_m} \quad (m \geqq n \geqq 1) \qquad (6)$$

ergeben. Da

$$E_{n,m} = a_n : \frac{Z_{n,m}}{N_{n,m}}$$

ist, so hat man

$$Z'_{n,m} = a_n N_{n,m} \quad N'_{n,m} = Z_{n,m}. \qquad (7)$$

Man fügt hinzu

$$Z'_{m+1,m} = 0 \quad N'_{m+1,m} = 1 \quad E_{m+1,m} = 0.$$

2. Aus der Grundformel (4) läſst sich eine Relation ableiten, vermittelst welcher $Z_{n,m}$ aus $Z_{n,m-2}$ und $Z_{n,m-1}$ berechnet werden kann, so daſs man bei Verwandlung der Kettenbrüche (2) in gewöhnliche Quotienten auch von links nach rechts fortschreiten kann. Ein Blick auf die Formeln (4) und (5) zeigt, daſs $Z_{n,m}$, falls $n \leqq m$ ist, eine homogene lineare Function von $a_m b_m$ sein muſs, deren Coefficienten ganze Functionen der Theilzähler und Theilnenner $a_n b_n$, $a_{n+1} b_{n+1} \cdots a_{m-1} b_{m-1}$ sind. Setzt man

$$Z_{n,m} = a_m A_{n,m} + b_m B_{n,m}$$

und führt diese Bezeichnung in (4) durch, so folgt

$$a_m A_{n,m} + b_m B_{n,m} = a_m \{b_n A_{n+1,m} + a_{n+1} A_{n+2,m}\} + b_m \{b_n B_{n+1,m} + a_{n+1} B_{n+2,m}\}.$$

Bei der Willkürlichkeit von a_m b_m schliefst man nach dem 4. Satze in IV. 5, dafs

$$A_{n,m} = b_n A_{n+1,m} + a_{n+1} A_{n+2,m}$$
$$B_{n,m} = b_n B_{n+1,m} + a_{n+1} B_{n+2,m}$$

ist. Diese Gleichungen sind beide von derselben Form wie (4). Daraus folgt, dafs wenn für einen bestimmten Werth von n

$$A_{n,m} = Z_{n,m-2} \qquad B_{n,m} = Z_{n,m-1}$$

ist, diese Gleichungen für jeden Werth von n bestehen. Es ist aber nach (5)

$$\begin{aligned} A_{m-1,m} &= 1 = Z_{m-1,m-2} \\ B_{m-1,m} &= b_{m-1} = Z_{m-1,m-1}. \end{aligned} \tag{7*}$$

Demnach ergiebt sich für $n < m$ die Formel

$$Z_{n,m} = a_m Z_{n,m-2} + b_m Z_{n,m-1}, \tag{Ia}$$

welcher, da $Z_{n+1,m} = N_{n,m}$ ist, die folgende

$$N_{n,m} = a_m N_{n,m-2} + b_m N_{n,m-1} \tag{Ib}$$

an die Seite tritt. Mittelst derselben kann man aus den Werthen

$$Z_{n,n-1} = 1 \quad N_{n,n-1} = 0, \qquad Z_{n,n} = b_n \quad N_{n,n} = 1$$

nacheinander

$$Z_{n,n+1}\ Z_{n,n+2} \ldots Z_{n,m}, \qquad N_{n,n+1}\ N_{n,n+2} \ldots N_{n,m}$$

berechnen.

Führt man die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} &V_{0,p} = V_p \quad Z_{0,p} = Z_p \quad N_{0,p} = N_p \qquad (p = 1, 2 \ldots m) \\ &V_{0,0} = V_0 = b_0 \quad Z_{0,0} = Z_0 = b_0 \quad N_{0,0} = N_0 = 1 \\ &\text{und} \qquad Z_{0,-1} = Z_{-1} = 1 \quad N_{0,-1} = N_{-1} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

ein und setzt in (Ia) und (Ib) $n = 0$ und p an die Stelle von m, so ergeben sich daraus die Formeln

$$Z_p = a_p Z_{p-2} + b_p Z_{p-1} \qquad N_p = a_p N_{p-2} + b_p N_{p-1}, \tag{II}$$

welche zur recurrenten Bildung von Z_p und N_p dienen.[1]) Man findet nacheinander

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_1 + b_0 b_1 & N_1 &= b_1 \\ Z_2 &= b_0 a_2 + a_1 b_2 + b_0 b_1 b_2 & N_2 &= a_2 + b_1 b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots & & \end{aligned}$$

Man bezeichnet diejenigen unter den Brüchen

$$\frac{Z_0}{N_0}, \quad \frac{Z_1}{N_1} \cdots \frac{Z_{m-1}}{N_{m-1}},$$

die einen Sinn haben d. h. deren Nenner nicht Null ist, als Näherungsbrüche des Kettenbruches (1), dessen Werth $Z_m : N_m$ ist, wobei der Kettenbruch als möglich angenommen ist. In gewissen Fällen nämlich nähern sich diese Brüche dem Werthe $Z_m : N_m$ mit wachsendem Index beständig.

Die Formeln (I) und (II) können auch durch den Schluſs von n auf $n + 1$ bezw. von p auf $p + 1$ bewiesen werden.

3. Verallgemeinerung der Formeln (I) und (II).

Schreibt man in (Ia) statt m p und setzt

$$Z_{n,\,p-1} = a_{p-1}\, Z_{n,\,p-3} + b_{p-1}\, Z_{n,\,p-2},$$

so ergiebt sich gemäfs der Formeln (5)

$$\begin{aligned} Z_{n,\,p} &= a_{p-1}\, b_p\, Z_{n,\,p-3} + (a_p + b_{p-1}\, b_p)\, Z_{n,\,p-2} \\ &= a_{p-1}\, N_{p-1,\,p}\, Z_{n,\,p-3} + Z_{p-1,\,p}\, Z_{n,\,p-2}. \end{aligned}$$

Ersetzt man hier $Z_{n,\,p-2}$ durch $a_{p-2}\, Z_{n,\,p-4} + b_{p-2}\, Z_{n,\,p-3}$, so folgt

$$Z_{n,\,p} = a_{p-2}\, N_{p-2,\,p}\, Z_{n,\,p-4} + Z_{p-2,\,p}\, Z_{n,\,p-3}$$

u. s. f. Man schliefst daraus, dafs, wenn

$$n + 1 \leqq k \leqq p$$

ist,

$$Z_{n,\,p} = a_k\, N_{k,\,p}\, Z_{n,\,k-2} + Z_{k,\,p}\, Z_{n,\,k-1} \qquad \text{(IIIa)}$$

sein mufs. Nimmt man diese Formel als richtig an und setzt

$$Z_{n,\,k-1} = a_{k-1}\, Z_{n,\,k-3} + b_{k-1}\, Z_{n,\,k-2},$$

so findet man mit Hilfe der Formeln (3) sofort, dafs in der That

$$Z_{n,\,p} = a_{k-1}\, N_{k-1,\,p}\, Z_{n,\,k-3} + Z_{k-1,\,p}\, Z_{n,\,k-2}$$

ist. Auf ähnliche Art wird aus (I b) die Gleichung

$$N_{n,\,p} = a_k\, N_{k,\,p}\, N_{n,\,k-2} + Z_{k,\,p}\, N_{n,\,k-1} \qquad \text{(IIIb)}$$

abgeleitet. Unter der Voraussetzung, dafs keiner der Ausdrücke $Z_{k,\,p}\ Z_{k-1,\,p} \ldots Z_{n+1,\,p}$ Null ist, erweisen sich die Formeln (III) unmittelbar als Ergebnifs der Anwendung der

Regeln (II) auf den Kettenbruch

$$V_{n,p} = b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} + \frac{a_k N_{k,p}}{Z_{k,p}}.$$

Für $n = 0$ erhält man aus (III) die Formeln

$$\begin{aligned} Z_p &= a_k N_{k,p} Z_{k-2} + Z_{k,p} Z_{k-1} \\ N_p &= a_k N_{k,p} N_{k-2} + Z_{k,p} N_{k-1}, \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

die, falls $k = p$ ist, in (II) übergehen.

4. Die Formeln (I) und (II) leisten zunächst nur die recurrente Entwickelung gewisser ganzer, in jedem Paare a_n b_n linearen Functionen der Theilzähler und Theilnenner des Kettenbruches (1), die identisch den Relationen (III) bezw. (IV) genügen. Wenn man auch für N_m einen von Null verschiedenen Werth erhält, so ist damit noch nicht erwiesen, dafs der Ausdruck (1) möglich ist.

Der Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_p}{b_p} \quad (p \leqq m) \qquad (9)$$

hat nach Nr. 1 dann und nur dann einen Sinn, wenn keine der Zahlen

$$(b_p =)\ Z_{p,p}\, Z_{p-1,p} \ldots Z_{1,p}$$

Null ist. Ist $Z_{1,p} = N_p = 0$, so ist er ebensowenig möglich, als der Bruch $Z_p : N_p$. Wenn $Z_{k,p}$ $(2 \leqq k < p)$ die erste verschwindende Zahl in der vorstehenden Reihe ist, so bemerke man, dafs nach (IV)

$$Z_p = a_k N_{k,p} Z_{k-2} \qquad N_p = a_k N_{k,p} N_{k-2}$$

ist. Wenn nun N_{k-2} nicht Null ist, so hat demnach der Bruch $Z_p : N_p$ einen Sinn, während der Ausdruck (9) unmöglich ist. Und zwar ist

$$\frac{Z_p}{N_p} = \frac{Z_{k-2}}{N_{k-2}}.$$

Ist $N_{k-2} = 0$, so ist auch $N_p = 0$. Wir gelangen somit zum Schlusse: Wenn der Ausdruck (9), welcher auch den Kettenbruch (1) umfafst, sinnlos ist, so mufs entweder die durch die Gleichungen (II) gefundene Zahl $N_p = 0$ sein oder wenn N_p nicht Null ist, so mufs der Bruch $Z_p : N_p$ einem seiner Vorgänger, der

jedoch, wie auch (VI) zeigen wird, nicht der unmittelbare $Z_{p-1} : N_{p-1}$ sein kann, gleich sein. — Aehnliches gilt auch von den Ausdrücken $Z_{n,p}$ $N_{n,p}$ gegenüber dem Kettenbruche (2).

Beispiele von Kettenbrüchen, aus welchen durch Weglassung einiger Schlufsglieder unmögliche Kettenbrüche von der Form (9) entstehen, während die ihnen entsprechenden N_p nicht Null sind, die bezüglichen $Z_p : N_p$ also einen endlichen Werth haben. 1) Wie bereits erwähnt, ist, falls $b_m = 0$ und a_m, N_{m-2} von Null verschieden sind, der Bruch (1) unmöglich, während zufolge der aus (II) abgeleiteten Formeln

$$Z_m = a_m Z_{m-2} \qquad N_m = a_m N_{m-2},$$

$$\frac{Z_m}{N_m} = \frac{Z_{m-2}}{N_{m-2}}$$

ist. — Ist in (1)

$$b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = b_{n+r} = 0 \qquad (n + r < m)$$

b_n nicht Null, so ist der Kettenbruch (9) für

$$p = n + 1,\ n + 2 \ldots n + r$$

sinnlos. Man hat jetzt nach (II), wenn man $p = n + s$ setzt,

$$Z_{n+s} = a_{n+s} Z_{n+s-2}$$
$$N_{n+s} = a_{n+s} N_{n+s-2} \qquad (s = 1, 2 \ldots r),$$

somit, wenn $2l - 1$ bezw. $2l$ r nicht übersteigt,

$$Z_{n+2l-1} = a_{n+1}\, a_{n+3} \cdots a_{n+2l-1}\, Z_{n-1}$$
$$N_{n+2l-1} = a_{n+1}\, a_{n+3} \cdots a_{n+2l-1}\, N_{n-1}$$
$$Z_{n+2l} = a_{n+2}\, a_{n+4} \cdots a_{n+2l}\, Z_n$$
$$N_{n+2l} = a_{n+2}\, a_{n+4} \cdots a_{n+2l}\, N_n.$$

Sind N_{n-1} und N_n nicht Null, so ist demnach

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} = \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \cdots = \frac{Z_{n+2l-1}}{N_{n+2l-1}}$$
$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n+2}}{N_{n+2}} = \cdots = \frac{Z_{n+2l}}{N_{n+2l}}.$$

2) Verkürzt man den Kettenbruch

$$\frac{1}{c_1} \dot{-} \frac{c_1 c_2}{c_2} \dot{-} \frac{c_2 c_3}{c_3} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{c_{m-1} c_m}{c_m} \dot{-} \frac{p}{q}, \qquad (a)$$

worin die Zahlen $c_1\ c_2 \ldots c_m$, $p\ q$ von Null verschieden sind, so erhält man die sinnlosen Ausdrücke

$$\frac{1}{c_1} \cdot \frac{c_1 c_2}{c_2} \cdot \frac{c_2 c_3}{c_3} \cdot \cdots \cdot \frac{c_{r-1} c_r}{c_r} \quad (2 < r < m).$$

ist nämlich hier $Z_{r-1,\,r} = 0$. Dabei hat man, solange die Indices nicht übersteigen, neben $Z_1 = 1 \quad N_1 = c_1$

$$\left.\begin{aligned} Z_{3l-1} &= (-1)^{l-1} c_2 c_3 \cdots c_{3l-1} \\ N_{3l-1} &= 0 \\ Z_{3l} &= 0 \\ N_{3l} &= (-1)^l c_1 c_2 \cdots c_{3l} \\ Z_{3l+1} &= (-1)^l c_2 c_3 \cdots c_{3l+1} \\ N_{3l+1} &= (-1)^l c_1 c_2 \cdots c_{3l+1} \end{aligned}\right\} \quad (l \geq 1),$$

daſs $Z_{3l-1} : N_{3l-1}$ unmöglich, dagegen

$$\frac{Z_{3l}}{N_{3l}} = 0 \qquad \frac{Z_{3l+1}}{N_{3l+1}} = \frac{1}{c_1}$$

. Der Kettenbruch (a) hat im Allgemeinen einen Sinn. Wenn z. B. $= 3k$ ist, so findet man

$$Z_{m+1} = (-1)^k c_2 c_3 \cdots c_{m-1} p$$
$$N_{m+1} = (-1)^k c_1 c_2 \cdots c_m q$$
$$\frac{Z_{m+1}}{N_{m+1}} = \frac{p}{c_1 c_m q}.$$

so ist weder $N_{m+1} = 0$, noch falls nicht etwa $p = c_m q$ ist,

$$Z_{m+1} : N_{m+1}$$

ıem seiner Vorgänger, deren Werthe entweder Null oder $1 : c_1$ ıd, gleich.

Im Folgenden werden gröſstentheils solche Kettenbrüche handelt, die sowohl selbst möglich sind, als auch bei Verirzungen mögliche Ausdrücke liefern. Die Entwickelungen r nächsten Nr. sind jedoch von dem Umstande, ob die vorlegten Theilzähler und Theilnenner mögliche Kettenbrüche fern oder nicht, völlig unabhängig. Auch die Formeln (V) ıd (VII) sind lediglich Identitäten, welche unter den von n Recursionsformeln (I) und (II) mittelst der Formeln (7*) ıd (8) gelieferten Ausdrücken bestehen.

5. Differenzen der Näherungsbrüche $Z_p : N_p$.

Aus den Formeln (II) folgt unmittelbar die Relation

$$Z_p N_{p-1}' - N_p Z_{p-1} = -a_p (Z_{p-1} N_{p-2} - N_{p-1} Z_{p-2}).$$

Ersetzt man hier p nacheinander durch $p-1 \ldots 1$, so ergeben sich die $p-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} &Z_{p-1}N_{p-2} - N_{p-1}Z_{p-2} \\ &= -a_{p-1}(Z_{p-2}N_{p-3} - N_{p-2}Z_{p-3}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &Z_1N_0 - N_1Z_0 = -a_1(Z_0N_{-1} - N_0Z_{-1}). \end{aligned}$$

Da nach (8)

$$Z_0N_{-1} - N_0Z_{-1} = -1$$

ist, so erhält man durch allmälige Substitution von rückwärts die Formel

$$Z_pN_{p-1} - N_pZ_{p-1} = (-1)^{p-1}a_1a_2\ldots a_p \qquad (m \geqq p \geqq 1). \tag{V}$$

Sie zeigt, dafs wenn die Theilzähler $a_1\ a_2 \ldots a_p$ von Null verschieden sind, weder $Z_p\ N_p$ noch $N_{p-1}\ N_p$ zugleich verschwinden können. Ist weder N_{p-1} noch N_p Null, so folgt aus (V) die Formel

$$\frac{Z_p}{N_p} - \frac{Z_{p-1}}{N_{p-1}} = \frac{(-1)^{p-1}a_1a_2\ldots a_p}{N_{p-1}N_p}. \tag{VI}$$

Die vorstehenden Formeln lassen sich verallgemeinern. Schreibt man in (IV) statt k $k+1$ $(k \geqq 0)$ und hierauf statt p $k+r$ $(r > 1)$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} Z_{k+r} &= a_{k+1}N_{k+1,\,k+r}\ Z_{k-1} + Z_{k+1,\,k+r}Z_k \\ N_{k+r} &= a_{k+1}N_{k+1,\,k+r}\ N_{k-1} + Z_{k+1,\,k+r}N_k, \end{aligned} \tag{10}$$

woraus man erhält

$$Z_{k+r}N_k - N_{k+r}Z_k = -a_{k+1}N_{k+1,\,k+r}\{Z_kN_{k-1} - N_kZ_{k-1}\},$$

somit nach (3) und (V)

$$Z_{k+r}N_k - N_{k+r}Z_k = (-1)^k a_1a_2\ldots a_{k+1}Z_{k+2,\,k+r}. \tag{VII}$$

Ist weder N_k noch N_{k+r} Null, so leitet man daraus die Formel

$$\frac{Z_{k+r}}{N_{k+r}} - \frac{Z_k}{N_k} = \frac{(-1)^k a_1a_2\ldots a_{k+1}Z_{k+2,\,k+r}}{N_kN_{k+r}} \qquad (k \geqq 0) \tag{VIII}$$

ab. Für $r=1$ $k=p-1$ gehen (VII) und (VIII) in (V) und (VI) über.

Ersetzt man hier N_{k+r} durch den Ausdruck (10) und

dividirt, falls $N_{k+1,\,k+r} = Z_{k+2,\,k+r}$ nicht Null ist, dadurch den Zähler und Nenner, so erhält man die Formel

$$\frac{Z_{k+r}}{N_{k+r}} - \frac{Z_k}{N_k} = \frac{(-1)^k a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{N_k \{a_{k+1} N_{k-1} + V_{k+1,\,k+r} N_k\}} \qquad \text{(IX)}$$

$$= \frac{(-1)^k a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{N_k (E_{k+2,\,k+r} N_k + N_{k+1})}.$$

$V_{k+1,\,k+r}$ steht darin der Kürze halber für $Z_{k+1,\,k+r} : N_{k+1,\,k+r}$, womit jedoch nicht gesagt sein soll, dafs der Kettenbruch (2) für $n = k+1$, $m = k+r$ stets einen Sinn hat, wenn $N_{k+1,\,k+r}$ nicht Null ist. Ferner ist im Anschlusse an (6)

$$V_{k+1,\,k+r} = b_{k+1} + E_{k+2,\,k+r}$$

gesetzt.

Setzt man in (VIII) statt k, r bez. $k-1$, $r+1$ und dividirt den Zähler und Nenner rechts wieder durch $N_{k+1,\,k+r}$, so gelangt man zur Formel

$$\frac{Z_{k+r}}{N_{k+r}} - \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1} a_1 a_2 \ldots a_k V_{k+1,\,k+r}}{N_{k-1}(a_{k+1} N_{k-1} + V_{k+1,\,k+r} N_k)}. \qquad \text{(X)}$$

Durch Division von (IX) durch (X) ergiebt sich

$$\left(\frac{Z_{k+r}}{N_{k+r}} - \frac{Z_k}{N_k}\right) : \left(\frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}} - \frac{Z_{k+r}}{N_{k+r}}\right)$$

$$= \frac{N_{k-1}}{N_k} \cdot \frac{a_{k+1}}{V_{k+1,\,k+r}} = \frac{N_{k-1}}{N_k} E_{k+1,\,k+r}. \qquad \text{(XI)}$$

6. Aequivalente Kettenbrüche

d. h. solche, welche dieselbe Reihe von Näherungsbrüchen haben — etwas allgemeiner äquivalente Reihen von je $2m+1$ Zahlen b_0, a_1 b_1, a_1 $b_2 \ldots a_m$ b_m, d. h. solche, wofür die Paare Z_p N_p (wo p irgend eine der Zahlen 0, 1 .. m sein kann) sich von einander nur durch einen constanten Factor Q_p unterscheiden. Wir bemerken zuerst den Satz:

1) „Ersetzt man a_n b_n a_{n+1} $(m > n \geqq 1)$ durch ca_n cb_n ca_{n+1} [bezw. a_m b_m durch ca_m, cb_m], wo c irgend eine von Null verschiedene Zahl bedeutet, so geht die Reihe b_0, $a_1 b_1, \ldots a_m b_m$ in eine äquivalente über,

bezw. der Kettenbruch (1) in einen äquivalenten. Denn man hat für die neue Reihe

$$Z'_p = cZp \qquad N'_p = cN_p$$
$$(p = n, n+1 \ldots m).“$$

Zufolge der Formeln (II) findet man zunächst

$$Z'_n = cZ_n \qquad N'_n = cN_n$$
$$Z'_{n+1} = ca_{n+1} Z_{n-1} + b_{n+1} Z'_n$$
$$N'_{n+1} = ca_{n+1} N_{n-1} + b_{n+1} N'_n ,$$

also

$$Z'_{n+1} = cZ_{n+1} \qquad N'_{n+1} = cN_{n+1}$$

und nun offenbar auch

$$Z'_{n+2} = cZ_{n+2} \qquad N'_{n+2} = cN_{n+2}$$

u. s. f.

2) Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes folgt, dafs der Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \frac{a_3}{b_3} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_m}{b_m} \qquad (1)$$

(bezw. die Reihe $b_0, a_1 b_1 \ldots a_m b_m$) äquivalent ist mit

$$b_0 + \frac{c_1 a_1}{c_1 b_1} \dot{+} \frac{c_1 c_2 a_2}{c_2 b_2} \dot{+} \frac{c_2 c_3 a_3}{c_3 b_3} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{c_{m-1} c_m a_m}{c_m b_m} \qquad (11)$$

(bezw. $b_0, c_1 a_1 \; c_1 b_1, \ldots c_{m-1} c_m a_m \quad c_m b_m$), wo die $c_1 c_2 \ldots c_n$ beliebige von Null verschiedene Zahlen sind. Und zwar hat man im zweiten Bruche

$$Z'_p = c_1 c_2 \ldots c_p Z_p \quad N'_p = c_1 c_2 \ldots c_p N_p \quad (p = 1, 2 \ldots m).$$

Durch geeignete Annahme der Factoren $c_1 \ldots c_m$ können die Theilzähler des Bruches (11) irgend welche gegebene Werthe mit Ausschlufs von Null erhalten z. B. alle der positiven oder alle der negativen Einheit gleich werden. Bedeutet ε + 1 oder — 1 und setzt man

$$c_1 a_1 = \varepsilon \quad c_1 c_2 a_2 = \varepsilon \ldots c_{m-1} c_m a_m = \varepsilon ,$$

so folgt $c_1 = \varepsilon : a_1$ und

$$c_{2k} = \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2k}}$$

$$c_{2k+1} = \frac{\varepsilon a_2 a_4 \ldots a_{2k}}{a_1 a_3 a_5 \ldots a_{2k+1}} \quad (k = 1, 2 \ldots). \qquad (12)$$

Die der Annahme $\varepsilon = -1$ entsprechende Umgestaltung von (1) hat Seidel[2]) die reducirte Form dieses Kettenbruches genannt.

Nimmt man in (11) $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = c$, so verwandelt sich (1) in den Kettenbruch

$$b_0 + \frac{ca_1}{cb_1} + \frac{c^2a_2}{cb_2} + \frac{c^2a_3}{cb_3} + \cdots + \frac{c^2a_m}{cb_m}. \qquad (13)$$

3) Seidel hat ferner bemerkt, dafs wenn umgekehrt die Reihe $b_0', a_1' b_1' \ldots a_m' b_m'$ der Reihe $b_0, a_1 b_1 \ldots a_m b_m$ äquivalent sein d. i. den Bedingungen

$$Z_0' = Z_0, \quad Z_p' = Q_p Z_p \quad N_p' = Q_p N_p, \quad (p = 1, 2 \ldots m), \qquad (14)$$

worin $Q_1\ Q_2 \ldots Q_m$ sämmtlich nicht Null sein dürfen, genügen soll, neben $b_0' = b_0$ die Beziehungen

$$a_p' = c_{p-1}\, c_p\, a_p \quad b_p' = c_p\, b_p \quad (p = 1, 2 \ldots m)$$

bestehen müssen, wobei

$$c_0 = 1 \quad c_1 = Q_1 \quad c_p = Q_p : Q_{p-1} \quad (p = 2, \ldots m)$$

ist. — Wenn $b_1\ b_2 \ldots b_m$ nicht Null sind, so kann die Aequivalenz der beiden Reihen durch die Relationen

$$b_0' = b_1 \quad \frac{b_1'}{a_1'} = \frac{b_1}{a_1} \quad \frac{b_{p-1}' b_p'}{a_p'} = \frac{b_{p-1} b_p}{a_p} \quad (p = 2, \ldots m) \qquad (15)$$

ausgedrückt werden.

Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar durch Auflösung der folgenden Aufgabe.

4) Aufgabe. „Es sind bei gegebenem b_0' $2m$ Zahlen

$$a_1' b_1',\ a_2' b_2' \ldots a_m' b_m'$$

so zu bestimmen, dafs die Zähler und die Nenner des ersten, zweiten ... m^{ten} Näherungsbruches bez. die gegebenen Werthe

$$Z_1'\ Z_2' \ldots Z_m', \quad N_1'\ N_2' \ldots N_m'$$

annehmen, welche nur so gewählt sind, dafs keine der Determinanten

$$Z_p' N_{p-1}' - N_p' Z_{p-1}' \quad (p = 1, 2 \ldots m),$$

worin $Z_0' = b_0' \quad N_0' = 1$ zu denken ist, verschwindet."

Wir setzen zunächst $b_1' = N_1' \quad a_1' = Z_1' - b_0' N_1'$. Für $a_p\ b_p$ $(p > 2)$ ergeben sich nach (II) die Gleichungen

$$a_p Z'_{p-2} + b_p Z'_{p-1} = Z'_p$$
$$a_p N'_{p-2} + b_p N'_{p-1} = N'_p,$$

woraus man erhält

$$a'_p = \frac{Z_{p-1} N'_p - N'_{p-1} Z'_p}{Z'_{p-1} N'_{p-2} - N'_{p-1} Z'_{p-2}}$$
$$b'_p = \frac{Z'_p N'_{p-2} - N'_p Z'_{p-2}}{Z'_{p-1} N'_{p-2} - N'_{p-1} Z'_{p-2}}.$$

Sollen nun die Zahlen b_0', $a_1' b_1' \ldots a_m' b_m'$ die Relationen (14) erfüllen, so muſs demnach

$$b_0' = Z_0, \quad a_1' = Q_1 a_1 \quad b_1' = Q_1 b_1$$

und nach (V) und (VII), wo $k = p - 2$, $r = 2$ zu setzen ist,

$$a_p' = \frac{Q_p a_p}{Q_{p-2}} \qquad b_p' = \frac{Q_p b_p}{Q_{p-1}}$$

sein.

Ist keine der Zahlen $N_1' \ldots N_m'$ Null, so dürfen auch die Werthe des ersten, zweiten $\ldots m^{\text{ten}}$ Näherungsbruches als gegeben vorausgesetzt werden. Sollen sie bez. den Zahlen $V_1' V_2' \ldots V_m'$ gleich werden, so hat man nur oben

$$Z'_p = V'_p N'_p \quad (p = 1, 2 \ldots m)$$

zu setzen. Sind aufserdem von den $V_1' \ldots V_m'$ keine zwei einander gleich, so kann man zufolge des Satzes in Nr. 4 sicher sein, dafs der Kettenbruch

$$b_0' + \frac{a_1'}{b_1'} + \frac{a_2'}{b_2'} + \cdots + \frac{a_n'}{b_n'}$$

einen Sinn hat.

Einen besonderen Fall der Aufgabe bildet die Contraction der gegebenen Reihe $b_0, a_1 b_1 \ldots a_m b_m$, bezw. des Kettenbruches (1)[3]) d. i. die Aufstellung einer neuen Reihe $b_0', a_1' b_1', a_2' b_2' \ldots$, wofür die Ausdrücke

$$Z_0, \; Z_1' N_1', \; Z_2' N_2' \ldots$$

bez. gleich sind den zur ursprünglichen Reihe gehörigen Ausdrücken

$$Z_{m_0} N_{m_0}, \quad Z_{m_1} N_{m_1}, \quad Z_{m_2} N_{m_2} \ldots$$

Dabei sind die Indices m_0, m_1, $m_2 \ldots$ als steigend zu betrachten. Man braucht nur in den obigen Formeln für $a_p' b_p'$

$Z'_p\ N'_p$ durch $Z_{m_p}\ N_{m_p}$ zu ersetzen, worauf man die Formel (VII) anwenden kann.

Beispiel. Die Reihe $b_0, a_1 b_1 \ldots a_m\ b_m$, worin

$$b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = b_{n+r} = 0$$

ist, läfst sich im Falle dafs $n + r < m$ und b_{n+r+1} nicht Null ist, in folgender Art contrahiren. Die $2n + 1$ Anfangsglieder $b_0, a_1\ b_1, \ldots a_n\ b_n$ bleiben ungeändert. Dagegen soll

$$Z'_{n+h} = Z_{n+h+r} \quad N'_{n+h} = N_{n+r+h} \qquad (h = 1, 2 \ldots m - n - r)$$

werden. Dann hat man jedenfalls

$$a'_{n+h} = a_{n+r+h} \quad b'_{n+h} = b_{n+r+h} \qquad (h = 3, 4 \ldots m - n - r).$$

Für $h = 1$ und 2 lauten die neuen Theilzähler und Theilnenner verschieden, je nachdem r gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle ist

$$a'_{n+1} = a_{n+1}\ a_{n+3} \cdots a_{n+r-1}\ a_{n+r+1}$$
$$b'_{n+1} = a_{n+2}\ a_{n+4} \cdots a_{n+r}\ b_{n+r+1}$$
$$a'_{n+2} = a_{n+2}\ a_{n+4} \cdots a_{n+r+2} \qquad b'_{n+2} = b_{n+r+2};$$

im zweiten

$$a'_{n+1} = a_{n+1}\ a_{n+3} \cdots a_{n+r}\ b_{n+r+1}$$
$$b'_{n+1} = a_{n+2}\ a_{n+4} \cdots a_{n+r-1}\ a_{n+r+1}$$
$$a'_{n+2} = -\ a_{n+2}\ a_{n+4} \cdots a_{n+r+1}\ a_{n+r+2} : b_{n+r+1}$$
$$b'_{n+2} = (b_{n+r+1}\ b_{n+r+2} + a_{n+r+2}) : b_{n+r+1}.$$

In dem letzteren Falle kann man zufolge des 1. Satzes

$$a'_{n+2} \quad b'_{n+2} \quad a'_{n+3}$$

bezw. durch

$$b_{n+r+1}\ a'_{n+2}, \quad b_{n+r+1}\ b'_{n+2}, \quad b_{n+r+1}\ a'_{n+3}$$

ersetzen.

7. Unendliche Kettenbrüche.

Liegen zwei endlose Reihen $a_1\ a_2 \ldots$, $b_0\ b_1\ b_2 \ldots$ vor, so kann man fragen, welches Verhalten der Bruch

$$V_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dotplus \frac{a_2}{b_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{a_n}{b_n}$$

bei unbegrenzt wachsendem n zeigt. Je nachdem V_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth hat oder nicht, heifst der unendliche Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_n}{b_n} \dot{+} \cdots \qquad (16)$$

convergent oder divergent. Sind im letzteren Falle die Unbestimmtheitsgrenzen von V_n bei $\lim n = +\infty$ von einander verschieden, so sagt man, dafs er zwischen ihnen schwanke. Convergirt der Kettenbruch, so wird sein Grenzwerth unter dem Symbole (16) verstanden. Im Grunde genommen haben jedoch diese Begriffe eine etwas andere Bedeutung. Man kümmert sich gar nicht darum, ob der Kettenbruch V_n als solcher einen Sinn hat, sondern fragt lediglich nach dem Verhalten der mittelst der Reihe b_0, $a_1 b_1$, $a_2 b_2 \ldots$ gebildeten Näherungsbrüche $Z_n : N_n$ bei $\lim n = +\infty$. So wird der unendliche Kettenbruch

$$\frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{0} \dot{+} \frac{a_3}{0} \dot{+} \cdots,$$

worin die Theilnenner von b_2 an Null sind, als schwankend zwischen den Werthen $a_1 : b_1$ und Null bezeichnet, obwohl aufser V_1 keiner der endlichen Kettenbrüche V_n möglich ist. Nur die Beschränkung wird man aufnehmen müssen, dafs wenigstens von einem bestimmten Werthe von n an keiner der Nenner N_n verschwindet. Z. B. hinsichtlich des unendlichen Kettenbruches

$$\frac{1}{c_1} \dot{-} \frac{c_1 c_2}{c_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{c_{n-1} c_n}{c_n} \dot{-} \cdots,$$

wofür ebenfalls jeder der Kettenbrüche V_n aufser V_1 sinnlos wird, kann man nach Nr. 4 nur vom Verhalten der Näherungsbrüche $Z_{3l} : N_{3l}$ und $Z_{3l+1} : N_{3l+1}$ bei $\lim l = +\infty$ sprechen, indem $N_{3l-1} = 0$, also jeder Bruch $Z_{3l-1} : N_{3l-1}$ unmöglich ist.

Wenn die Nenner N_1 $N_2 \ldots$ sämmtlich von Null verschieden sind, so hat man nach Gleichung (VI) in Nr. 5

$$\frac{Z_n}{N_n} = b_0 + \left(\frac{Z_1}{N_1} - b_0\right) + \left(\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_1}{N_1}\right) + \cdots + \left(\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}\right)$$

$$= b_0 + \frac{a_1}{N_1} - \frac{a_1 a_2}{N_1 N_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n}{N_{n-1} N_n}. \qquad (17)$$

Es läfst sich mithin die Untersuchung des Verhaltens von $Z_n : N_n$ bei $\lim n = +\infty$ auf die der unendlichen Reihe

mit dem allgemeinen Gliede $(-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n : N_{n-1} N_n$ zurückführen. Wenn die N_n erst von $n = m$ an nicht Null sind, so tritt an die Stelle von (17) die Formel

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_m}{N_m} + \frac{(-1)^m a_1 a_2 \ldots a_{m+1}}{N_m N_{m+1}} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n}{N_{n-1} N_n}.$$

Die in Rede stehende Untersuchung wird manchmal dadurch erleichtert, dafs man den Kettenbruch (16) durch einen äquivalenten d. h. einen solchen, der mit ihm die Reihe der Näherungsbrüche gemein hat, ersetzt. Nach der Formel (11) ist mit (16) äquivalent jeder Kettenbruch

$$b_0 + \frac{c_1 a_1}{c_1 b_1} \dot{+} \frac{c_1 c_2 a_2}{c_2 b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{c_{n-1} c_n a_n}{c_n b_n} \dot{+} \cdots, \qquad (17^*)$$

wo die c_n beliebige von Null verschiedene Zahlen bedeuten und zwar nur ein solcher. Zu jedem unendlichen Kettenbruche giebt es, wie aus den Formeln (12) sofort folgt, einen äquivalenten, dessen Theilzähler sämmtlich gleich $+1$ und einen, dessen Theilzähler sämmtlich -1 sind. Der letztere heifst nach Seidel die reducirte Form desselben.

Sind die Theilzähler und Theilnenner eines Kettenbruches beliebige Zahlen — nur soll keiner der ersteren Null sein —, so führt die Verwandlung desselben in einen äquivalenten, dessen Theilzähler sämmtlich $+1$ sind, wenigstens in einem Falle sicher zur Entscheidung über seine Beschaffenheit. Es ist nämlich der Kettenbruch

$$h_0 + \frac{1}{h_1} \dot{+} \frac{1}{h_2} \dot{+} \cdots$$

stets divergent, wenn die Reihe $h_1 + h_2 + \cdots$ absolut convergirt. Denn nunmehr convergirt das unendliche Product $\Pi(1 + |h_r|)$ und da, wie leicht ersichtlich ist,

$$|N_n| \leqq \prod_1^n (1 + |h_r|) < \prod_1^\infty (1 + |h_r|)$$

ist, so divergirt die Reihe (17) d. i.

$$h_0 + \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_1 N_2} + \frac{1}{N_2 N_3} - \cdots.$$

So erkennt man z. B., dafs der Kettenbruch

$$a - \frac{x}{a} \dot{-} \frac{x^2}{a} \dot{-} \frac{x^3}{a} \dot{-} \cdots$$

divergirt, wenn $|x| > 1$ ist.

Aufser diesem allgemeinen Satze giebt es für nicht-periodische Kettenbrüche keinen anderen. Die bisher aufgestellten Sätze von allgemeinerem Charakter beziehen sich nur auf den Fall, dafs die Theilzähler und Theilnenner reell und zwar die einen wie die anderen von einem bestimmten Gliede an gleichbezeichnet sind. Da der Kettenbruch (16) auch mit dem folgenden

$$b_0 + \frac{c\,a_1}{c\,b_1} \dot{+} \frac{c^2 a_2}{c b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{c^2 a_n}{c b_n} \dot{+} \cdots$$

äquivalent ist, so genügt es anzunehmen, dafs die Theilnenner alle positiv sind. Wir werden daher nur zwei Fälle von nicht-periodischen unendlichen Kettenbrüchen betrachten: 1) Alle Theilzähler und alle Theilnenner sind positiv; 2) die ersteren sind negativ, die letzteren positiv.

8. Zunächst sei ein Umstand hervorgehoben, wodurch sich die unendlichen Kettenbrüche von den unendlichen Reihen und Producten unterscheiden. Läfst man von einer unendlichen Reihe oder einem unendlichen Producte, worin kein Factor Null ist, eine endliche Anzahl von Gliedern bezw. Factoren z. B. die m ersten weg, so erhält man einen mit dem gegebenen gleichartigen d. h. mit ihm zugleich convergenten oder divergenten Ausdruck (V. 2, VII. 2). Das gilt von den unendlichen Kettenbrüchen nicht unbedingt.[4]) So kann von den Kettenbrüchen (16) und

$$b_{k+1} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}} \dot{+} \frac{a_{k+3}}{b_{k+3}} \dot{+} \cdots$$

der eine convergiren, der andere divergiren. Die Formel (IX) in Nr. 5 zeigt in der That, dafs wenn bei $\lim r = +\infty$

$$\lim V_{k+1,\,k+r} = -a_{k+1} N_{k-1} : N_k$$

ist, $\lim (Z_{k+r} : N_{k+r})$ unendlich, wenn aber

$$\lim_{r=+\infty} V_{k+1,\,k+r} = \mp \infty$$

ist, lim $(Z_{k+r} : N_{k+r})$ endlich ist. Löst man die Gleichung (IX) nach $V_{k+1,\,k+r}$ auf, so wird man finden, dafs wenn

$$\lim_{r=+\infty}(Z_{k+r} : N_{k+r}) = Z_k : N_k$$

ist, lim $V_{k+1,\,k+r}$ unendlich und wenn der erstere Grenzwerth unendlich ist, der letztere endlich ist. — Die in Rede stehende Eigenthümlichkeit kommt bei den in Nr. 9, 10, 12 betrachteten unendlichen Kettenbrüchen nicht vor. Dagegen hat man z. B. nach Nr. 11

$$2 - \frac{3}{3} \dot{-} \frac{4}{4} \dot{-} \frac{5}{5} - \cdots = +0,$$

also für die unendlichen Kettenbrüche

$$\frac{2}{2} \dot{-} \frac{3}{3} \dot{-} \frac{4}{4} \dot{-} \cdots$$

$$\frac{1}{1} \dot{-} \frac{2}{2} \dot{-} \frac{3}{3} \dot{-} \frac{4}{4} \dot{-} \cdots$$

bezw. die Grenzwerthe $+\infty$ und -0.

Unendliche Kettenbrüche mit positiven Theilzählern und positiven Theilnennern.

9. Dafs in diesem Falle die Brüche $V_{n,m}$ in (2) und insbesondere die verkürzten Brüche V_n selbst, stets einen Sinn haben, sowie dafs alle N_n und wenn b_0 nicht negativ ist, auch alle Z_n positiv sind, leuchtet unmittelbar ein. Mittelst der Relationen (VI), (VIII), wovon die Formel

$$V_{n+2} - V_n = \frac{(-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{n+1} b_{n+2}}{N_n N_{n+2}}$$

einen besonderen Fall darstellt, erkennt man, dafs jeder Näherungsbruch mit geradem Index kleiner ist als jeder mit ungeradem, dafs die Näherungsbrüche mit geradem Index $V_0\ V_2\ V_4 \ldots$ eine steigende, die mit ungeradem Index $V_1\ V_3\ V_5 \ldots$ eine fallende Reihe bilden und dafs jeder Näherungsbruch zwischen je zwei aufeinander folgenden seiner Vorgänger liegt. Da also

$$V_{2l} < V_{2k+1} \qquad V_{2k} < V_{2l+1}$$

ist, so ist ersichtlich, dafs bei $\lim l = +\infty$ die Brüche V_{2l} einem positiven endlichen Grenzwerthe A steigend, die V_{2l+1} einem solchen Grenzwerthe B fallend sich nähern. Die Zahlen A B, beide zwischen je zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen gelegen, sind die Unbestimmtheitsgrenzen von V_n bei $\lim n = +\infty$. Ist $A = B$, so convergirt der unendliche Kettenbruch (16) und zwar ist A sein Grenzwerth; sind A und B ungleich, so schwankt er zwischen den Grenzen A B. — Im Falle der Convergenz ist der Grenzwerth A des Kettenbruches (16) gröfser als jeder Näherungsbruch mit geradem, kleiner als jeder mit ungeradem Index.

Ob der Kettenbruch (16) convergirt oder divergirt, läfst sich in dem vorliegendem Falle stets mit Hilfe einer allgemeinen Regel entscheiden. Wenn wir zunächst annehmen, dafs die Theilzähler desselben sämmtlich gleich 1 sind, also $a_n = 1$ $b_n = h_n$ setzen, so besteht der

Satz:[5]) „Der unendliche Kettenbruch

$$h_0 + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots + \frac{1}{h_n} + \cdots \qquad (18)$$

convergirt oder schwankt zwischen endlichen Grenzen, je nachdem die unendliche Reihe

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n + \cdots \qquad (19)$$

divergirt oder convergirt oder, was auf dasselbe hinauskommt, je nachdem von den beiden Reihen

$$h_1 + h_3 + h_5 + \cdots, \quad h_2 + h_4 + h_6 + \cdots \qquad (20)$$

eine oder keine divergirt."

Beweis. Aus (VI) in Nr. 5 folgt nunmehr die Formel

$$V_{2l-1} - V_{2l} = \frac{1}{N_{2l-1} N_{2l}}. \qquad (21)$$

Jede der Zahlen N_{2l-1}, N_{2l} hat bei $\lim l = +\infty$ einen positiven Grenzwerth, denn nach der Formel

$$N_n = N_{n-2} + h_n N_{n-1}$$

ist $N_n > N_{n-2}$. Aus (21) kann man sohin durch den Grenzübergang $\lim l = +\infty$ schliefsen, dafs $B - A$ Null oder positiv ist, je nachdem von den Zahlen N_{2l-1} N_{2l} eine oder

keine den Grenzwerth $+\infty$ hat. Bildet man mit Hilfe der zuletzt erwähnten Formel die Nenner der Näherungsbrüche

$$\begin{aligned} N_1 &= h_1 \\ N_2 &= 1 + h_1 h_2 \\ N_3 &= h_1 + h_3 + h_1 h_2 h_3 \\ N_4 &= 1 + h_1 h_2 + h_1 h_4 + h_3 h_4 + h_1 h_2 h_3 h_4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

so findet man ohne Mühe, dafs

$$N_{2l} > 1 \qquad N_{2l+1} > h_1 + h_3 + \cdots + h_{2l+1} \qquad (l \geqq 1)$$

und dafs wenn $n \geqq 2$ ist,

$$0 < N_n < (1 + h_1)(1 + h_2)\cdots(1 + h_n) - h_2 - h_4 - \cdots - h_{2l}$$

ist, wo $2l$ jede gerade Zahl $\leqq n$ sein darf. Aus der ersteren Ungleichung folgt, dafs wenn die unendliche Reihe

$$h_1 + h_3 + h_5 + \cdots$$

divergirt, $\lim N_{2l+1}$ bei $\lim l = +\infty$ auch $+\infty$, also der Kettenbruch (18) convergent ist. Divergirt nun die Reihe (19), so divergirt entweder die erste der Reihen (20) oder nicht. Im ersten Falle convergirt, wie eben bemerkt ist, der Kettenbruch (18). Im zweiten Falle mufs die zweite der Reihen (20) divergiren, also der Kettenbruch

$$h_1 + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} + \cdots$$

convergiren, somit, da sein Grenzwerth eine endliche positive Zahl ist, auch der Bruch (18).

Wenn die Reihe (19) convergirt, so convergirt das unendliche Product $(1 + h_1)(1 + h_2)(1 + h_3)\ldots$ Ist P sein Grenzwerth, so hat man jedenfalls

$$\lim_{l=+\infty} N_{2l-1} < \mathsf{P} \qquad \lim_{l=+\infty} N_{2l} < \mathsf{P},$$

also nach (21)

$$B - A > 1 : \mathsf{P}^2;$$

es schwankt also der unendliche Kettenbruch (18) zwischen A und B.

Wenn die Theilzähler des Kettenbruches

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} + \cdots \qquad (16)$$

nicht sämmtlich 1 sind, so läfst sich ihm nach den Formeln (12) ein äquivalenter an die Seite stellen, welcher dieser Bedingung genügt. Seine Theilnenner werden durch die Formeln

$$h_1 = b_1 : a_1$$

$$h_{2l} = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2l-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2l}} b_{2l}$$

$$h_{2l+1} = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2l}}{a_1 a_3 \cdots a_{2l-1}} \cdot \frac{b_{2l+1}}{a_{2l+1}} \qquad (l \geqq 1) \qquad (22)$$

gegeben. Man hat demnach

$$\frac{h_{2l+2}}{h_{2l}} = \frac{a_{2l+1}}{a_{2l+2}} \cdot \frac{b_{2l+2}}{b_{2l}} \qquad \frac{h_{2l+3}}{h_{2l+1}} = \frac{a_{2l+2}}{a_{2l+3}} \cdot \frac{b_{2l+3}}{b_{2l+1}}.$$

Mittelst dieser Formeln beweist man z. B. die Convergenz des Kettenbruches

$$\frac{a^2}{b} + \frac{(a+b)^2}{b} + \frac{(a+2b)^2}{b} + \frac{(a+3b)^2}{b} + \cdots,$$

worin a b positive Zahlen bedeuten.

Corollare. 1) „Divergirt die Reihe

$$\frac{b_0 b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_{n-1} b_n}{a_n} + \cdots, \qquad (23)$$

so convergirt der Kettenbruch (16).“

Wenn die Kettenbrüche (16) und (18) äquivalent sein sollen, so mufs nach Gl. (15) in Nr. 6

$$\frac{b_{n-1} b_n}{a_n} = h_{n-1} h_n \qquad (n \geqq 2)$$

sein. Wäre der Kettenbruch (16) divergent, so müfsten beide Reihen (20), folglich die Reihen

$$h_0 h_1 + h_2 h_3 + h_4 h_5 + \cdots \qquad h_1 h_2 + h_3 h_4 + h_5 h_6 + \cdots$$

und also auch die Reihe (23) convergiren. Somit convergirt der in Rede stehende Kettenbruch.

2) Wenn im Kettenbruche (16) von einem bestimmten Werthe von $n : n = m$ an $b_n \geqq a_n$ ist und die unendliche Reihe

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

divergirt, so convergirt er. Ist $b_0 = 0$, so ist sein Grenzwerth positiv und kleiner als 1.“

Da nun von $n = m$ an

$$\frac{b_{n-1} b_n}{a_n} \geqq b_{n-1}$$

ist, so divergirt die Reihe (23) und es convergirt der Kettenbruch (16).

3) Aus dem obigen allgemeinen Satze über das Verhalten des Kettenbruches (18) bezw. (16) ergiebt sich leicht, dafs in dem hier betrachteten Falle aus dem unendlichen Kettenbruche (16) durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Gliedern immer ein gleichartiger unendlicher Kettenbruch erzeugt wird. (Vgl. Nr. 8).

4) Wenn der Kettenbruch (16) convergirt, so liegt sein Grenzwerth A zwischen je zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen. Um zu entscheiden, welchem von ihnen er näher liegt, kann man die folgende Formel gebrauchen, welche aus (XI) in Nr. 5 durch den Grenzübergang $\lim r = +\infty$ folgt. Wie soeben bemerkt wurde, convergirt hier jeder unendliche Kettenbruch

$$\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}} + \cdots$$

Bezeichnet man seinen Grenzwerth mit E_{k+1}, so findet man aus (XI) die Gleichung

$$\frac{A - V_k}{V_{k-1} - A} = \frac{N_{k-1}}{N_k} E_{k+1}. \tag{24}$$

10. Regelmäfsige Kettenbrüche.

Sind in einem endlichen oder unendlichen Kettenbruche sämmtliche Theilzähler $+1$, die Theilnenner natürliche Zahlen h_n und ist $b_0 = h_0$ eine ganze Zahl, so heifst er regelmäfsig oder einfach. Solche Kettenbrüche haben folgende besondere Eigenschaften.

1) „Die Nenner N_n der Nährungsbrüche sind natürliche Zahlen, die mit dem Index n beständig wachsen. Dasselbe gilt von den Zählern Z_n derselben, falls h_0 nicht negativ ist. Ist h_0 negativ, so sind die Z_n negative ganze Zahlen, die ihrem absoluten Betrage nach mit n beständig und ins Unendliche wachsen.“ — Das folgt aus den Formeln

$$N_n = N_{n-2} + h_n N_{n-1} \qquad Z_n = Z_{n-2} + h_n Z_{n-1}$$

unmittelbar. Ist $h_0 < 0$, so sind $Z_0 = h_0$ und $Z_1 = 1 + h_0 h_1$ negativ, folglich auch Z_n.

2) Der Zähler und Nenner eines jeden Näherungsbruches sind relative Primzahlen. Denn jeder gemeinsame Theiler derselben müfste nach der Formel (V) Theiler von 1 sein.

3) „Jeder regelmäfsige unendliche Kettenbruch convergirt. Sein Grenzwerth A ist positiv oder negativ, je nachdem h_0 nicht negativ oder negativ ist. Ist $h_0 = 0$, so ist $A < 1$."

4) Jeder Näherungsbruch liegt einem späteren Näherungsbruche, sowie dem Grenzwerthe A, näher, als irgend einer seiner Vorgänger. — Folgt aus (XI), bezw. (24), indem jetzt $N_{k-1} < N_k$ und sowohl $E_{k+1,\,k+r}$ als auch E_{k+1} kleiner als 1 ist.

5) Jeder gemeine Bruch $r : s$, der zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen V_{n-1} V_n liegt, hat einen Nenner, der gröfser als N_n ist. — Da nach (VI)

$$0 < \left| \frac{r}{s} - V_{n-1} \right| < | V_n - V_{n-1} | = \frac{1}{N_{n-1} N_n}$$

sein mufs, so findet man durch Multiplication mit $s N_{n-1}$

$$| r N_{n-1} - s Z_{n-1} | < s : N_n .$$

Weil die linke Seite eine natürliche Zahl ist, so ist $s > N_n$.

6) Der Grenzwerth eines jeden regelmäfsigen unendlichen Kettenbruches ist irrational. — Hätte nämlich der Kettenbruch (18) einen rationalen Grenzwerth $r : s$, so müfste, — da $r : s$ zwischen V_{n-1} und V_n liegen würde —, wie grofs n auch sein mag, $s > N_n$ sein, was unmöglich ist, da N_n mit n ins Unendliche wächst.

7) Der Nenner eines jeden gemeinen Bruches $r : s$, der dem Näherungswerthe $V_{n+p}\,(p > 0)$, bezw. dem Grenzwerthe A eines unendlichen regelmäfsigen Kettenbruches näher liegt als V_n, mufs gröfser als N_n sein. — Denn da sowohl V_{n+p}, als auch A zwischen V_{n-1} und V_n, so mufs $r : s$ zwischen V_{n-1} und V_n liegen.

8) Jede gebrochene rationale Zahl läfst sich in

einen und nur einen endlichen, jede irrationale Zahl in einen und nur einen unendlichen regelmäfsigen Kettenbruch entwickeln. Dabei ist natürlich gemeint, dafs im ersten Falle der letzte Theilnenner von 1 verschieden ist.

Soll irgend eine reelle Zahl ξ, welche nicht ganz ist, gleich einem endlichen oder unendlichen einfachen Kettenbruche

$$h_0 + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots$$

sein, so mufs $h_0 < \xi < h_0 + 1$ sein, wodurch die ganze Zahl h_0 mit Nothwendigkeit sich ergiebt. Setzt man

$$\xi = h_0 + \xi_1, \quad \text{wo} \quad 0 < \xi_1 < 1$$

ist, so soll

$$\xi_1 = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots, \quad \frac{1}{\xi_1} = h_1 + \frac{1}{h_2} + \cdots$$

sein, also mufs

$$h_1 < \frac{1}{\xi_1} < h_1 + 1$$

sein, wodurch die natürliche Zahl h_1 völlig bestimmt ist. Setzt man

$$\frac{1}{\xi_1} = h_1 + \xi_2, \quad \text{wo} \quad 0 < \xi_2 < 1$$

ist, so soll

$$\xi_2 = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \cdots \qquad \frac{1}{\xi_2} = h_2 + \frac{1}{h_3} + \cdots$$

sein, so dafs

$$h_2 < \frac{1}{\xi_2} < h_2 + 1$$

sein mufs, woraus sich h_2 ergiebt. U. s. f.

Ist ξ ein rationaler Bruch und zwar in reducirter Form gleich $r : s$ $(s > 0)$, so findet man demnach h_0, $h_1 \cdots$ durch die Divisionen

$$\frac{r}{s} = h_0 + \frac{r_1}{s} \quad (0 < r_1 < s)$$

$$\frac{s}{r_1} = h_1 + \frac{r_2}{r_1} \quad (0 < r_2 < r_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = h_n + \frac{r_{n+1}}{r_n} \quad (0 < r_{n+1} < r_n).$$

Da die natürlichen Zahlen $r_1\ r_2 \ldots r_n \ldots$ beständig ab-

nehmen, so muſs eine, r_m, die letzte sein. Sie genügt den Gleichungen

$$\frac{r_{m-2}}{r_{m-1}} = h_{m-1} + \frac{r_m}{r_{m-1}} \qquad \frac{r_{m-1}}{r_m} = h_m,$$

wobei $h_m > 1$ ist. Aus den vorstehenden Formeln folgt die Gleichung

$$\frac{r}{s} = h_0 + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots + \frac{1}{h_m}.$$

Wenn ξ irrational ist, so bricht die Reihe der Gleichungen

$$\frac{1}{\xi_1} = h_1 + \xi_2 \quad \frac{1}{\xi_2} = h_2 + \xi_3 \cdots \quad \frac{1}{\xi_n} = h_n + \xi_{n+1} \cdots$$

niemals ab. Dafs der auf diese Art ermittelte unendliche Kettenbruch

$$h_0 + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots$$

den Grenzwerth ξ hat, bedarf noch des Beweises.

Es ist aber

$$\xi = h_0 + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots + \frac{1}{h_n + \xi_{n+1}} = \frac{\xi_{n+1} Z_{n-1} + Z_n}{\xi_{n+1} N_{n-1} + N_n}$$

$$\xi - V_n = \frac{(-1)^n \xi_{n+1}}{N_n (\xi_{n+1} N_{n-1} + N_n)},$$

woraus, da $0 < \xi_{n+1} < 1$ ist und N_n zugleich mit n ins Unendliche wächst, folgt, dafs bei $\lim n = +\infty$ $\lim V_n = \xi$ ist.

Wie man vorzugehen hat, um mit Hilfe von unvollständigen Decimalzahlen einige Anfangsglieder der Reihe $h_0\ h_1\ h_2 \cdots$ im regelmäfsigen Kettenbruche für ξ zu ermitteln[6]), wird aus dem nachstehenden Beispiele ersichtlich werden. Es sei der Anfang des Kettenbruches für die Ludolph'sche Zahl mit Hilfe der Angabe

$$\pi = 3{,}1415296 + \alpha : 10^7 \qquad (0 < \alpha < 1)$$

zu berechnen. Man entwickelt den Bruch

$$\frac{r_1}{s} = \frac{1415296 + \alpha}{10000000}$$

in einen Kettenbruch, was folgende Rechnung erheischt.

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1415926 + \alpha \\
10000000 : r_1 &= 7 + (88518 - 7\alpha) : r_1 && h_1 = 7 \\
r_2 &= 88518 - 7\alpha \\
r_1 : r_2 &= 15 + (88156 + 106\alpha) : r_2 && h_2 = 15 \\
r_3 &= 88156 + 106\alpha \\
r_2 : r_3 &= 1 + (362 - 113\alpha) : r_3 && h_3 = 1 \\
r_4 &= 362 - 113\alpha
\end{aligned}$$

Der Quotient $88156 : 362$ ist dreizifferig und beginnt mit 2. Läfst man den Quotienten $r_2 : r_4$ mit 200 beginnen, so ist der erste Rest $15756 + 22706\,\alpha$. Da er für $\alpha = 1$ in 38462 übergeht, so kann h_4 möglicherweise mit 3 beginnen. Unsere Rechnung liefert also von dem gesuchten Kettenbruche nur das Stück

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \cdots$$

nebst der Bemerkung, dafs h_4 dreizifferig ist und mit 2 oder 3 beginnt. Mittelst genauerer Näherungswerthe findet man $h_4 = 292$. — Um die wirklichen Theilnenner h_n zu erhalten, verwandle man zwei Decimalbrüche, wovon der eine nicht um eine Einheit der letzten Stelle kleiner, der andere nicht um eine Einheit von derselben Ordnung gröfser als die gegebene Zahl ξ ist, in regelmäfsige Kettenbrüche. Der beiden gemeinsame Anfang gehört auch dem ξ entsprechenden Kettenbruche an.

Unendliche Kettenbrüche mit negativen Theilzählern und positiven Theilnennern.

11. Eine allgemeine Regel zur Entscheidung der Frage, ob ein solcher Kettenbruch convergirt oder divergirt, ist bis jetzt nicht aufgestellt worden. Es giebt unter diesen Kettenbrüchen, wie der folgende Satz lehrt, eine umfassende Classe von convergenten.

Satz.[7]) „Wenn in dem Kettenbruche

$$\frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{b_n} \dot{-} \cdots, \tag{25}$$

worin die a_n b_n positive Zahlen sind, durchaus

$$b_n \geqq a_n + 1 \tag{26}$$

ist, so convergirt er. Ist stets

$$b_n = a_n + 1,$$

so hat N_n bei $\lim n = +\infty$ entweder einen endlichen positiven Grenzwerth $\nu > 1$ oder den Grenzwerth $+\infty$, je nachdem die unendliche Reihe

$$1 + a_1 + a_1 a_2 + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_n + \cdots \tag{27}$$

convergirt oder divergirt. Im ersten Falle ist der Grenzwerth des Kettenbruches (25) $(\nu - 1) : \nu$, im zweiten 1.

Falls in (26) nicht durchweg das Zeichen $=$ steht, so ist der Grenzwerth von (25) ein positiver ächter Bruch."

Der Beweis des Satzes beruht auf der folgenden Bemerkung. Bestehen die Relationen (26), so sind die Z_n von Z_1 an, sowie alle N_n positive Zahlen, die zugleich mit dem Index beständig wachsen. Wenn durchaus $b_n = a_n + 1$ ist, so hat man $N_n - Z_n = 1$; sonst ist von demjenigen Werthe von n: $n = m$, wofür zuerst $b_n > a_n + 1$ ist, an

$$N_n - Z_n > N_{n-1} - Z_{n-1} \geqq 1 .$$

Alles das ist leicht durch Induction zu zeigen. Da

$$Z_0 = 0 \quad Z_1 = a_1 \quad Z_2 = a_1 b_2 \cdots$$

ist, so ist $0 < Z_1 < Z_2 \ldots$ Nimmt man nun an, es sei

$$0 < Z_{n-2} < Z_{n-1} \quad (n \geqq 3),$$

so ergiebt sich vermöge der Formel

$$Z_n = b_n Z_{n-1} - a_n Z_{n-2} = (b_n - a_n) Z_{n-1} + a_n (Z_{n-1} - Z_{n-2}),$$

dafs auch $Z_n > Z_{n-1}$ ist. Auf ähnliche Art folgt aus den Formeln

$$N_0 = 1 \qquad N_1 = b_1 \qquad N_2 = b_1 b_2 - a_2 \cdots$$
$$N_n = b_n N_{n-1} - a_n N_{n-2}$$
$$= (b_n - a_n) N_{n-1} + a_n (N_{n-1} - N_{n-2}),$$

dafs N_n zugleich mit n beständig wächst. Man hat ferner

$$N_0 - Z_0 = 1 \qquad N_1 - Z_1 = b_1 - a_1$$
$$N_2 - Z_2 = (b_1 - a_1) b_2 - a_2 \ldots$$
$$N_n - Z_n = (b_n - a_n)(N_{n-1} - Z_{n-1})$$
$$+ a_n \{N_{n-1} - Z_{n-1} - (N_{n-2} - Z_{n-2})\}.$$

Wenn nun

$$b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \cdots = b_{m-1} - a_{m-1} = 1$$

ist, so findet man nacheinander

$$N_1 - Z_1 = N_2 - Z_2 = \cdots = N_{m-1} - Z_{m-1} = 1.$$

Falls durchaus $b_n = a_n + 1$ ist, so ist somit stets

$$N_n - Z_n = 1.$$

Falls jedoch $b_m > a_m + 1$ ist, so hat man $N_m - Z_m > 1$ und neben

$$N_{n-1} - Z_{n-1} > N_{n-2} - Z_{n-2} \geqq 1$$

auch

$$N_n - Z_n > N_{n-1} - Z_{n-1}. \qquad (27^*)$$

Da nun nach (VI)

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} = \frac{a_1\, a_2 \ldots a_n}{N_{n-1}\, N_n},$$

also positiv ist, so wachsen die Näherungsbrüche $Z_n : N_n$ zugleich mit n beständig, woraus man zunächst nach Nr. 4 erkennt, dafs jeder Bruch

$$V_n = \frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{b_n} = \frac{Z_n}{N_n}$$

einen Sinn hat. Es ist aber wegen

$$Z_n \leqq N_n - 1 \qquad V_n < 1;$$

also convergirt V_n bei $\lim n = +\infty$ zu einem positiven Grenzwerthe $\leqq 1$.

Wenn durchaus $b_n = a_n + 1$ ist, so hat man

$$N_n - Z_n = 1,$$

also nach (V)

$$Z_n N_{n-1} - N_n Z_{n-1} = N_n - N_{n-1} = a_1\, a_2 \ldots a_n.$$

Setzt man hier nacheinander statt n $1, 2 \ldots n-1$ und addirt alle Gleichungen, so folgt

$$N_n = 1 + a_1 + a_1 a_2 + \cdots + a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Somit hat N_n bei $\lim n = +\infty$ entweder einen endlichen positiven Grenzwerth ν oder den Grenzwerth $+\infty$, je nachdem eben die aus positiven Gliedern bestehende Reihe (27) convergirt oder divergirt. Diesen Möglichkeiten entsprechend schliefst man aus der Formel

$$V_n = \frac{N_n - 1}{N_n} = 1 - \frac{1}{N_n}$$

$$\lim_{n=+\infty} V_n = 1 - \frac{1}{\nu} \quad \text{bezw. } 1.$$

Z. B. der periodische Kettenbruch

$$\frac{a}{a+1} \dot{-} \frac{a}{a+1} \dot{-} \frac{a}{a+1} \dot{-} \cdots \qquad (a > 0)$$

hat den Grenzwerth a oder 1, je nachdem a kleiner als 1 ist oder nicht.

Ist $b_n = a_n + 1$ $(n = 1, 2 \ldots m-1)$, $b_m > a_m + 1$,

so ist der Grenzwerth von V_n bei $\lim n = +\infty$ kleiner als 1. Man betrachte neben V_n die Brüche

$$V'_n = \frac{Z'_n}{N'_n} = \frac{a_1}{a_1+1} \dot{-} \frac{a_2}{a_2+1} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{a_n+1}.$$

Da für $n \geqq m+1$ die durch den Schluſs von $n-1$ auf n zu beweisende Relation

$$N_n - N'_n > N_{n-1} - N'_{n-1} > 0$$

besteht, also neben

$$N_m > N'_m \quad N_n > N'_n$$

ist, so wird man mit Hilfe von Formel (17) leicht finden, daſs

$$V_n < V'_n \quad \text{und} \quad \lim_{n=+\infty} V_n < \lim_{n=+\infty} V'_n \leqq 1$$

ist.

Was diejenigen unendlichen Kettenbrüche von der Form (25), die unzählige Glieder besitzen, worin $b_n < a_n + 1$ ist, betrifft, so hat Seidel bemerkt[8]), daſs es unter den Brüchen von der reducirten Form

$$\frac{1}{k_1} \dot{-} \frac{1}{k_2} \dot{-} \frac{1}{k_3} \dot{-} \cdots,$$

wo die $k_1\ k_2 \ldots$ positive Zahlen sind, die sich steigend dem Grenzwerthe 2 nähern, convergente und divergente gebe, ja er hat die Existenz eines convergenten Kettenbruchs von dieser Gestalt nachgewiesen, dessen Theilnenner k_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $\sqrt{2}$ haben. Stern hat gezeigt[9]), daſs der Kettenbruch

$$b_0 - \frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \cdots$$

convergirt und einen positiven Grenzwerth hat, wenn für jeden Werth von n die Relation

$$\frac{a_1}{b_0 b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_{n-1} b_n} < 1$$

besteht.

Da der unendliche Kettenbruch

$$\frac{a_1}{a_1} \dot{-} \frac{a_2}{a_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{a_n} \cdots \quad (a_n > 0)$$

äquivalent mit dem folgenden

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{a_1} \dot{-} \frac{a_1}{a_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_{n-1}}{a_n} \dot{-} \cdots$$

ist [man setze nach Formel (17*)

$$c_1 = 1 : a_1 \quad c_n = a_{n-1} : a_n \qquad (n = 2, 3 \ldots)],$$

so convergirt er, wennn für $n \geq 1$

$$a_{n+1} \geqq a_n + 1$$

und der Kettenbruch

$$a_1 \dot{-} \frac{a_1}{a_2} \dot{-} \dots$$

nicht gleich 1 ist. — Insbesondere sind die Kettenbrüche

$$\frac{a}{a} \dot{-} \frac{a+1}{a+1} \dot{-} \frac{a+2}{a+2} \dot{-} \dots$$

und

$$\frac{1}{1} \dot{-} \frac{1}{a} \dot{-} \frac{a}{a+1} \dot{-} \frac{a+1}{a+2} \dot{-} \dots$$

äquivalent. Falls $a > 0$ ist, so hat der Kettenbruch

$$\frac{a}{a+1} \dot{-} \frac{a+1}{a+2} \dot{-} \dots$$

den Grenzwerth $+1$, folglich der erstgenannte den Grenzwerth $\frac{a-1}{a-2}$. Ausgenommen ist jedoch die Annahme $a = 2$, welche ihn divergent macht (vgl. Nr. 8).

12. Ueber die Kettenbrüche von der Form (25), deren Theilzähler und Theilnenner sämmtlich der Relation (26) genügen,

mögen noch die folgenden Bemerkungen hier Platz finden.

1) „Wenn

$$b_n = a_n + 1 \quad (n = 1, 2 \dots m-1), \quad b_m > a_m + 1$$

ist und die unendliche Reihe (27) divergirt, so wächst sowohl Z_n als auch N_n mit dem Index n ins Unendliche." Es ist nämlich für $n \geqq m \geqq 1$ (mit Ausnahme von $n = m = 1$)

$$Z_n - Z_{n-1} > a_1 a_2 \dots a_n .$$

In der That hat man

$$Z_n - Z_{n-1} = (b_n - a_n - 1) Z_{n-1} + a_n (Z_{n-1} - Z_{n-2}),$$

also, da $Z_{m-1} - Z_{m-2} = a_1 a_2 \dots a_{m-1}$ ist,

$$Z_m - Z_{m-1} > a_1 a_2 \dots a_m$$

$$Z_{m+1} - Z_m > a_1 a_2 \dots a_{m+1}$$

u. s. f.

Daraus ergiebt sich nach (27*)

$$N_n - N_{n-1} > a_1 a_2 \dots a_n \quad (n \geqq m). \tag{28}$$

2) Da die V_n in einem Sinne und zwar wachsend dem Grenzwerthe A_1 des Kettenbruches (25) sich nähern, so ist es wünschenswerth, eine Reihe von Zahlen kennen zu lernen, welche beständig abnehmend ebenfalls dem Grenzwerthe A_1 zustreben. Im Falle dafs die Reihe (27) divergirt, nehmen die Zahlen

$$V_n = \frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{b_n - 1} \quad (n \geq 1)$$

bei wachsendem n stets ab und es ist $\lim V_n = A_1$. Sie heifsen nach Stern mittelbare Näherungsbrüche von A_1. — Man hat nämlich

$$v_n = \frac{-a_n Z_{n-2} + (b_n - 1) Z_{n-1}}{-a_n N_{n-2} + (b_n - 1) N_{n-1}} = \frac{Z_n - Z_{n-1}}{N_n - N_{n-1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{(b_{n+1} - 1) Z_n - a_{n+1} Z_{n-1}}{(b_{n+1} - 1) N_n - a_{n+1} N_{n-1}}$$

$$Z_n N_{n-1} - N_n Z_{n-1} = a_1 a_2 \ldots a_n$$

$$v_n - v_{n+1} = \frac{(b_{n+1} - a_{n+1} - 1)\, a_1 a_2 \ldots a_n}{(N_{n+1} - N_n)(N_n - N_{n-1})}$$

$$v_n - V_n = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{N_n (N_n - N_{n-1})}.$$

Aus diesen Formeln folgt

$$v_{n+1} < v_n, \qquad V_n < v_n$$

und vermöge (28), dafs bei $\lim n = +\infty$ $\lim v_n = \lim V_n$ ist. — Wenn $\lim (v_n - V_n)$ nicht Null ist, was z. B. eintritt, falls durchweg $b_n = a_n + 1$ ist und die Reihe (27) convergirt, so haben die Brüche v_n keine Bedeutung.

3) „Läfst man aus dem Kettenbruche (25), worin

$$b_n \geq a_n + 1$$

ist, Glieder in endlicher oder unendlicher Anzahl weg, so bleibt ein convergenter Kettenbruch zurück."

4) Bezeichnet man den Grenzwerth des Kettenbruches

$$\frac{a_k}{b_k} \dot{-} \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \dot{-} \cdots \qquad (k \geq 1)$$

in dem in Rede stehenden Falle mit A_k, so findet man aus (IX) in Nr. 5 für $k = n$ bei $\lim r = +\infty$

$$A_1 - V_n = \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{N_n(N_{n+1} - A_{n+2}N_n)}.$$

Da, wenn A_1 nicht gleich 1 ist, $A_k \leqq 1$ ist, so ergiebt sich hieraus mit Hilfe von (28) die Ungleichung

$$0 < A_1 - V_n < 1 : N_n.$$

Unter den hier betrachteten Kettenbrüchen sind wichtig die reducirten d. i. die von der Form

$$k_0 - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \ldots - \frac{1}{k_n} - \ldots,$$

worin k_0 eine ganze, $k_1, k_2 \ldots k_n \ldots$ ganze positive Zahlen > 2 bedeuten. Sie haben folgende besondere Eigenschaften.

1) Die Nenner N_n der Näherungsbrüche sind natürliche Zahlen, die mit dem Index n beständig wachsen. Dasselbe gilt von den absoluten Beträgen ihrer Zähler Z_n; die Z_n selbst sind positiv oder negativ, je nachdem k_0 positiv ist oder nicht.

2) Z_n und N_n sind relative Primzahlen.

3) Jeder unendliche Kettenbruch von der in Rede stehenden Beschaffenheit convergirt. Sein Grenzwerth A ist positiv oder negativ, je nachdem k_0 positiv ist oder nicht, und stets, wie in Nr. 13 gezeigt werden wird, irrational.

4) Die Näherungsbrüche $V_n = Z_n : N_n$ convergiren bei wachsendem n beständig abnehmend zum Grenzwerthe A, während die mittelbaren Näherungsbrüche

$$v_n = (Z_n - Z_{n-1}) : (N_n - N_{n-1})$$

steigend demselben Werthe A zustreben.

5) Jeder gemeine Bruch $r : s$, der zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen V_{n-1} V_n liegt, hat einen Nenner, der gröfser als N_n ist.

6) Jede gebrochene rationale Zahl läfst sich in einen und nur einen endlichen, jede irrationale Zahl in einen und nur einen unendlichen Kettenbruch von der obigen Form entwickeln.

Soll irgend eine reelle nicht-ganze Zahl ξ einem endlichen oder unendlichen reducirten Kettenbruche

$$k_0 - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \ldots$$

worin k_0 eine ganze, k_1 k_2 ... ganze positive Zahlen ≥ 2 sind, gleich sein, so muſs

$$k_0 > \xi > k_0 - 1$$

sein, wodurch k_0 bestimmt ist. Setzt man

$$\xi = k_0 - \xi_1 \qquad (0 < \xi_1 < 1),$$

so soll

$$\frac{1}{\xi_1} = k_1 - \frac{1}{k_2} \dotplus \cdots$$

sein, also muſs

$$k_1 > 1 : \xi_1 > k_1 - 1$$

sein, wodurch k_1 völlig bestimmt ist. Dabei ist $k_1 > 1$. Hierauf setzt man

$$1 : \xi_1 = k_1 - \xi_2 \qquad (0 < \xi_2 < 1)$$

und verfährt ähnlich, u. s. f.

Ist ξ ein rationaler Bruch und zwar in reducirter Form gleich $r : s$ $(s > 0)$: so findet man demnach k_0, k_1, ... durch die Divisionen

$$\frac{r}{s} = k_0 - \frac{s_1}{s} \qquad (0 < s_1 < s)$$

$$\frac{s}{s_1} = k_1 - \frac{s_2}{s_1} \qquad (0 < s_2 < s_1)$$

. . . . . .

$$\frac{s_{n-1}}{s_n} = k_n - \frac{s_{n+1}}{s_n} \qquad (0 < s_{n+1} < s_n).$$

Da die natürlichen Zahlen s_1 s_2 ... s_n ... beständig abnehmen, so muſs eine s_m die letzte sein. Sie genügt den Gleichungen

$$\frac{s_{m-2}}{s_{m-1}} = k_{m-1} - \frac{s_m}{s_{m-1}} \qquad \frac{s_{m-1}}{s_m} = k_m,$$

wobei $k_m > 1$ sein muſs. Aus den vorstehenden Formeln folgt die Gleichung

$$\frac{r}{s} = k_0 - \frac{1}{k_1} \dotplus \frac{1}{k_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{1}{k_m}.$$

Wenn ξ irrational ist, so bricht die Reihe der Gleichungen

$$\frac{1}{\xi_1} = k_1 - \xi_2 \cdots \frac{1}{\xi_n} = k_n - \xi_{n+1} \cdots$$

niemals ab. Daſs der so ermittelte Kettenbruch

$$k_0 - \frac{1}{k_1} \dotplus \frac{1}{k_2} \dotplus \cdots$$

den Grenzwerth ξ hat, wird so bewiesen. Man hat zunächst

$$\xi = k_0 - \frac{1}{k_1} \dot{-} \frac{1}{k_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{1}{k_n - \xi_{n+1}} \qquad (0 < \xi_{n+1} < 1)$$

$$= \frac{Z_n - \xi_{n+1} Z_{n-1}}{N_n - \xi_{n+1} N_{n-1}}$$

$$V_n - \xi = \frac{\xi_{n+1}}{N_n (N_n - \xi_{n+1} N_{n-1})}.$$

Da

$$N_n - \xi_{n+1} N_{n-1} > N_n - N_{n-1} > 1$$

ist und N_n zugleich mit n ins Unendliche wächst, so ergiebt sich in der That

$$\lim_{n=+\infty} V_n = \xi.$$

13. Die Irrationalität gewisser unendlicher Kettenbrüche.[10])

Satz. „Sind im endlichen Kettenbruche

$$\frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{\varepsilon a_2}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{\varepsilon a_n}{b_n} \dot{+} \cdots, \qquad (a)$$

wo ε gleich $+1$ oder -1 ist, die Theilzähler a_n und die Theilnenner b_n sämmtlich natürliche Zahlen, welche von einem bestimmten Werthe von n: $n = m$ an, falls $\varepsilon = +1$, der Relation $b_n \geqq a_n$, falls $\varepsilon = -1$ ist, der Relation

$$b_n \geqq a_n + 1$$

genügen, jedoch so, dafs in der letzteren für unzählige Werthe von n das obere Zeichen gilt; so ist der Grenzwerth des Kettenbruches eine irrationale Zahl."

Beweis. Wir wollen zunächst annehmen, dafs die erwähnten Relationen von $n = 1$ an gelten. Hätte der Kettenbruch (a) einen positiven rationalen Grenzwerth, $m_1 : m_0$ in reducirter Gestalt, so mufs auch der Kettenbruch

$$\frac{a_2}{b_2} \dot{+} \frac{\varepsilon a_3}{b_3} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{\varepsilon a_n}{b_n} \dot{+} \cdots$$

gleich einer positiven rationalen Zahl sein, die wir mit $\mu_2 : m_1$ bezeichnen, wobei es zunächst unentschieden bleibt, ob μ_2 ganz oder gebrochen ist. So fortfahrend, setzen wir nacheinander

$$\frac{a_n}{b_n} \dot{+} \frac{\varepsilon a_{n+1}}{b_{n+1}} \dot{+} \cdots = \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} \quad (n = 3, 4 \ldots),$$

sodafs $\mu_3, \mu_4 \ldots$ positive rationale Zahlen bedeuten. Daraus folgt aber

$$\frac{\mu_{n-1}}{\mu_{n-2}} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \varepsilon \dfrac{\mu_n}{\mu_{n-1}}} \quad (n = 2, 3 \ldots),$$

wobei statt $\mu_0\ \mu_1$, $m_0\ m_1$ zu schreiben ist, und weiter, dafs

$$\varepsilon\mu_2 = a_1 m_0 - b_1 m_1 \qquad \varepsilon\mu_3 = a_2 m_1 - b_2 \mu_2$$
$$\varepsilon\mu_n = a_{n-1}\mu_{n-2} - b_{n-1}\mu_{n-1} \quad (n = 4, 5 \ldots)$$

ist. Somit müfsten auch $\mu_2, \mu_3 \ldots \mu_n \ldots$ natürliche Zahlen sein:

$$\mu_n = m_n \quad (n = 2, 3 \ldots).$$

Die Brüche

$$\frac{m_1}{m_0}\ \frac{m_2}{m_1} \cdots \frac{m_n}{m_{n-1}} \cdots$$

sind sämmtlich ächt (vgl. Nr. 9, 11), so dafs $m_n < m_{n-1}$ sein mufs. Das ist jedoch unmöglich, da die Reihe $m_0\, m_1 \ldots m_n \ldots$ ohne Ende fortläuft. Der Grenzwerth des Kettenbruches (a) mufs also irrational sein. — Falls die Relation $b_n \geqq a_n$ bezw. $b_n \geqq a_n + 1$ nicht von $n = 1$ an besteht, so wird der Satz mit Hilfe der Formel (IX) in Nr. 5 bewiesen.

Der vorstehende Satz ist die Umkehrung des folgenden. „Versteht man unter $a_1\ a_2 \ldots a_n \ldots$ eine endlose, genau definirte Reihe von natürlichen Zahlen, so läfst sich jede irrationale Zahl ξ verwandeln sowohl in einen unendlichen Kettenbruch von der Form

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_n}{b_n} \dot{+} \cdots$$

worin die b_n von $n = 1$ an natürliche Zahlen, die der Relation $b_n > a_n$ genügen, bezeichnet, als auch in einen von der Form

$$b_0 - \frac{a_2}{b_1} \dot{-} \frac{a_1}{b_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{b_n} \dot{-},$$

worin die b_n von $n = 1$ an natürliche Zahlen, die der Relation $b_n \geqq a_n + 1$ genügen, bezeichnen. b_0 kann in beiden Fällen irgend eine ganze Zahl sein.“ — Der Beweis des ersten Theiles des Satzes wird so wie der des Satzes in Nr. 10, welcher einen besonderen Fall desselben bildet, geführt, der des zweiten Theiles so wie der des darin enthaltenen Schlufssatzes von Nr. 12.

Periodische Kettenbrüche.

14. Entsteht ein unendlicher Kettenbruch dadurch, dafs von einem gewissen Gliede an eine aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern gebildete Folge, welche die Periode heifst, fortwährend wiederholt wird, so heifst er periodisch und zwar rein-periodisch, wenn die Periode beim ersten Gliede beginnt, gemischt-periodisch, wenn ihr Glieder vorangehen, wozu jedenfalls die additive Zahl b_0 zu rechnen ist. Es genügt offenbar, sich mit den rein-periodischen Kettenbrüchen zu befassen. Wir legen uns demnach den unendlichen Kettenbruch

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_m}{b_m} + \frac{a_1}{b_1} + \cdots \qquad (29)$$

vor, worin die m ersten Glieder die Periode bilden. Die Theilzähler $a_1 \ldots a_m$ und die Theilnenner $b_1 \ldots b_m$ können beliebige, reelle oder complexe, Werthe haben, nur soll keiner der ersteren verschwinden. Wenn der Kettenbruch (29) convergirt, so mufs der Grenzwerth x der quadratischen Gleichung

$$x = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_m}{b_m + x}$$

genügen. Bezeichnen wir die dem Kettenbruche

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_m}{b_m}$$

zugehörigen Zähler und Nenner der Näherungsbrüche mit $Z_n\ N_n$, so findet man hieraus

$$x = \frac{x\,Z_{m-1} + Z_m}{x\,N_{m-1} + N_m} \qquad (29^*)$$

d. i.

$$N_{m-1}\,x^2 + (N_m - Z_{m-1})\,x - Z_m = 0. \qquad (30)$$

Mit voller Strenge ergiebt sich (29*) aus den Formeln (10) in Nr. 5.

Nun ist noch zu untersuchen, welche der Wurzeln dieser Gleichung der Grenzwerth von (29) ist. Diese und die Frage nach der Convergenz von (29) läfst sich in einigen

Fällen leicht erledigen. Sind z. B. die Theilzähler und Theilnenner von (29) sämmtlich reell und positiv, so ist der Bruch (29) stets convergent, indem die unendliche Reihe (23) in Nr. 9 als eine periodische gewifs divergirt. Sein Grenzwerth ist die einzige positive Wurzel von (30). Auch im Falle, dafs die Theilzähler sämmtlich negativ sind und

$$b_n + a_n \geqq 1$$

ist, wird man mit dem bisher Vorgetragenen ausreichen. Um allgemeine Sätze zu erhalten, betrachte man die Näherungsbrüche von (29) unmittelbar.[11])

Wir bezeichnen die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche des Kettenbruches (29) durchweg mit Z_n und N_n. Dann ist nach den Formeln (IV) in Nr. 3 für

$$p = hm + r \qquad k = hm + 1$$

$$\begin{aligned} Z_{hm+r} &= Z_r Z_{hm-1} + N_r Z_{hm} \\ N_{hm+r} &= Z_r N_{hm-1} + N_r N_{hm} \end{aligned} \qquad (r = 1, 2 \ldots m). \qquad (31)$$

Wir brauchen nur independente Formeln für die vier Ausdrücke Z_{hm-1} N_{hm-1} Z_{hm} N_{hm}, wobei vier Fälle zu unterscheiden sind.

I. Es sei N_{m-1} nicht Null und die Wurzeln (a, b) der Gleichung (30) verschieden.

Wir führen anstatt N_{m-1} N_m die Zahlen

$$\begin{aligned} N_m + a N_{m-1} &= c \\ N_m + b N_{m-1} &= d \end{aligned}$$

ein, so dafs

$$(a - b) N_{m-1} = c - d \qquad (a - b) N_m = ad - bc$$

ist. Mit Hilfe der Formeln

$$\left.\begin{aligned} Z_{m-1} - N_m &= (a + b) N_{m-1} \\ Z_m &= - ab N_{m-1} \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

finden wir dann

$$\begin{aligned} (a - b) Z_{m-1} &= ac - bd \\ (a - b) Z_m &= ab (d - c). \end{aligned}$$

Hieraus folgt noch

$$Z_m N_{m-1} - Z_{m-1} N_m = - cd, \qquad (32^*)$$

so dafs weder c noch d Null sein kann.

Den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} Z_{(h+1)m-1} &= Z_{m-1}Z_{hm-1} + N_{m-1}Z_{hm} \\ N_{(h+1)m-1} &= Z_{m-1}N_{hm-1} + N_{m-1}N_{hm} \\ Z_{(h+1)m} &= Z_m \quad Z_{hm-1} + N_m \quad Z_{hm} \\ N_{(h+1)m} &= Z_m \quad N_{hm-1} + N_m \quad N_{hm} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

genügen identisch die Ausdrücke ($h \geqq 1$)

$$\left.\begin{aligned} (a-b)Z_{hm-1} &= ac^h \quad - bd^h \\ (a-b)N_{hm-1} &= c^h \quad - d^h \\ (a-b)Z_{hm} &= ab\,(d^h - c^h) \\ (a-b)N_{hm} &= ad^h \quad - bc^h \end{aligned}\right\}. \tag{34}$$

II. Es sei N_{m-1} nicht Null und die Wurzeln a b von (30) einander gleich. Wenn $b = a$ ist, so ergiebt sich mit Hilfe von (32) und der Annahme

$$N_m + aN_{m-1} = c \qquad Z_{m-1} = c + aN_{m-1}$$
$$Z_m = -a^2 N_{m-1} \qquad N_m = c - aN_{m-1}.$$

Hieraus folgt noch, dafs

$$Z_m N_{m-1} - Z_{m-1}N_m = -c^2,$$

so dafs c nicht Null sein kann.

Den Gleichungen (33) genügen identisch die Ausdrücke ($h \geqq 1$)

$$\left.\begin{aligned} Z_{hm-1} &= c^{h-1}(c + haN_{m-1}) \\ N_{hm-1} &= hc^{h-1}N_{m-1} \\ Z_{hm} &= -hc^{h-1}a^2 N_{m-1} \\ N_{hm} &= c^{h-1}(c - haN_{m-1}) \end{aligned}\right\}. \tag{35}$$

III. $N_{m-1} = 0$, $N_m - Z_{m-1}$ nicht Null. Z_{m-1}, N_m sind nicht Null. Bezeichnet man die Wurzel von (30) mit a, so ist

$$(N_m - Z_{m-1})a = Z_m.$$

Den Gleichungen (33) genügen identisch die Ausdrücke ($h \geqq 1$)

$$\begin{aligned} Z_{hm-1} &= Z_{m-1}^h & N_{hm-1} &= 0 \\ Z_{hm} &= a\{N_m^h - Z_{m-1}^h\} & N_{hm} &= N_m^h. \end{aligned} \tag{36}$$

IV. $N_{m-1} = 0 \quad N_m - Z_{m-1} = 0$. Z_{m-1} ist nicht Null. Den Gleichungen (33) genügen identisch die Ausdrücke ($h \geqq 1$)

$$\begin{aligned} Z_{hm-1} &= N_m^h & N_{hm-1} &= 0 \\ Z_{hm} &= hZ_m N_m^{h-1} & N_{hm} &= N_m^h . \end{aligned} \tag{37}$$

Gestützt auf die vorstehenden Formeln wird man die zur Convergenz des periodischen Kettenbruches (27) nothwendige und hinreichende Bedingung leicht auffinden.

Satz. „Der Kettenbruch (29) convergirt im Falle I. dann und nur dann, wenn der absolute Betrag des Quotienten $c:d$ nicht gleich 1 und, falls $m \geqq 2$ ist, keine der Zahlen

$$Z_r - bN_r \quad (r = 0, 1, \ldots m-2)$$

Null ist. Dabei sind die Bezeichnungen a b so verwendet, dafs $|c| > |d|$ ist. a ist der Grenzwerth des periodischen Kettenbruches (29).

Im Falle II. convergirt der Kettenbruch (29) und zwar ist sein Grenzwerth die einzige Wurzel von (30) $a = b$."

Unter allen übrigen Umständen z. B. in den Fällen III und IV divergirt der Kettenbruch."

Beweis. Die Convergenz des in Rede stehenden Kettenbruches setzt voraus, dafs von einem bestimmten Werthe von n an kein Nenner N_n verschwindet. Aus (34) ist ersichtlich, dafs es Werthe von h, wofür $N_{hm-1} = 0$ ist und die gröfser als irgend eine gegebene Zahl G sind, dann und nur dann giebt, wenn $d:c$ gleich einer von $+1$ verschiedenen Einheitswurzel ist. $d:c = 1$ ist nämlich unmöglich. Die Nenner der übrigen Näherungsbrüche sind nach (31)

$$(a-b)N_{hm+r} = (Z_r - bN_r)\,c^h - (Z_r - aN_r)\,d^h$$
$$(r = 0, 1 \ldots m-2).$$

Dieser Ausdruck ist für den bestimmten Werth $h = k$ Null, falls

$$d:c = \sqrt[k]{(Z_r - bN_r) : (Z_r - aN_r)}$$

ist, wobei $Z_r - aN_r$ als von Null verschieden angesehen ist. Damit ergiebt sich für $h = kn$

$$(a-b)\,N_{kn\,m+r} = c^{kn}\cdot(Z_r - bN_r)\left\{1-\left(\frac{Z_r-bN_r}{Z_r-aN_r}\right)^{n-1}\right\},$$

welcher Ausdruck dann und nur dann verschwindet, wenn

$$n-1 = pl \quad \text{und} \quad (Z_r - bN_r) : (Z_r - aN_r)$$

eine l^{te} Einheitswurzel ist. Nunmehr ist $d:c$ eine kl^{te} Einheitswurzel. — Wir bilden jetzt

$$\frac{Z_{km+r}}{N_{km+r}} = \frac{(Z_r - bN_r)\,ac^k - (Z_r - aN_r)bd^k}{(Z_r - bN_r)\,c^k - (Z_r - aN_r)\,d^k} \qquad (r=0,1\ldots m-1).$$

Der Ausdruck rechts umfafst alle Näherungsbrüche, da

$$Z_0 = 0 \qquad N_0 = 1 \qquad Z_{m-1} - aN_{m-1} = d$$
$$Z_{m-1} - bN_{m-1} = c$$

ist. Wenn die Bezeichnung a so gewählt ist, dafs

$$|d| : |c| < 1$$

ist, so findet man aus der vorstehenden Formel

$$\lim_{k=+\infty} \frac{Z_{km+r}}{N_{km+r}} = a.$$

Nur darf auch für keinen der Werthe

$$r = 0, 1\ldots m-2 \qquad Z_r - bN_r = 0$$

sein. Denn für einen solchen hat man

$$\frac{Z_{km+r}}{N_{km+r}} = b,$$

so dafs $Z_n : N_n$ bei $\lim n = +\infty$ keinen Grenzwerth hat.[11*])

Im Falle II. ist

$$N_{km+r} = \{k(Z_r - aN_r)\,N_{m-1} + N_r c\}\,c^{k-1}$$
$$(r = 0, 1\ldots m-1).$$

Dieser Ausdruck könnte für unzählige Werthe von k nur in der Art verschwinden, dafs

$$Z_r - aN_r = 0 \quad \text{und} \quad N_r = 0$$

ist. Das ist jedoch unmöglich, da N_r Z_r nie zugleich Null sind. Aus der Formel

$$\frac{Z_{km+r}}{N_{km+r}} = \frac{k(Z_r - aN_r)\,aN_{m-1} + Z_r c}{k(Z_r - aN_r)\,N_{m-1} + N_r c}$$

folgt

$$\lim_{h=+\infty} \frac{Z_{hm+r}}{N_{hm+r}} = a,$$

auch wenn $Z_r - aN_r = 0$ sein sollte.

15. Beispiele zum Satze der vorigen Nummer.

Dabei mögen sämmtliche Theilzähler und Theilnenner reell sein.

1) Sind im Falle I. die Wurzeln der Gleichung (30) complex, so sind sie nunmehr conjugirt. Also sind auch $c\,d$ conjugirte Zahlen, so dafs $|\,c : d\,| = 1$ ist. Der periodische Kettenbruch ist mithin divergent. — Da die Theilzähler und Theilnenner eines Kettenbruches stets so bestimmt werden können, dafs $Z_{m-1}\ N_{m-1}\ Z_m\ N_m$ beliebige Werthe erhalten, so mögen $a\,b\,c\,d$ willkürlich sein, nur darf wegen (32*) weder c noch d verschwinden. Es wird also auch solche periodische Kettenbrüche mit reellen Theilzählern und Theilnennern geben, wofür $c + d = 0$ ist. Ein jeder von ihnen ist divergent, während die ihm entsprechende Gleichung (30) reelle Wurzeln haben kann. Kettenbrüche dieser Art mit zweigliederiger Periode lassen sieh stets auf die Form

$$\frac{B}{1} \dot{-} \frac{(B^2 + A) : B}{A : B} \dot{+} \cdots$$

bringen, zu welcher die Gleichung $x^2 - 2Bx = A$ gehört. Dabei ist

$$c = -\,d = \sqrt{B^2 + A}.$$

2) Der rein-periodische Kettenbruch mit der Periode

$$\frac{1}{-1} \dot{+} \frac{1}{\frac{5}{2}} \dot{+} \frac{1}{-1} \dot{+} \frac{1}{-1} \dot{+} \frac{1}{-1} \dot{+} \frac{1}{4}$$

führt auf die quadratische Gleichung $5x^2 + 27x + 36 = 0$, deren Wurzeln $-\frac{12}{5}$ und -3 sind. Hierbei ist $a = -\frac{12}{5}$ $b = -3$ $c = 2$ $d = \frac{1}{2}$. Da $Z_3 - bN_3 = 0$ ist, so divergirt der in Rede stehende periodische Kettenbruch und zwar hat man

$$\lim_{h=+\infty} \frac{Z_{6h+r}}{N_{6h+r}} = -\frac{5}{12} \quad (r = 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5) \qquad \frac{Z_{6h+3}}{N_{6h+3}} = -3.$$

3) Sind $a_1 \ldots a_m$, $b_1 \ldots b_m$ sämmtlich positiv, so sind Z_r, N_r positiv. Die Gleichung (30) hat entgegengesetzt bezeichnete Wurzeln. Es ist $cd = (-1)^m a_1 a_2 \ldots a_m$ nach (32*) und

$$c - d = N_{m-1}(a - b) \qquad c + d = Z_{m-1} + N_m. \qquad (38)$$

Nimmt man $a > 0$ an, so ist c positiv und $c > |d|$. Da aufserdem wegen $b < 0$ $Z_r - bN_r > 0$, so ist in dem betrachteten Falle der Kettenbruch (29) convergent und die positive Wurzel der Gleichung (30) sein Grenzwerth. — So ist der Grenzwerth des unendlichen Kettenbruches

$$\frac{A}{2B} + \frac{A}{2B} + \frac{A}{2B} + \cdots \quad (A > 0 \quad B > 0)$$

die Wurzel $a = \sqrt{B^2 + A} - B$ der Gleichung $x^2 + 2Bx - A = 0$.

4) Sind $a_1 \ldots a_m$ negativ, $b_1 b_2 \ldots b_m$ positiv, so schreiben wir statt a_r $-a_r$, statt Z_r $-Z_r$. Ist dann wie in Nr. 11

$$b_r \geqq a_r + 1 \qquad (r = 1, 2 \ldots m),$$

so ist $N_r > 0$ $Z_r > 0$. Die Gleichung (30) hat entweder zwei negative Wurzeln oder die einzige Wurzel $x = -1$, was nur im Falle, dafs durchweg $b_r = a_r + 1$ ist, eintreten kann. Es ist

$$x = -\frac{N_m + Z_{m-1}}{2N_{m-1}} \pm \sqrt{\left(\frac{N_m + Z_{m-1}}{2N_{m-1}}\right)^2 - \frac{Z_m}{N_{m-1}}},$$

$$\begin{aligned}(N_m + Z_{m-1})^2 - 4N_{m-1}Z_m \\ = (N_m - Z_{m-1})^2 - 4(Z_m N_{m-1} - N_m Z_{m-1}) \\ = (N_m - Z_{m-1})^2 - 4a_1 a_2 \ldots a_m.\end{aligned}$$

Nach Nr. 11 und 12 hat man

$$N_{m-1} - Z_{m-1} \geqq 1 \qquad N_m - N_{m-1} \geqq a_1 a_2 \ldots a_m,$$

also

$$\begin{aligned}(N_m - Z_{m-1})^2 - 4a_1 a_2 \ldots a_m &\geqq (N_m - Z_{m-1})^2 \\ &\quad - 4(N_{m-1} - Z_{m-1})(N_m - N_{m-1})\end{aligned}$$

$$(N_m - Z_{m-1})^2 - 4a_1 a_2 \ldots a_m \geqq (N_m + Z_{m-1} - 2N_{m-1})^2. \qquad (39)$$

Nur falls das untere Zeichen in dieser Formel steht, also wenn durchaus $b_r = a_r + 1$ ist, kann die Discriminante der Gleichung (30) Null sein — und zwar dann, wenn

$$N_m + Z_{m-1} - 2N_{m-1} = 0$$

ist. In diesem Falle hat die Gleichung nur die Wurzel $x = -1$; der periodische Kettenbruch convergirt und sein Grenzwerth ist -1.

Sind die Wurzeln von Gleichung (30) verschieden, so gebrauchen wir die Hilfszahlen c d, die nun gleichbezeichnet sind. Da $N_m > Z_{m-1}$ ist, so sind nach (38) c d positiv und es mufs a die algebraisch gröfsere der Wurzeln von (30) sein. Somit ist

$$b = -\frac{N_m + Z_{m-1}}{2N_{m-1}} - \sqrt{\left(\frac{N_m - Z_{m-1}}{2N_{m-1}}\right)^2 - \frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{N_{m-1}^2}},$$

woraus hervorgeht, dafs $|b| \geqq 1$ ist. Das versteht sich von selbst, falls

$$N_m + Z_{m-1} \geqq 2N_{m-1}$$

ist. Wenn aber $N_m + Z_{m-1} < 2N_{m-1}$ ist, so hat man nach (39)

$$-b \geqq \frac{N_m + Z_{m-1}}{2N_{m-1}} + \left(1 - \frac{N_m + Z_{m-1}}{2N_{m-1}}\right) = 1.$$

Die Ausdrücke

$$-Z_r - bN_r = N_r - Z_r - (1+b)N_r \quad (r = 0, 1 \ldots m-2)$$

sind also positiv. Es ergiebt sich hierdurch, dafs der Kettenbruch (29) convergirt und dafs sein Grenzwerth a ist.

5) Dafs in dem zuletzt betrachteten Falle der periodische Kettenbruch auch dann convergiren kann, wenn nicht durchaus $b_r \geqq a_r + 1$ ist, zeigt sich an dem unendlichen Kettenbruch

$$-\frac{A}{2B} \cdot \frac{A}{2B} \cdot \frac{A}{2B} \cdot \cdots \quad (A > 0,\ B > 0).$$

Die Gleichung (30) geht nun in $x + 2Bx + A = 0$ über. Wenn $B^2 - A > 0$ ist, so sind ihre Wurzeln a b reell und negativ. Ist $a > b$, so hat man $c = -b$ $d = -a$. Der vorstehende Kettenbruch convergirt demnach und sein Grenzwerth ist

$$a = -B + \sqrt{B^2 - A},$$

so dafs

$$\sqrt{B^2 - A} = B - \frac{A}{2B} \cdot \frac{A}{2B} \cdot \cdots$$

ist. — Auch wenn $B^2 - A = 0$ ist, so convergirt der Kettenbruch; sein Grenzwerth ist $-B$.[12])

Sind die Theilzähler und Theilnenner eines convergenten periodischen Kettenbruches ganze oder rationale Zahlen, so ist sein Grenzwerth Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung. Wir sahen soeben, dafs man umgekehrt eine der reellen Wurzeln einer solchen Gleichung $x^2 + 2Bx = \pm A$, wo A B rationale Zahlen seien, in einen rein-periodischen Kettenbruch verwandeln kann; für die andere findet man dann hieraus einen gemischt-periodischen. Es läfst sich aber auch zeigen, — worauf jedoch hier nicht eingegangen werden soll[13]) — dafs sich jede reelle Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung in einen einfachen periodischen Kettenbruch und in einen solchen von reducirter Form, dessen Theilnenner sämmtlich natürliche Zahlen $\geqq 2$ sind, entwickeln läfst.

6) Besondere Berücksichtigung verdient der einfachste aller periodischen Kettenbrüche

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \cdots \tag{40}$$

Dafür ist $N_{-1} = Z_0 = 0 \quad N_0 = Z_1 = 1$, also allgemein $N_{h+1} = Z_h$ $(h \geq 0)$. Die quadratische Gleichung (30) geht über in

$$x^2 + x = 1.$$

Der Grenzwerth des Kettenbruches (40) ist die positive Wurzel derselben

$$a = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Zugleich ist

$$b = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

$$c = N_1 + N_0 a = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \qquad d = N_1 + N_0 b = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Man hat daher nach (34) für $m = 1$

$$\sqrt{5} \cdot Z_h = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^h - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^h.$$

Die Zahlen Z_h, wofür $Z_h = Z_{h-2} + Z_{h-1}$ ist, d. i.

$$Z_0 = 0 \quad Z_1 = 1 \quad Z_2 = 1 \quad Z_3 = 2 \quad Z_4 = 3 \quad Z_5 = 5 \ldots$$

heifsen die Schimper'schen oder Lamé'schen Zahlen. Z_h giebt die Anzahl der Glieder des Zählers des h^{ten} Näherungsbruches, falls $b_0 = 0$ ist, sowie des Nenners des $(h-1)^{\text{ten}}$, bei unbestimmten Theilzählern und Theilnennern an. Denn setzt man durchaus $a_n = 1 \quad b_n = 1$, so wird ein jedes Glied dieser Ausdrücke gleich 1.

16. Verwandlung von unendlichen Reihen in unendliche Kettenbrüche.[14])

Die Aufgabe, einen n-gliederigen Kettenbruch aufzustellen, dessen aufeinander folgende Näherungsbrüche gleich den gleichvielten Partialsummen des aus $(n+1)$ Gliedern bestehenden Aggregates

$$w_0 + w_1 - w_2 + w_3 - \cdots + (-1)^{n-1} w_n \tag{a}$$

sind, bildet einen besonderen Fall der in Nr. 6 behandelten Aufgabe 4. Wir lassen die Nenner $N_1 \; N_2 \ldots N_n$ vorderhand unbestimmt und setzen

$$Z_0 = w_0 \qquad Z_p = \left\{ w_0 + \sum_1^p (-1)^{s-1} w_s \right\} N_p$$

$$(p = 1, 2 \ldots n).$$

Dann hat man

$$b_0 = w_0 \qquad a_1 = w_1 N_1 \qquad b_1 = N_1$$

$$a_p = \frac{w_p N_p}{w_{p-1} N_{p-2}} \qquad b_p = \frac{(w_{p-1} - w_p) N_p}{w_{p-1} N_{p-1}},$$

wobei $N_0 = 1$ zu setzen ist. — Zunächst wollen wir die a_p b_p zu ganzen Functionen der w_p machen, wozu die Annahmen

$$N_1 = 1 \qquad N_p = w_1 w_2 \ldots w_{p-1} \qquad (p = 2, 3 \ldots n)$$

ausreichen. Dadurch wird $a_2 = w_2$ $b_2 = w_1 - w_2$

$$a_p = w_{p-2} w_p \qquad b_p = w_{p-1} - w_p \quad (p = 3 \ldots n),$$

so dafs man die Gleichung erhält

$$w_0 + w_1 - w_2 + \cdots + (-1)^{n-1} w_n$$

$$= w_0 + \frac{w_1}{1} \dotplus \frac{w_2}{w_1 - w_2} \dotplus \frac{w_1 w_3}{w_2 - w_3} \dotplus \cdots \dotplus \frac{w_{n-2} w_n}{w_{n-1} - w_n} \cdot \quad \text{(A)}$$

Wenn $w_0 = 0$, $w_p = x^p : c_p$ ist, so mag man setzen

$$N_p = c_1 c_2 \ldots c_p \quad (p = 1, 2 \ldots n),$$

wodurch man neben $a_1 = x$ $b_1 = c_1$ für $p = 2, 3 \ldots n$

$$a_p = c_{p-1}^2 x \qquad b_p = c_p - c_{p-1} x$$

erhält. Es ist also

$$\frac{x}{c_1} - \frac{x^2}{c_2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{c_n}$$

$$= \frac{x}{c_1} \dotplus \frac{c_1^2 x}{c_2 - c_1 x} \dotplus \frac{c_2^2 x}{c_3 - c_2 x} \dotplus \cdots \dotplus \frac{c_n^2 x}{c_n - c_{n-1} x} \cdot \quad \text{(B)}$$

Ist endlich $w_0 = 0$ $w_p = x^p : d_1 d_2 \ldots d_p$, so setze man

$$N_p = d_1 d_2 \ldots d_p \qquad (p = 1, 2 \ldots n),$$

wodurch sich die Umformung

$$\frac{x}{d_1} - \frac{x^2}{d_1 d_2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{d_1 d_2 \ldots d_n}$$

$$= \frac{x}{d_1} \dotplus \frac{d_1 x}{d_2 - x} \dotplus \frac{d_2 x}{d_3 - x} \dotplus \cdots \dotplus \frac{d_{n-1} x}{d_n - x} \qquad \text{(C)}$$

ergiebt.

Aus den Formeln (A) — (C) ist ersichtlich, dafs wenn man die Reihe links und den Kettenbruch rechts ohne Ende fortlaufen läfst, die bez. unendliche Reihe und der unendliche Kettenbruch äquivalent sind, d. h. jede Partialsumme der

ersteren gleich dem ebensovielten Näherungsbruche des letzteren ist. Convergirt insbesondere der eine von beiden Ausdrücken, so auch der andere und es haben beide denselben Grenzwerth.

Beispiele. 1) Nach (B) ergiebt sich für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag 1 nicht übersteigt, mit Ausnahme von $x = -1$,

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$= \frac{x}{1} \dot{+} \frac{x}{2-x} \dot{+} \frac{2^2x}{3-2x} \dot{+} \frac{3^2x}{4-3x} \dot{+} \cdots \qquad \text{(b)}$$

Für alle anderen Werthe von x divergiren beide Seiten dieser Gleichung. Neben äquivalenten Reihen und Kettenbrüchen giebt es auch solche, deren Convergenzbereiche nur theilweise übereinstimmen. Die Function

$$\frac{x}{l(1+x)} = 1 : \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots\right)$$

läßt sich für alle x, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, in eine Potenzreihe und somit nach der Formel (B) in einen äquivalenten Kettenbruch entwickeln. Aus (b) findet man für dieselbe Reihe die Darstellung

$$\frac{x}{l(1+x)} = 1 + \frac{x}{2-x} \dot{+} \frac{2^2x}{3-2x} \dot{+} \frac{3^2x}{4-3x} \dot{+} \cdots$$

Die Potenzreihe links divergirt für alle Werthe von x, wofür $|x| > 1$ ist, während der Kettenbruch rechts sicher für die reellen darunter convergirt und zwar den Grenzwerth Null hat.

2) Ebenfalls nach (B) erhält man für alle x, deren absoluter Betrag 1 nicht übersteigt, außer $x = \pm i$

$$\operatorname{arc\,tan} x = \frac{x}{1} \dot{+} \frac{x^2}{3-x} \dot{+} \frac{3^2x^2}{5-3x} \dot{+} \frac{5^2x^2}{7-5x} \dot{+} \cdots$$

3) Mit Hilfe von (C) ergiebt sich für jeden endlichen Werth von x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} \dot{-} \frac{x}{2+x} \dot{-} \frac{2x}{3+x} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{(n-1)x}{n+x} \dot{-} \cdots$$

17. Verwandlung des Quotienten zweier Potenzreihen in einen Kettenbruch.[15])

Es seien $F_0(x)$ $F_1(x)$ Reihen nach ganzen positiven Potenzen von x, wobei x zugleich einen Werth in ihrem gemeinsamen Convergenzbereiche bezeichnet. Ist $F_1(0)$ nicht Null, so ist

$$F_0(x) - \frac{F_0(0)}{F_1(0)} F_1(x)$$

eine gewöhnliche Potenzreihe nach x ohne x-freies Glied.

Nehmen wir an, dafs sie mit dem Gliede mit x beginnt und bezeichnen wir $F_0(0) : F_1(0)$ mit b_0, so können wir

$$F_0(x) = b_0 F_1(x) + a_1 x F_2(x)$$

setzen, worin a_1 irgend eine von Null verschiedene Zahl sein kann und $F_2(x)$ eine Potenzreihe nach x bedeutet. Ist $F_2(0)$ nicht Null, so hat man auf ähnliche Art

$$b_1 = F_1(0) : F_2(0) \qquad F_1(x) = b_1 F_2(x) + a_2 x F_3(x),$$

wo a_2 irgend eine von Null verschiedene Zahl sein kann. Sind $F_3(0)$, $F_4(0)\ldots$ nicht Null, so darf man setzen

$$b_n = F_n(0) : F_{n+1}(0)$$
$$F_n(x) = b_n F_{n+1}(x) + a_{n+1} x F_{n+2}(x), \quad (n = 3, 4\ldots)$$

worin a_3, $a_4\ldots$ beliebige Zahlen sein dürfen, nur keine gleich Null. Da mithin, wenn nur x ein solcher Werth ist, dafs keine der Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)\ldots$ verschwindet,

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)} = b_0 + \frac{a_1 x}{F_1(x) : F_2(x)}$$
$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = b_1 + \frac{a_2 x}{F_2(x) : F_3(x)} \cdots$$

ist, so erhält man für $F_0(x) : F_1(x)$ zunächst den endlichen Kettenbruch

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)} = b_0 + \frac{a_1 x}{b_1} + \frac{a_2 x}{b_2} + \cdots + \frac{a_n x}{b_n} + \frac{a_{n+1} x F_{n+2}(x)}{F_{n+1}(x)}. \qquad (b^*)$$

Damit man von dieser Formel, worin, wie wir annehmen, n jede natürliche Zahl sein darf, zur Entwickelung des Quotienten $F_0(x) : F_1(x)$ in einen endlosen Kettenbruch

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)} = b_0 + \frac{a_1 x}{b_1} + \frac{a_2 x}{b_2} + \cdots + \frac{a_n x}{b_n} + \cdots \qquad (D)$$

übergehen darf, ist nothwendig und hinreichend, dafs der rechts stehende Kettenbruch convergirt und den Grenzwerth $F_0(x) : F_1(x)$ hat. Wird $F_n(x) : F_{n+1}(x)$ $(n > 1)$ mit $P_n(x)$, der n^{te} Näherungsbruch des Kettenbruches

$$b_0 + \frac{a_1 x}{b_1} + \frac{a_2 x}{b_2} + \cdots + \frac{a_n x}{b_n} + \cdots \qquad (c)$$

mit $Z_n : N_n$ bezeichnet, so hat man nach den Formeln (II)

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)} = \frac{a_{n+1}x\,Z_{n-1} + P_{n+1}(x)Z_n}{a_{n+1}x\,N_{n-1} + P_{n+1}(x)N_n}$$

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{a_{n+1}x\,N_{n-1}}{a_{n+1}x\,N_{n-1} + P_{n+1}(x)N_n}\left\{\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n}\right\}. \qquad \text{(d)}$$

Convergirt der Kettenbruch (c), so hat der zweite Factor rechts bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth Null. Bleibt der absolute Betrag des ersten Factors

$$\frac{a_{n+1}x\,N_{n-1}}{a_{n+1}x\,N_{n-1} + P_{n+1}(x)N_n} \qquad \text{(e)}$$

für alle Werthe von n unter einer bestimmten Zahl, so ist sicher

$$\lim (Z_n : N_n) = F_0(x) : F_1(x). \qquad \text{(f)}$$

Ist x reell und sind $b_1\ b_2 \ldots$; $a_1x\ a_2x \ldots P_1(x)\ P_2(x) \ldots$ sämmtlich positiv, so liegt der Ausdruck (e) zwischen 0 und 1 und es besteht die Relation (f), wofern nur der Kettenbruch (c) convergirt.

Ist $x = x_0$ ein Werth, wofür

$$F_1(x),\ F_2(x) \ldots F_{p-1}(x) \quad (p \geq 2)$$

von Null verschieden, $F_p(x) = 0$ ist, so bricht der Kettenbruch auf der rechten Seite von (D) beim Gliede $a_{p-2}x_0 : b_{p-2}$ ab. Besteht aber die Gleichung

$$0 = b_p + \frac{a_{p+1}x_0}{b_{p+1}} + \frac{a_{p+2}x_0}{b_{p+2}} + \cdots,$$

so gilt auch die Formel (D) für $x = x_0$. Das folgt aus (X) in Nr. 5 unmittelbar bei $\lim r = +\infty$.

18. Anwendungen.[16])

Betrachten wir die Potenzreihen

$$F_0(x) = 1 + \frac{x}{\gamma} + \frac{x^2}{2!\gamma(\gamma+1)} + \cdots + \frac{x^m}{m!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)} + \cdots$$

$$F_n(x) = \frac{1}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} + \sum_1^\infty{}_m \frac{x^m}{m!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n+m-1)} \quad (n = 1, 2 \ldots),$$

welche, falls γ nicht Null oder eine negative ganze Zahl ist, für jeden endlichen Werth von x convergiren, so finden wir sofort die Relationen

$$F_n(x) - (\gamma + n)F_{n+1}(x) = xF_{n+2}(x) \quad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Wenden wir nun die Entwickelung der vorigen Nr. an, so entsteht die Frage, ob der Quotient $F_0(x) : F_1(x)$ dem unendlichen Kettenbruche

$$\gamma + \frac{x}{\gamma+1} \dot{+} \frac{x}{\gamma+2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{x}{\gamma+n} \dot{+} \cdots \qquad (g)$$

gleich ist. Ist x reell und γ positiv, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn x positiv ist, so verschwindet weder $F_0(x)$, noch eine der Functionen $F_n(x)$. Der Kettenbruch (g) convergirt nach dem 2. Corollare in Nr. 9, daher hat man zufolge der Schlufsbemerkung in Nr. 17 für $x \geq 0$

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)} = \gamma + \frac{x}{\gamma+1} \dot{+} \frac{x}{\gamma+2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{x}{\gamma+n} \dot{+} \cdots \qquad (E)$$

Setzt man hier $\gamma = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{4}y^2$, so dafs

$$F_0(x) = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$F_1(x) = 2 + \frac{2y^2}{3!} + \frac{2y^4}{5!} + \cdots = \frac{e^y - e^{-y}}{y}$$

ist, so ergiebt sich die für jedes reelle y giltige Kettenbruchentwickelung

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{y}{1} \dot{+} \frac{y^2}{3} \dot{+} \frac{y^2}{5} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{y^2}{2n+1} \dot{+} \cdots.$$

Ist y eine rationale Zahl $r : s$ (wo r eine ganze, s eine natürliche Zahl > 1 bedeutet), so geht diese Formel über in

$$\frac{e^{\frac{r}{s}} - e^{-\frac{r}{s}}}{e^{\frac{r}{s}} + e^{-\frac{r}{s}}} = \frac{r}{s} \dot{+} \frac{r^2}{3s} \dot{+} \frac{r^2}{5s} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{r^2}{(2n+1)s} \dot{+} \cdots$$

Hieraus ist der Satz zu entnehmen, dafs jede rationale Potenz von e eine irrationale Zahl ist (woraus von selbst folgt, dafs der natürliche Logarithmus einer jeden rationalen Zahl irrational sein mufs). Wäre nämlich $e^{\frac{r}{s}}$ rational, so wäre es auch

$$(e^{\frac{r}{s}} - e^{-\frac{r}{s}}) : (e^{\frac{r}{s}} + e^{-\frac{r}{s}}).$$

Das ist unmöglich, denn der für diesen Quotienten erhaltene Kettenbruch hat zufolge des Satzes von Nr. 13 einen irrationalen Grenzwerth.

Setzt man in der letzten Gleichung $r = 1$ $s = 2$, so findet man die Entwickelung

$$\frac{e-1}{e+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n+2} + \cdots$$

Daraus folgt, dafs e nicht Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sein kann.[17]) Denn wäre das der Fall, so würde auch $(e-1):(e+1)$ einer solchen Gleichung genügen, müfste also einen periodischen einfachen Kettenbruch liefern, was jedoch, wie man sieht, nicht zutrifft.

2) Wenn x einen negativen Werth erhält, so kann dafür eine der Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$ ... verschwinden. Von einem gewissen Werthe von n: $n = p$ an wird jedoch keine der Functionen $F_n(x)$ mehr Null sein. In der That ist nun

$$1 > \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)\,F_n(x) > 1 + \frac{x}{\gamma+n}, \qquad \text{(h)}$$

wenn

$$\gamma + n + x \geq 0$$

ist, somit $F_n(x) > 0$; es genügt also, für p die kleinste ganze Zahl zu nehmen, wofür

$$\gamma + p + x \geq 1$$

ist. Dann convergirt auch nach Nr. 11 der unendliche Kettenbruch

$$\gamma + p - 1 + \frac{x}{\gamma+p} + \frac{x}{\gamma+p+1} + \cdots$$

mit negativen Theilzählern und positiven Theilnennern. Bezeichnen wir seine Näherungsbrüche mit $V_{p-1,n}$ und ihre Nenner mit $N_{p-1,n}$, so finden wir entsprechend der Formel (d)

$$\frac{F_{p-1}(x)}{F_p(x)} - V_{p-1,n} = \frac{xN_{p-1,n-1}}{xN_{p-1,n-1} + P_{n+1}(x)N_{p-1,n}} \times (V_{p-1,n-1} - V_{p-1,n}). \qquad \text{(i)}$$

Bringen wir den ersten Factor auf die Form

$$(-1):\left(-\frac{P_{n+1}(x)}{x}\cdot\frac{N_{p-1,n}}{N_{p-1,n-1}}-1\right),$$

so hat sein Nenner bei $\lim n=+\infty$ den Grenzwerth $+\infty$. Es ist nämlich nach Nr. 11

$$N_{p-1,n}>N_{p-1,n-1}>0$$

und nach (h)

$$P_{n+1}(x)=F'_{n+1}(x):F_{n+2}(x)>\gamma+n+x+1,$$

somit

$$\frac{P_{n+1}(x)}{-x}\cdot\frac{N_{p-1,n}}{N_{p-1,n-1}}-1>\frac{\gamma+n+2x+1}{-x}.$$

Der absolute Betrag des ersten Factors in (i) bleibt somit für alle Werthe $n\geq p$ unter einer endlichen Zahl, so dafs sich die Relation

$$\lim_{n=+\infty} V_{p-1,n}=F_{p-1}(x):F_p(x)$$

ergiebt.

Aus dem Vorstehenden folgt weiter, dafs auch für negative x, wenn x nicht eine Wurzel der Gleichung $F_1(x)=0$ ist, die Formel (E) gilt. Denn der Grenzwerth von (g) ist der Kettenbruch

$$\gamma+\frac{x}{\gamma+1}+\cdots+\frac{x}{\gamma+p-2}+\frac{xF_p(x)}{F_{p-1}(x)},$$

welcher nach (b*) den Werth $F_0(x):F_1(x)$ hat.

Setzt man nun $\gamma=\frac{1}{2}$ $x=-y^2:4$, sodafs

$$F_0(x)=\cos y \qquad F_1(x)=2\sin y:y$$

ist, so ergiebt sich aus (E) die Formel

$$\tan y=\frac{y}{1}-\frac{y^2}{3}-\frac{y^2}{5}-\cdots, \tag{k}$$

welche für alle reellen Werthe von y, die nicht ungerade Vielfache von $\pm\frac{\pi}{2}$ sind, gilt. Läfst man y wie oben eine rationale Zahl $r:s$ sein, so findet man die Kettenbruchentwickelung

$$\tan\frac{r}{s}=\frac{r}{s}-\frac{r^2}{3s}-\frac{r^2}{5s}-\cdots,$$

woraus nach Nr. 13 unmittelbar hervorgeht, dafs zu einem rationalen Argumente eine irrationale Tangente gehört. Demnach mufs die Zahl π irrational sein; denn wäre π

rational, so wäre es auch $\frac{1}{4}\pi$, somit $\tan\frac{1}{4}\pi$ irrational, während doch $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ ist.

Aus (k) kann man noch schliefsen, dafs π^2 irrational ist. Da

$$\tan\pi = 0$$

ist, so mufs

$$\frac{\pi^2}{5} \dot{-} \frac{\pi^2}{7} \dot{-} \frac{\pi^2}{9} \dot{-} \cdots = 3$$

sein. Wäre π^2 eine rationale Zahl $r : s$, so müfste

$$\frac{r}{5s} \dot{-} \frac{r}{7} \dot{-} \frac{r}{9s} \dot{-} \frac{r}{11} \dot{-} \cdots = 3$$

sein. Eine solche Gleichung ist aber unmöglich, da nach dem Satze in Nr. 13 die linke Seite irrational ist.

Bis in die neueste Zeit hat man über die Natur der Zahlen e und π nicht mehr gewufst, als im Vorstehenden angeführt ist. Heute ist Dank den Untersuchungen von Ch. Hermite und F. Lindemann bekannt, dafs beide Zahlen transcendent sind d. h. keine von ihnen Wurzel einer ganzzahligen algebraischen Gleichung ist. Es kann also keine von beiden mit Hilfe von algebraischen Curven und Flächen construirt werden: die Quadratur des Kreises ist unmöglich.[18])

Anmerkungen und Nachträge.

Zum I. Abschnitte.

[1]) Die Entwickelungen von Nr. 1—5 verdankt man Weierstrafs (vgl. Pincherle saggio etc. in Battaglini G. XVIII p. 203—210).

[2]) Vgl. Weierstrafs Crelle J. Bd. 52 p. 289 und Pincherle l. c. p. 211.

[3]) Argand Gergonne Ann. V p. 208.

[4]) Die Definitionen und Sätze von Nr. 9 sind mit Ausnahme der von J. Thomae herrührenden dritten Definition (vgl. Abrifs e. Theor. d. complexen Functionen 1870 p. 41) von H. Grassmann gegeben worden (vgl. die Ausdehnungslehre 1862 p. 3, 20, 233). Der Fall, dafs die Einheitsproducte sich in der Form der Gleichungen (b) i. T. auf die ursprünglichen Einheiten zurückführen lassen, ist von ihm nicht ausdrücklich erwähnt.

[5]) Nr. 10—12 ist zumeist aus der Abhandlung von Weierstrafs: „Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Gröfsen" (Göttinger Nachr. 1884 p. 385—419) entnommen. Hierzu, sowie zu der unt. erwähnten Arbeit von Dedekind hat B. Berloty in seiner Doctordissertation: „Theorie des quantités complexes à n unités principales" (Paris 1886) einen eingehenden Commentar geliefert, der auch einen Abschnitt über die Algebra dieser complexen Gröfsen enthält.

[6]) Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme 1867 p. 106.

[7]) Der Satz ist leicht zu beweisen. Z. B. ein Zahlensystem mit den drei Elementen $e\ j\ e_1$ wo $j \,.\, j = -e$ ist, ist undenkbar, da die Gleichung

$$(j \,.\, j) \,.\, e_1 = j \,.\, (j \,.\, e_1)$$

unter diesen Umständen nicht bestehen kann.

[8]) Gauss' Werke II, p. 178.

[9]) Dedekind „Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Gröfsen" in den Göttinger Nachr. 1885 p. 141—159.

[10]) Dedekind zeigt a. a. O., dafs man aus jedem Systeme von n^2 reellen oder gemeinen complexen Zahlen $e_r^{(s)}$, dessen Deter-

minante nicht Null ist, Werthe der Coefficienten $\lambda_{r,s}^{(f)}$ in den Gleichungen (b) ableiten könne, welche allen Gleichungen (f) und (h) in Nr. 9 Genüge leisten und dafs umgekehrt jedem Systeme $\lambda_{r,s}^{(f)}$ (wenn nur eine gewisse Determinante, deren Elemente aus den $\lambda_{r,s}^{(f)}$ zu bilden sind, nicht verschwindet) ein System $e_r^{(s)}$ sich zuordnen lasse. — Zu den in den Producten der i. T. erwähnten Elemente $g_0\ g_1\ g_2 \ldots g_{n-1}$ vorkommenden Coefficienten $\lambda_{r,s}^{(f)}$ gelangt man nach Dedekind durch die Annahme

$$e_r^{(s)} = x_r^{s-1},$$

wo $x_1\ x_2 \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung (i) bezeichnen.

[11]) H. A. Schwarz hat bewiesen (Gött. Nachr. 1884 p. 516), dafs man dieselben Theilsysteme erhält, wie man die Zahl g auch wählen mag, wenn sie nur die i. T. aufgestellten Forderungen erfüllt. O. Hölder hat gezeigt (ebenda 1886 p. 241), dafs jede Schaar irgendwie bestimmter Theilsysteme, welche die nämlichen Eigenschaften besitzt, wie die i. T. ermittelte Reihe $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_k$, damit übereinstimmen mufs.

Zum II. Abschnitte.

[1]) Vgl. Gauss' Werke III p. 6 Note.

[2]) Vgl. Gauss' Werke II p. 171 f.

[3]) Vgl. R. Argand: Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires etc. 2. Ausgabe mit Vorrede von J. Hoüel u. Anhang. Paris 1874.

[4]) Vgl. Hoüel, Sur la méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis in Nouv. Ann. de Math. 2. Sér. T. 8 (1869). Im 12. und 13. Bande der 2. Serie derselben Zeitschrift findet sich eine auch separat erschienene Uebersetzung der Abhandung von Bellavitis aus dem Jahre 1854: „Sposizione del metodo delle equipollenze" von Laisant. Diese Schrift ist von uns mehrfach benutzt.

Mancher der von uns vorgeführten Anwendungen der geometrischen Theorie der complexen Zahlen begegnet man auch in der älteren deutschen Litteratur über diesen Gegenstand, von der wir H. Scheffler: Ueber das Verhältnifs der Arithmetik zur Geometrie, Braunschweig 1846; F. Riecke: Die Rechnung mit Richtungszahlen, Stuttgart 1856 erwähnen.

[5]) Vgl. insbesondere A. F. Möbius: Abhandlungen in den Ber. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 1852—55 und die zusammenfassende Darstellung derselben in Witzschel's Grundlinien der neueren Geometrie 1858.

[6]) Bellavitis nennt solche Strecken äquipollent und drückt ihre Beziehung durch ein eigenes Zeichen aus, was nach I. 4. d. I. T. nicht zweckmäfsig ist.

[7]) Cauchy, C. d'Analyse p. 180.

[7*]) Hankel l. c. p. 79.

[8]) Wenn die gleichlangen Strecken e i den Winkel ω einschliefsen, wenn also

$$\widehat{XOY} = \widehat{EOJ} = \omega$$

ist, wobei die positive Drehungsrichtung in der Constructionsebene als gegeben vorausgesetzt ist, so hat man

$$i \,.\, i = -e + (2 \cos \omega)\, i \,.$$

[9]) Gauss' Werke II. p. 103.

[10]) Argand, Gergonne Ann. V. p. 208. Cauchy (C. d'Analyse p. 183) nannte $\cos\theta + i \sin\theta$ „l'expression reduite".

[11]) Die von Gauss empfohlenen (vgl. Grunert, Arch. 38. Bd. p. 366) und angewandten Schreibweisen $\cos \alpha^n$ statt $(\cos \alpha)^n$, $\cos (\alpha^n)$ u. s. w. scheinen mir zu einigen anderen, wie dx^2 für $(dx)^2$ dagegen $d(x^2)$, $f(x^2)$, besser zu passen als die gegenwärtig mehr verbreiteten $\cos^n \alpha$, $\cos \alpha^n$ statt $\cos (\alpha^n)$ u. s. w.

[12]) Ueber die Entwickelung von $\cos\theta^m \sin\theta^n$ vgl. Hermite C. d'Analyse I (1873) p. 38.

[13]) Nr. 15 und 16 nach Möbius, Ber. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Leipzig 1852 p. 41 und 1853 p. 14.

[14]) M. Ohm, Versuch e. vollk. cons. Systems etc. II. p. 386.

[15]) Vgl. Cauchy, C. d'Analyse p. 263.

[16]) Vgl. Cauchy l. c. p. 222.

[17]) Vgl. Schlömilch, Handb. d. alg. Anal. § 54.

Zum III. Abschnitte.

[1]) Vgl. Siebeck in Crelle J. Bd. 55 (1858) p. 242.

[2]) Vgl. Cauchy, Compt. rend. T. 32 (1851) p. 161.

[3]) Die erste Bezeichnung rührt von Weierstrafs her, die zweite ist von Briot und Bouquet entlehnt. Vgl. V. Note 9*).

[4]) Monatsber. d. kgl. Acad. d. Wiss. zu Berlin 1880 p. 728.

[5]) Vgl. Riemann Werke p. 39.

[6]) Die Definitionen der Grenzwerthe von Functionen complexer Veränderlichen rühren von Weierstrafs her.

[7]) Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dafs eine reelle Function zweier reellen Veränderlichen $\xi\eta : \varphi(\xi\eta)$ bei den von einander unabhängigen Grenzübergängen

$$\lim \xi = \alpha \qquad \lim \eta = \beta$$

einen endlichen Grenzwerth hat (vgl. IX. 20 d. I. T.), besteht darin, dafs zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ Zahlen $\delta > 0$ $\delta' > 0$ gehören, derart, dafs wenn $\xi\eta$, $\xi'\eta'$ dem vorgeschriebenen Bereiche von $\xi\eta$ angehörige Werthsysteme bezeichnen, welche den Ungleichungen

$$\begin{matrix} |\xi - \alpha| < \delta & |\eta - \beta| < \delta', \\ |\xi' - \alpha| < \delta & |\eta' - \beta| < \delta' \end{matrix}$$

genügen,

$$|\varphi(\xi', \eta') - \varphi(\xi, \eta)| < \varepsilon$$

ist. Der Satz wird auf ähnliche Art bewiesen, wie der entsprechende für Functionen einer Veränderlichen in IX. 8. d. I. T.

[8]) Nach Weierstrafs. Vgl. Pincherle Saggio etc. Battaglini G. XVIII. p. 246.

[9]) Vgl. Möbius, Ber. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Leipzig 1853 p. 14, 176 und Siebeck l. c.

Zum IV. Abschnitte.

[1]) Cauchy, C. d'Analyse p. 86.

[2]) Cauchy l. c. p. 95. Weierstrafs nach Pincherle l. c. p. 319.

[3]) Dieser Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra rührt im Wesentlichen von Argand her (vgl. Essai 2. édition p. 118). Die von ihm zu Grunde gelegte Annahme, dafs $P(\xi\eta)$ seine untere Grenze $\varkappa$ erreiche, läfst sich nach dem i. T. benutzten Satze von Weierstrafs als zutreffend erweisen.

[4]) Gauss in seiner Doctordissertation 1799 (Werke III).

[5]) Beweis nach Argand Essai p. 38.

[6]) Nach Raabe, Crelle J. 42 B. — H. Kinkelin (vgl. VI. 12) und B. Imschenetzky bezeichnen das Polynom $\varphi_m(x) : m!$ als Function von Jacob Bernoulli (vgl. Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg 7. sér. T. 31. 1883). Daselbst findet sich auch ein directer Beweis für die Relation $d_{2k} = 0$. Als erste Bernoulli'sche Function $\varphi_1(x)$ wird passender $x - 1$ statt x gewählt.

[7]) Die analoge Formel für ganze Functionen von zwei Veränderlichen giebt Cauchy C. d'Analyse p. 96.

[8]) Gauss' Werke III. p. 276.

[9]) Aus der Formel (16) in XI. 5 d. I. T. ergeben sich die Ungleichungen:

$$(0 < x \leq 1) \qquad x - \tfrac{1}{2}x^2 < l(1 + x) < x \qquad \text{(a)}$$

$$(0 < x < 1) \qquad x < -l(1 - x) < x + \frac{x^2}{2(1 - x)}, \qquad \text{(b)}$$

die letzte nach (2) in X. 32 d. I. T. Die Relationen (a) gelten aber für jedes positive x, wie sich auf die folgende Art ergiebt. Es ist

$$-l\left(1 - \frac{x}{1 + x}\right) = l(1 + x),$$

somit, da bei positivem x

$$0 < x : (1 + x) < 1$$

ist, nach (b)

$$\frac{x}{1+x} < l(1+x) < \frac{x}{1+x} + \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{1+x} = x \cdot \frac{1+\frac{1}{2}x}{1+x}.$$

Da der letzte Ausdruck kleiner als x, $x : (1+x)$, falls $x > 1$ ist, gröfser als $x - \frac{1}{2}x^2$ ist, so gelten die Formeln (a) auch wenn $x > 1$ ist.

Zum V. Abschnitte.

[1]) Abel, Oeuvres par Lie et Sylow I. p. 221.

[2]) Eisenstein, Math. Abhandl. 1847 p. 225.

[3]) Cauchy, C. d'Analyse p. 547.

[4]) Vgl. Catalan; Traité él. d. Séries (1860) p. 32, Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie § 143.

[5]) Vgl. Weierstrafs, Crelle J. 51 Bd. (1856) p. 22–33.

[6]) Weierstrafs l. c. p. 29.

[7]) Pringsheim, Math. Ann. XXV. p. 419.

[8]) In dem allgemeinen Falle, dafs x_0 nicht auf Or liegt, ist der Satz vom Verfasser gezeigt worden vgl. Schlömilch Z. 29 Bd. p. 127.

[9]) Vgl. Cauchy, Resumés analytiques 1833 p. 161.

[9*]) Cauchy (Compt. rend. T. 32 p. 484) bezeichnet eine Function $f(x)$, welche in einem zusammenhängenden Ebenenstück $\mathfrak{F}$ eindeutig, stetig und mit einer endlichen und stetigen Ableitung $f'(x)$ begabt ist, als monogen in $\mathfrak{F}$, Briot und Bouquet (Théor. d. fontions ellipt. 2. éd. 1875 p. 14) als homolorph in $\mathfrak{F}$. Nach dem i. T. erwähnten Satze von Cauchy ist diese Function in jedem Punkte von $\mathfrak{F}$ vom Character der ganzen Functionen.

[9**]) Hinsichtlich des Verhaltens der Reihe (8) i. T. in den Punkten des Kreises k vom Mittelpunkte x_0, welcher den Convergenzkreis der Reihe (1) von Innen berührt, bestehen die folgenden Sätze:

1) „Es bezeichne x_1 den Berührungspunkt der beiden Kreise (Fig. 22). Convergirt die Reihe (1) für $x = x_1$, so convergirt dafür auch die Reihe (8) und hat den nämlichen Grenzwerth." Der Beweis ist vom Verfasser geliefert in Schlömilch Z. Bd. XX p. 373. Der umgekehrte Satz gilt ebenfalls, da man die Reihe (1) als aus der Reihe (8) für den Punkt $x = 0$ abgeleitet betrachten darf, sei es unmittelbar oder durch Einschaltung von Punkten auf Ox_1, deren Abstände kleiner als $|x_0x_1|$ sind. — Mit denselben Mitteln wie den Satz 1) beweist man den folgenden:

2) „Convergirt die Reihe (1) für $x = x_1$ absolut, so convergirt die Reihe (8) in allen Punkten des Kreises k und hat überall die nämliche Summe wie die Reihe (1)." — Endlich ergiebt sich mit Hilfe des 4. Satzes in Nr. 18 noch der Satz:

3) „Hat die Summe $f(x)$ der Reihe (1) in dem Punkte $x = x_1$ den Character einer ganzen Function, so convergirt die Reihe (8) in allen Punkten des Kreises k absolut und hat überall die nämliche

Summe wie die Reihe (1)." Da die Summen der Reihen (1) und (8) in allen Punkten innerhalb k übereinstimmen, so verliert die Summe von (8) in keinem Punkte des Kreises k den Character einer ganzen Function; dieser Kreis kann also nicht ihr Convergenzkreis sein. Ist aber der Convergenzradius von (8) gröfser als $|x_0 x_1|$, so convergirt diese Reihe in allen Punkten des Kreises k absolut.

[10]) Nach Weierstrafs (vgl. Pincherle l. c. p. 349).

[11]) Der Satz wurde von Cauchy mit Hilfe der Integralrechnung bewiesen. Der hier gegebene Beweis rührt nach Serret (Handbuch d. höh. Algebra I. Nr. 204) im Wesentlichen v. E. Rouché her.

[12]) Vgl. Weierstrafs, Monatsber. d. Berl. Acad. 1880 p. 723. — Der Verfasser hat in den Mathem. Ann. (Bd. 24 p. 169) gezeigt, dafs unter den im Satze gemachten Voraussetzungen die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $a_{m,n} x^n$ convergirt (vgl. p. 247 d. I. T.).

[13]) Solche Ausdrücke hat zuerst Weierstrafs angegeben (vgl. III. 5). Der i. T. mitgetheilte rührt im Wesentlichen von J. Tannery her (vgl. Monatsber. d. Berl. Acad. 1881 p. 228 und A. Pringsheim Mathem. Annal. XXII. p. 109). Den Ausdruck (20) hat Pringsheim a. a. O. gegeben.

[14]) Weierstrafs nach Pincherle l. c. p. 350.

[15]) Die den i. T. angeführten Sätzen entsprechenden von Cauchy und Laurent sind allgemeiner, indem darin für $f(x)$ lediglich die Monogeneität (s. o. 9*)) von $f(x)$ innerhalb eines Kreises, bezw. Kreisringes gefordert ist.

[16]) Den Beweis des 3. Satzes i. T. hat L. Scheeffer geliefert (Acta math. IV. p. 375). Ebenda p. 80 findet man einen elementaren Beweis desselben von G. Mittag-Leffler.

Zum VI. Abschnitte.

[1]) Zu Nr. 1—4 vgl. Cauchy, C. d'Analyse p. 301. Ohm, Vers. e. Systemes d. Math. (1822) II. p. 313. — Die Bezeichnung „Hauptwerth" der n^{ten} Wurzel, des Logarithmus, der Potenz stammt von Weierstrafs. Cauchy gebrauchte dafür die von E. G. Björling vorgeschlagenen Namen: „racine, logarithme, puissance principale" (vgl. des Letzteren Artikel in Grunert A. XXI. p. 1). Er bestimmte sie zuerst nach der i. T. gegebenen Regel, änderte dieselbe aber später dahin ab, dafs die Neigung α der Zahl a nicht aufserhalb des Intervalles $(-\pi, +\pi)$ anzusetzen sei, sodafs es zwei Hauptwerthe für den Logarithmus u. s. w. einer negativen Zahl giebt. Der Verfasser hat es jedoch für zweckmäfsig erachtet, die Symbole la a^x auch für reelle, negative Werthe von a eindeutig zu definiren.

[2]) Die Euler'sche Methode, die Binomialreihe zu summiren, wurde von Cauchy (C. d'Analyse p. 291) auf complexe Werthe der Veränderlichen x und von Abel (Oeuvres par Lie et Sylow I. p. 226) auch auf complexe Werthe des Exponenten s ausgedehnt. — Die Entwickelung von $l(1+x)$ nach Cauchy a. a. O. p. 545.

[3]) Abel, Oeuvres I. p. 248.

[4]) Vgl. Lehmann in Grunert's Arch. 21. Bd. p. 121.

[5]) Die hier gegebene Ableitung der Formeln (18)—(20) findet sich in J. Thomae's elem. Theor. d. analyt. Functionen § 133. Die Convergenzbedingungen für dieselben hat bei reellem s Cauchy angegeben (C. d'Analyse Note VIII).

[6]) Kinkelin, Allg. Theor. der harmonischen Reihen 1862 p. 8.

Zum VII. Abschnitte.

[1]) Vgl. G. Mittag-Leffler, Acta math. IV. p. 30.

[2]) U. Dini, Annali di Mat. 2. ser. II. p. 35. Weierstraſs nach Pincherle a. a. O. p. 228.

[3]) Nach Weierstraſs (vgl. Pincherle a. a. O. p. 231).

[3*]) Vgl. G. Mittag-Leffler, Acta math. IV. p. 31.

[4]) Der von Cauchy gegebene besondere Fall des Satzes steht C. d'Analyse p. 563. Für reelle a_n und gerade m fand den Satz F. Arndt (Grunert Arch. XXI. 1853 p. 86). Die im Zusatze ausgesprochene Verallgemeinerung des Satzes rührt von A. Pringsheim her (vgl. Mathem. Ann. XXII. p. 482). Daselbst sind auch die Werthveränderungen bedingt convergenter Producte bei Umstellung der Factoren untersucht.

[4*]) Vgl. Arndt l. c. Daselbst weitere Beispiele.

[5]) Die unendlichen Producte für den Sinus und Cosinus rühren von Euler her (Introductio in Anal. infin. 1748, I. § 156 f.). Er geht von der Formel

$$e^x - e^{-x} = \lim_{n=+\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right\}$$

aus und zerlegt zunächst die hinter dem Zeichen lim stehende ganze Function n^{ten} Grades von x in lineare Factoren. Führt man in der so erhaltenen Gleichung den Grenzübergang $\lim x = 0$ durch, so gelangt man zur Gleichung

$$\frac{1}{2x}\left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right\} = \prod_1^k{}_r \left(1 + \left[\frac{x}{n \tan \frac{r\pi}{n}}\right]^2\right) = Q_n$$

$$(n = 2k + 1).$$

Hieraus folgt bei

$$\lim n = +\infty$$

die Gleichung

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{n=+\infty} Q_n,$$

welche der Formel (2) i. T. entspricht. Die weitere Entwickelung bis zu der für jeden Werth von x geltenden Schlufsformel

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \prod_1^\infty{}^n \left(1 + \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right)$$

verläuft vollständig parallel der von der Formel (2) bis (7) i. T., nur im Einzelnen etwas einfacher. Das Euler'sche Verfahren ist dem i. T. gegebenen vorzuziehen, welches sich an Cauchy (C. d'Analyse p. 565) und Thomae (El. Theor. d. anal. Funct. p. 95) anschliefst. — Blofs mit Benutzung der Formel

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

gelangt man zu einer der Formel (2) äquivalenten nach H. Schröter (Schlömilch Z. XIII. p. 257).

[6]) Euler stellt a. a. O. § 155 die Function $(e^x - 1) : x$ durch den Ausdruck

$$\lim_{n=+\infty} \prod_1^k{}^r \left\{1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{4r^2\pi^2}\right\} \qquad (n = 2k + 1)$$

dar, welcher von geringer Bedeutung ist. Die i. T. aufgeführte Zerlegung derselben rührt von Cauchy her (Exerc. d. Math. IV. p. 200). — Die Aufgabe, die ganzen transcendenten Functionen in Primfunctionen zu zerlegen, ist erst von Weierstrafs vollständig gelöst worden (vgl. seine Abh. „zur Theorie d. eindeut. anal. Functionen" 1877). Nach W. hat man

$$\sin \pi x = \pi x \prod_r \left(1 - \frac{x}{r}\right) e^{\frac{x}{r}},$$

wo r alle ganzzahligen Werthe aufser Null durchläuft. Das Product rechts convergirt nämlich unbedingt, wie nach dem 3. Satze in Nr. 5 leicht zu zeigen ist.

[7]) Euler, Introductio I. § 171 f. Es sind jedoch a. a. O. bedingt convergirende Producte benutzt, wodurch die Resultate unsicher werden. Andere elementare Methoden, die Partialbruchentwickelung von $\cot x$ etc. herzustellen, sind von Schröter (l. c. p. 254) und von Thomae (l. c. p. 90) gegeben. — Das wahre Wesen der Partialbruchzerlegung der eindeutigen analytischen Functionen ist erst von Mittag-Leffler und Weierstrafs erkannt worden (vgl. des Ersteren Noten in den C. R. 1882).

[8]) Euler l. c. I. § 198. Inst. calc. diff. II. § 124.

[9]) Stern, Borchardt J. 88. Bd. p. 85. — Von T_3 an ist jeder Tangentencoefficient durch 16 theilbar, wie sich leicht durch den Schlufs von $3, 4 \ldots s - 1$ auf s ergiebt. Uebrigens sind schon die Zahlen

$$2(2^{2s} - 1) B_s$$

ganz und zwar ungerade (Catalan C. R. LVIII p. 1105).

[10]) Ueber diesen und andere Sätze über die Euler'schen Zahlen vgl. Stern, Borchardt J. 79. Bd. p. 67. — Jede Euler'sche Zahl ist von der Form $4k + 1$ (Sylvester in C. R. LII.). Beweis durch

Schlufs von $1, 2 \ldots s-1$ auf s. Unter Voraussetzung, dafs E_1 $E_2 \ldots E_{s-1}$ ganze Zahlen von der Form $4k+1$ sind, läfst sich E_s mittelst der Recursionsgleichung i. T. auf die Form bringen

$$E_s = 4K + L,$$

wo K L ganze Zahlen und zwar letztere

$$L = \sum_1^{s-1} (-1)^{r-1} \binom{2s}{2r}$$

ist. $1 - L$ ist aber der reelle Theil von $(1+i)^{2s}$. Man hat nun

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i} \qquad (1+i)^{2s} = 2^s e^{\frac{1}{2}s\pi i},$$

also je nachdem s ungerade oder gerade $(= 2l)$ ist, $1 - L$ gleich Null oder $(-1)^l 2^{2l}$ d. i. L hat die Form $4K' + 1$, wo K' eine ganze Zahl bedeutet.

[11]) Euler, Introductio I. § 191 f.

Zum VIII. Abschnitte.

[1]) Euler, Introductio in Anal. inf. I. § 361.

[2]) Vgl. Seidel in d. Abh. der bayr. Acad. 2. Cl. VII. Bd. (1855) p. 566. Daselbst ist auch Satz 3) bemerkt.

[3]) Vgl. Seidel l. c. p. 567.

[4]) Vgl. Stern, Lehrb. der algebr. Analysis p. 307.

[5]) Dieser Satz wurde von L. Seidel und M. A. Stern gefunden. Vgl. Seidel l. c. p. 562.

[6]) Vgl. Lambert, Beiträge II. p. 72.

[7]) Vgl. Seidel l. c. p. 582; Stern, Lehrb. d. alg. Analysis p. 299.

[8]) Vgl. Seidel l. c. p. 585 f.

[9]) Vgl. Stern, Göttinger Nachrichten 1863 p. 143.

[10]) Vgl. Legendre, Élémens de Géométrie 4. Note.

[11]) Die Formeln (34) sind im Falle $m = 1$ $a_1 = 1$ von Clausen im 3. Bd. von Crelle's J. aufgestellt worden; S. Günther hat sie für jeden eingliederig-periodischen Kettenbruch gegeben (vgl. Darstell. d. Näherungsw. von Kettenbrüchen, Erlangen 1873 p. 51). — Dafs die Näherungsbrüche V_{hm+r} eines periodischen Kettenbruches für alle Werthe von r mit Ausnahme eines einzigen $r = s$ bei $\lim h = +\infty$ die eine Wurzel a der quadratischen Gleichung (30) zum Grenzwerthe haben können, während V_{hm+s} durchaus gleich ihrer anderen Wurzel b ist, hat Thiele hervorgehoben (vgl. Fortschr. d. Math. XI. p. 150).

[11*]) Wenn $|d| = |c|$, $d : c$ jedoch keine Einheitswurzel ist, so divergirt der Kettenbruch (29), wie aus der Formel für $Z_{hm+r} : N_{hm+r}$ hervorgeht. Convergenz desselben wäre jetzt nur möglich, wenn entweder $Z_r - aN_r$ oder $Z_r - bN_r$ für alle Werthe $r = 1, 2 \ldots m$ verschwinden würde. Das kann aber nicht eintreten, so lange alle Zähler a_r von Null verschieden sind.

[12]) Dafs die absolut kleinere Wurzel der Gleichung

$$x^2 + 2Bx + A = 0,$$

falls nur $B^2 > A$ ist, dem i. T. angegebenen Kettenbruche gleich ist, hat A. F. Möbius gezeigt (Crelle J. VI. 1830 p. 234).

[13]) Wir verweisen auf das 2. Cap. d. I. T. v. Serret's höherer Algebra.

[14]) Euler, Introductio in Anal. inf. I. § 368—373.

[15]) Dieses Verfahren ist von Legendre l. c. zu den Entwickelungen in Nr. 18 benutzt worden, ferner von Gaufs in der Theorie der hypergeometrischen Reihe (W. III. p. 134). Die Convergenzbetrachtung nach Schlömilch, algebr. Anal. § 67.

[16]) Die Irrationalität von e^x bei rationalem x und von π hat Lambert (Beiträge II. 1. p. 159) zuerst gezeigt. Seinem Beweise fehlt zur völligen Strenge noch der Satz von Nr. 13, den Legendre l. c. hinzufügte. Letzterer bemerkte auch, dafs π^2 irrational ist.

[17]) Stern, Algebr. Anal. p. 342.

[18]) Vgl. Ch. Hermite, sur la fonction exponentielle, Paris 1874; F. Lindemann, Math. Ann. XX. p. 213; Weierstrafs, Sitzungsb. d. Acad. d. W. z. Berlin 1885 p. 1067.

Berichtigungen.

Zum ersten Theile.

S. 1, Z. 2 v. u. st. „die mit einem Dinge" l. „von denen je zwei mit einander".

S. 5 l. Z. st. „V. 1" l. „V. 2".

S. 11, Z. 6 st. „$B = B'$" l. „$B \geq B'$".

S. 45, Z. 5 v. u. st. „$\alpha' + \beta'$" l. „$\alpha' + \beta$".

S. 49, Z. 2 v. u. st. „γ" l. „δ".

S. 66, Z. 11 v. u. nach „nicht" schalte ein „beständig".

S. 103, 2. Satz st. „Bedingung bezw. Relation (f) l. „Convergenzbedingung".

S. 112, Z. 2 fehlt nach „Zahl" „e".

S. 119, Z. 11 u. 10 v. u. st. „c" l. „c". — Z. 8 v. u. st. „2" l. „1".

S. 122, Z. 16 v. u. st. „$<$" l. „$>$".

S. 154, Z. 2 v. u. st. „$= e^x$" l. „$e^x =$".

S. 164, Z. 4 st. „$>$" l. „$<$".

S. 173, Formel (d) st. „—" l. „=".

S. 183, l. Z. fehlt die Marke „(p)".

S. 192, Z. 2 v. u. nach „Werthe" schalte ein: „der unabhängigen Veränderlichen x, auf der zweiten die Werthe".

S. 213, Z. 15 v. u. l. „$f_1(x)^{\mu_1} f_2(x)^{\mu_2} \ldots f_n(x)^{\mu_n}$".

S. 220, Z. 7 v. u. st. „denselben“ l. „einen“.

S. 229, Z. 7 st. „$a_0^{(1)}$“ l. „$a_1^{(0)}$“.

S. 247, Z. 13 v. u. st. „absolute“ l. „nothwendige und hinreichende Bedingung der unbedingten“.

S. 266, Z. 10 u. 11 füge nach „und“ zu „eine“, st. „Functionen“ l. „Function“, und st. „sind“ l. „bilden“.

S. 274, Z. 8 nach „nimmt“ fehlt „man“.

S. 278, Z. 9 v. u. st. „$\frac{r-r'}{r+r'} = \alpha$“ l. „$\frac{r-r'}{r+r'}\varepsilon = \alpha\varepsilon$“.

S. 280, Z. 5 füge zu „bei $\lim x = r - 0$“.

S. 286, Z. 11 st. „$A_{m,n}$“ l. „$C_{m,n}$“. — Statt Z. 2 v. u. „es zwischen“ bis S. 287, Z. 3 „so dafs“ l. „$|f(0)| < S$ ist, so dafs eine positive Zahl $A < R$ sich so bestimmen läfst, dafs für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner als A ist, $|f(x)| < S$ ist, die“.

S. 287, Z. 4 st. „Also“ l. „Auch“.

S. 289, Z. 11 v. u. st. „$f'(x_0)$, $f''(x_0)$“ l. „$f'(x)$, $f''(x)$“.

S. 300, Z. 7 st. „$=$“ l. „$\leqq$“.

S. 309, Z. 6 st. „$<$“ l. „$>$“.

S. 318, zw. Z. 6 u. 7 ist die Gleichung einzuschalten

$$\log 100 = \log 9 + \log 11 + 2M\left\{\frac{1}{199} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{199}\right)^3 + \cdots\right\}.$$

Zu Nr. 7. Das hier entwickelte Verfahren wurde zuerst von Briggs, hierauf von Leonelli gefunden (vgl. Leonelli Supplément logarithmique. Herausgegeben von Hoüel, 2. éd. 1876 p. 60).

S. 327, Z. 14 u. 24 st. „log“ l. „l“.

S. 333 fehlt die Note „[6]) Der Beweis des 3. Satzes ausgenommen, nach Duhamel, Des methodes dans les sciences de raisonnement II. p. 445 f.“.

S. 337, Z. 15 v. u. st. „φ_n“ „12“ l. „(φ_n)“ „11“.

Zum zweiten Theile.

S. 25, Z. 3 v. u. st. „$g_r \cdot g_s$“ l. „$g^s \cdot g^r$“.

S. 35, Z. 1 st. „neuen Gröfsen“ l. „den neuen Gröfsen entsprechenden Zahlen“.

S. 123, Z. 10 v. u. fehlt die Marke „(1)“.

QA 251 .S7
Vorlesungen uber allgemeine Ar
Stanford University Libraries
3 6105 041 587 630

QA
251
S7

Stanford University Libraries
Stanford, California

Return this book on or before date due.